УДК 512.8

В. П. Щедрик

Критерий выделения действительного множителя из матричного многочлена

В работе [1] указаны конструктивно проверяемые необходимые и достаточные условия выделения унитального множителя из матричного многочлена переменной x, коэффициентами которого являются матрицы из $M_n(\mathbb{C})$.

В настоящей статье исследуется вопрос разложения действительного матричного многочлена $A(x)$, $\det A(x) \not\equiv 0$, на действительные множители, где под действительным матричным многочленом понимается многочлен, коэффициентами которого есть матрицы из $M_n(\mathbb{R})$.

Теорема 1. *Для того чтобы из $A(x)$ можно было выделить действительный унитальный множитель степени r, необходимо и достаточно, чтобы существовало разложение*

$$A(x) = (Ex^r + B_1x^{r-1} + \ldots + B_r)D(x) = B(x)D(x), \qquad (1)$$

$B_i \in M_n(\mathbb{C})$, $i = 1, \ldots, r$, *такое, что форма Смита матрицы $B(x)$ будет действительным матричным многочленом.*

Доказательство. Необходимость очевидна.

Известно, что для матрицы $A(x)$ существуют такие обратимые матрицы $P(x)$ и $Q(x)$ над $\mathbb{R}[x]$, что $P(x)A(x)Q(x) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1(x) \ldots \varepsilon_n(x)) = C(x)$ — форма Смита матрицы $A(x)$. Пусть $\Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1(x) \ldots \varphi_n(x))$ — форма Смита матрицы $B(x)$, $\det\Phi = \varphi(x)$. Рассмотрим определяющую матрицу, порожденную матрицей Φ, введенную П. С. Казимирским (см. [1, 2]):

$$W(\Phi) = \left\| \begin{matrix} \frac{\varphi}{(\varphi_1, \varepsilon_1)} & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{\varphi k_{21}}{(\varphi_2, \varepsilon_1)} & \frac{\varphi}{(\varphi_2, \varepsilon_2)} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varphi k_{n1}}{(\varphi_n, \varepsilon_1)} & \frac{\varphi k_{n2}}{(\varphi_n, \varepsilon_2)} & \ldots & \frac{\varphi}{(\varphi_n, \varepsilon_n)} \end{matrix} \right\|,$$

где $(\varphi_i, \varepsilon_j)$ — наибольший общий делитель многочленов $\varphi_i(x)$ и $\varepsilon_j(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$; $i \geqslant j$; если $(\varphi_i, \varepsilon_j)/\varphi_j = 1$, то $k_{ij} = 0$; если $(\varphi_i, \varepsilon_j)/\varphi_j \neq 1$, то $k_{ij} = k_{ij_0} + k_{ij_1}x + \ldots + k_{ij_{h_{ij}}}x^{h_{ij}}$, $h_{ij} = \deg\frac{(\varphi_i, \varepsilon_j)}{\varphi_j} - 1$, $i = 2, 3, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n-1$; $i > j$; k_{ij_s} — попарно различные переменные величины, которые присоединяются к полю $\mathbb{C}$, $s = 0, 1, \ldots, h_{ij}$.

Представим эту матрицу в виде произведения $W(\Phi) = \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi}{\varphi_1} \ldots \frac{\varphi}{\varphi_n}\right)V(\Phi)$, где

$$V(\Phi) = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ v_{21} & 1 & & & \\ \ldots & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{n,n-1} & 1 \end{matrix} \right\|,$$

$$v_{ij} = \frac{\varphi_i k_{ij}}{(\varphi_i, \varepsilon_j)}; \qquad i = 2, \ldots, n; \qquad j = 1, \ldots, n-1; \qquad i > j.$$

Введем следующие обозначения: $K(\Phi) = W(\Phi)P(x)x^r$, $K_{r-1}(\Phi) = W(\Phi) \times P(x)\|EEx \ldots Ex^{r-1}\|$, $R(\Phi) = V(\Phi)P(x)x^r$, $R_{r-1}(\Phi) = V(\Phi)P(x)\|EEx \ldots Ex^{r-1}\|$, $X = \|X_r \ldots X_1\|^{\mathrm{T}}$, где X_i — $(n \times n)$-матрицы.

Согласно теореме 1 из [1] выполнение равенства (1) эквивалентно тому, что

$$\operatorname{rang} M_{K_{r-1}(\Phi)}(\varphi) = nr. \tag{2}$$

Если коэффициенты матричного многочлена $B(x)$ не из $M_n(\mathbb{R})$, то рассмотрим любое другое разложение матрицы $A(x)$, где унитальный множитель, который выделяется, имеет форму Смита Φ: $A(x) = (Ex^r + B_1^0 x^{r-1} + \ldots$ $\ldots + B_r^0) D^0(x) = B^0(x) D^0(x)$. Согласно теореме 3 из [1] коэффициенты матричного многочлена находятся из уравнения

$$M_{K_{r-1}(\Phi)}(\varphi) X = M_{K(\Phi)}(\varphi). \tag{3}$$

Определение. *Под значением полиномиальной матрицы $R(\Phi)$ на системе корней элементов матрицы Φ будем подразумевать матрицу вида*

$$M_{R(\Phi)}(\Phi) = \left\| \begin{matrix} M_{r_{i_0}(x)}(\varphi_{i_0}) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ M_{r_n(x)}(\varphi_n) \end{matrix} \right\|,$$

где $\varphi_{i_0}(x)$ — первый отличный от единицы диагональный элемент матрицы Φ, $1 \leqslant i_0 \leqslant n$; $r_j(x)$ — j-я строка матрицы $R(\Phi)$, $j = i_0, i_0+1, \ldots, n$.

Аналогичным образом определим это понятие для матрицы $R_{r-1}(\Phi)$.

Утверждение. *Матричное уравнение* (3) *и*

$$M_{R_{r-1}(\Phi)}(\Phi) X = M_{R(\Phi)}(\Phi) \tag{4}$$

эквивалентны.

Для доказательства этого утверждения необходима следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $S(x)$ — произвольная $(m \times n)$-матрица над $\mathbb{C}[x]$; $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — произвольные многочлены из $\mathbb{C}[x]$ ненулевой степени, $S_{r-1}(x) = S(x) \| E Ex \ldots Ex^{r-1} \|$. Уравнения*

$$M_{S_{r-1}(x)\varphi(x)}(\varphi\psi) Y = M_{S(x)x^r\varphi(x)}(\varphi\psi), \tag{5}$$

$$M_{S_{r-1}(x)}(\psi) Y = M_{S(x)x^r}(\psi) \tag{6}$$

эквивалентны.

Доказательство. Представим многочлены $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в виде

$$\varphi(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \ldots (x-\alpha_s)^{k_s}, \quad \psi(x) = (x-\alpha_1)^{q_1} \ldots (x-\alpha_s)^{q_s} \eta(x),$$

$\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$, $(\varphi, \eta) = 1$. Используя метод доказательства утверждения 4 из [2, с. 29], имеем

$$M_{S(x)x^r\varphi(x)}(\varphi\psi) = F \cdot \left\| \begin{matrix} O_1 \\ M_{S(x)x^r}[\alpha_1^{(q_1)}] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ O_m \\ M_{S(x)x^r}[\alpha_m^{(q_m)}] \\ M_{S(x)x^r}(\eta) \end{matrix} \right\|,$$

$$M_{S_{r-1}(x)\varphi(x)}(\varphi\psi) = F \cdot \left\| \begin{matrix} \theta_1 \\ M_{S_{r-1}(x)}[\alpha_1^{(q_1)}] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \theta_m \\ M_{S_{r-1}(x)}[\alpha_m^{(q_m)}] \\ M_{S_{r-1}(x)}(\eta) \end{matrix} \right\|,$$

где F — неособенная блочно-диагональная матрица, O_j и θ_j — нулевые блоки соответственно размеров $mk_j \times n$ и $mk_j \times rn$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Умножая уравнение (5) слева на F^{-1} и вычеркивая нулевые блоки, получаем (6). Лемма 1 доказана.

Доказательство утверждения. Обозначим через $g_i(x)$ i-ю строку произведения матриц $V(\Phi)P(x)$, т. е.

$$V(\Phi)P(x) = \begin{Vmatrix} g_1(x) \\ \cdots \\ g_n(x) \end{Vmatrix}.$$

Перестановкой строк, что равносильно умножению слева на некоторую неособенную матрицу N, матрицу $M_{K(\Phi)}(\varphi)$ представим в

$$NM_{K(\Phi)}(\varphi) = \begin{Vmatrix} M_{g_1(x)x^r \frac{\varphi}{\varphi_1}}\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\cdot\varphi_1\right) \\ \cdots\cdots\cdots \\ M_{g_n(x)x^r \frac{\varphi}{\varphi_n}}\left(\frac{\varphi}{\varphi_n}\cdot\varphi_n\right) \end{Vmatrix}.$$

Аналогично

$$NM_{K_{r-1}(\Phi)}(\varphi) = \begin{Vmatrix} M_{g_{1.r-1}(x) \frac{\varphi}{\varphi_1}}\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\cdot\varphi_1\right) \\ \cdots\cdots\cdots \\ M_{g_{n.r-1}(x) \frac{\varphi}{\varphi_n}}\left(\frac{\varphi}{\varphi_n}\cdot\varphi_n\right) \end{Vmatrix},$$

где $g_{i.r-1}(x) = g_i(x)\,\| EEx \ldots Ex^{r-1} \|$. Умножая уравнение (3) слева на N и используя лемму 1, получаем (4). Утверждение доказано.

Замечание. Матрица $M_{R_{r-1}(\Phi)}(\Phi)$ квадратная порядка nr и равенство (2) эквивалентно тому, что $\det M_{R_{r-1}(\Phi)}(\Phi) \not\equiv 0$.

Лемма 2. *Пусть* D — $n \times n$-*матрица над* $\mathbb{C}$ *имеет вид* $D = \| a_1\bar{a}_1 \ldots$ $\ldots a_s\bar{a}_s L \|^{\mathrm{T}}$, *где* $a_j = \| a_{j1} + b_{j1}i \ldots a_{jn} + b_{jn}i \|$, $\bar{a}_j = \| a_{j1} - b_{j1}i \ldots a_{jn} - b_{jn}i \|$, *т. е.* a_j *и* $\bar{a}_j$ — *комплексно сопряженные строки*, $j = 1, 2, \ldots, s$; $a_{lp}, b_{lp} \in \mathbb{R}$; $l = 1, 2, \ldots, s$; $p = 1, 2, \ldots, n$; $0 \leqslant s \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$, L — *действительная подматрица. Тогда* $\det D = d \cdot i^s$, *где* $d \in \mathbb{R}$.

Доказательство. После элементарных преобразований над строками матрицы D получим

$$\det D = 2^s \cdot \begin{vmatrix} b_{11}i & \ldots & b_{1n}i \\ a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{s1}i & \ldots & b_{sn}i \\ a_{s1} & \ldots & a_{sn} \\ & L & \end{vmatrix} = i^s \cdot d,$$

где $d \in \mathbb{R}$. Лемма доказана.

Достаточность. Поскольку $\det M_{R_{r-1}(\Phi)}(\Phi) \not\equiv 0$ и является многочленом от многих переменных, то согласно теореме из [3, с. 110] в бесконечном поле $\mathbb{R}$ найдется хотя бы один набор действительных чисел, на котором значение этого многочлена будет ненулевым. Следовательно, матрицу $V(\Phi)$ можно выбрать из $M_n(R)$.

Так как в $\mathbb{R}[x]$ неразложимыми бывают лишь многочлены не выше второй степени, то

$$\varphi_i(x) = (x-\alpha_{i1})^{k_{i1}} \dots (x-\alpha_{is_i})^{k_{is_i}} (x-\bar{\alpha}_1)^{k_{i1}} \dots (x-\bar{\alpha}_{is_i})^{k_{is_i}} \eta_i(x),$$

$i = 1, 2, \dots, n$; α_{ij}, $\bar{\alpha}_{ij}$ — сопряженные комплексные числа, $\eta_i(x)$ — многочлен с действительными корнями. Известно также, что когда $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ и $\alpha \in \mathbb{C}$, то из равенства $f(\alpha) = a$ следует $f(\bar{\alpha}) = \bar{a}$. Учитывая это видим, что каждая комплексная строка, т. е. строка, в которой находятся многочлены не только из $\mathbb{R}[x]$, а из $\mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{R}[x]$, матриц $M_{R_{r-1}(\Phi)}(\Phi)$ и $M_{R(\Phi)}(\Phi)$ имеет комплексно сопряженную, причем номера комплексно сопряженных строк этих матриц совпадают. Используя лемму 2, получаем $\det M_{R_{r-1}(\Phi)}(\Phi) = i^t d$, где $d \in \mathbb{R}$.

Матрицу X из уравнения (4) будем искать с помощью формул Крамера. Для нахождения элемента x_{ij} матрицы X найдем частное $\det M_{R_{r-1}(\Phi)}(\Phi)_{(ij)} / \det M_{R_{r-1}(\Phi)}(\Phi)$, где $M_{R_{r-1}(\Phi)}(\Phi)_{(ij)}$ — матрица, полученная заменой i-го столбца матрицы $M_{R_{r-1}(\Phi)}(\Phi)$ на j-й столбец матрицы $M_{R(\Phi)}(\Phi)$. Очевидно, что при такой замене структура матрицы $M_{R_{r-1}(\Phi)}(\Phi)$ сохранится, т. е. строки, которые были сопряжены между собой, останутся сопряженными. Поэтому $\det M_{R_{r-1}(\Phi)}(\Phi)_{(ij)} = i^t d_{ij}$, где $d_{ij} \in \mathbb{R}$. Значит, $x_{ij} = d_{ij}/d \in \mathbb{R}$, следовательно, матрицы $X_i \in M_n(\mathbb{R})$ и $B^0(x)$ — действительный матричный многочлен. Теорема 1 доказана.

По обобщенной теореме Безу выделение из $A(x)$ левого унитального множителя $Ex - B$ эквивалентно тому, что матрица B есть корнем матричного уравнения

$$\hat{A}(X) = X^m A_0 + X^{m-1} A_1 + \dots + A_m = 0. \tag{7}$$

Отсюда, как следствие из теоремы 1, получаем такую теорему.

Теорема 2. *Для того чтобы матричное уравнение* (7) *имело действительное решение, необходимо и достаточно, чтобы существовало разложение* $A(x) = (Ex - B) D(x)$, *где* $B \in M_n(\mathbb{C})$, *такое, что форма Смита матрицы* $Ex - B$ *будет действительной.*

1. *Казимирский П. С.* Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена // Укр. мат. журн.— 1980.— 32, № 4.— С. 483—498.
2. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники.— К. : Наук. думка, 1981.— 224 с.
3. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра.— М. : Наука, 1976.— 648 с.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики
АН УССР, Львов

Получено 01.04.85