УДК 519.21

В. С. Королюк, А. В. Свищук, В. В. Королюк

Центральная предельная теорема в схеме фазового укрупнения для полумарковских случайных эволюций

В настоящей статье рассматривается центральная предельная теорема в схеме фазового укрупнения для полумарковских случайных эволюций (ПМСЭ) и ее применение к процессам переноса, накопления и переключаемым процессам. Используется метод асимптотического анализа уравнений марковского восстановления для усредненных ПМСЭ, основанный на теории обращения операторов, возмущенных на спектре [1]. Аналогичная задача изучена в [2] для ПМСЭ и в [4] для однородных процессов с независимыми приращениями с полумарковскими переключениями в случае одного эргодического класса, в [3] — для процессов с независимыми приращениями с полумарковскими переключениями — в схеме фазового укрупнения.

1. Определения и условия. На измеримом фазовом пространстве $(X, \mathfrak{X})$ со счетно-порожденной σ-алгеброй $\mathfrak{X}$ рассмотрим регулярный полумарковский процесс (ПМП) $\varkappa_\varepsilon(t)$, построенный по процессу марковского восстановления $\{x_n^\varepsilon;\ \theta_n;\ n \geqslant 0\}$ с полумарковским ядром $Q_\varepsilon(x, A, t)$, причем $P_\varepsilon\{x, A) = Q_\varepsilon(x, A, +\infty) = P(x, A) + \varepsilon B(x, A)$ — переходные вероятности вложенной цепи Маркова $\{x_n^\varepsilon;\ n \geqslant 0\}$, $G_x(t) = Q_\varepsilon(x, X, t)$ — распределение времен пребывания в состояниях $x \in X$, $A \in \mathfrak{X}$, $t \geqslant 0$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

На некотором сепарабельном банаховом пространстве B рассмотрим семейство $\{\Gamma_x^\varepsilon(t);\ x \in X,\ t \geqslant 0\}$ сильно непрерывных сжимающих полугрупп операторов и соответствующую этому семейству совокупность производящих операторов $\{\Gamma^\varepsilon(x);\ x \in X\}$, допускающих асимптотическое разложение вида $\Gamma^\varepsilon(x) f = \Gamma_1(x) f + \varepsilon \Gamma_2(x) f + o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, где $f \in B_0$ — плотная в B общая область определения замкнутых операторов $\Gamma_i(x)$, $i = 1, 2$, не зависящая от x; $B_0 \subset \mathrm{Dom}(\Gamma_1^2(x))$; $o(\varepsilon)$ понимается в сильном смысле.

Задано также семейство ограниченных операторов $\{D^\varepsilon(x);\ x \in X\}$ на B_0, допускающих асимптотическое разложение $D^\varepsilon(x) f = f + \varepsilon D_1(x) f + \varepsilon^2 D_2(x) f + o(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \to 0$, где $\{D_i(x);\ i = 1, 2;\ x \in X\}$ — совокупность замкнутых линейных операторов, $f \in B_0$.

ПМСЭ $V_\varepsilon^d(t)$ [2] задается по ПМП $\varkappa_\varepsilon(t/\varepsilon^2)$ семейством $\{\Gamma_x^\varepsilon(t);\ x \in X,\ t \geqslant 0\}$ и $\{D^\varepsilon(x);\ x \in X\}$ соотношением

$$V_\varepsilon^d(t) = \prod_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon^2)} \Gamma^\varepsilon_{x^\varepsilon_{k-1}}(\varepsilon\theta_k)\, D^\varepsilon(x_k^\varepsilon)\, \Gamma^\varepsilon_{x^\varepsilon_{\nu(t/\varepsilon^2)}}(t/\varepsilon - \varepsilon\tau_{\nu(t/\varepsilon^2)}), \quad \tau_n = \sum_{k=0}^{n} \theta_k,$$

$$\nu(t) = \max\{n\colon \tau_n \leqslant t\}. \tag{1}$$

Непрерывная ПМСЭ $V_\varepsilon^c(t)$ задается по ПМП $\varkappa_\varepsilon(t/\varepsilon^2)$ и семейству $\{\Gamma_x^\varepsilon(t);\ x \in X,\ t \geqslant 0\}$ соотношением

$$V_\varepsilon^c(t) = \prod_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon^2)} \Gamma^\varepsilon_{x^\varepsilon_{k-1}}(\varepsilon\theta_k)\, \Gamma^\varepsilon_{x^\varepsilon_{\nu(t/\varepsilon^2)}}(t/\varepsilon - \varepsilon\tau_{\nu(t/\varepsilon^2)}). \tag{2}$$

Пусть B — исходное сепарабельное банахово пространство с σ-алгеброй $\mathfrak{B}$ и нормой $\|\cdot\|_B$. Обозначим через $\tilde{B}_X$ пространство $\tilde{B}_X = \bigoplus_{x \in X} B$, а через $\tilde{B}_X^\infty$ — подпространство $\tilde{B}_X$: $\tilde{B}_X^\infty\ \{\tilde{f} = (f_x)_{x \in X} \in \tilde{B}_X;\ x \to f_x$ является $\mathfrak{X}/\mathfrak{B}$ — измеримым и $\sup_{x \in X} \|f_x\|_B < +\infty\}$; $\tilde{B}_X^\infty$ является банаховым пространством классов эквивалентных элементов с нормой $\|\tilde{f}\| = \sup_{x \in X} \|f_x\|_B$.

Если, например, X конечно, то $\tilde{B}_X$ содержит наборы $(f_1, \ldots, f_n)$, $f_i \in B$, $i = \overline{1, n}$. В общем случае, если $\tilde{f} \in \tilde{B}_X$, f_x обозначает проекцию $\tilde{f}$ на x-е координатное направление.

Предположим, что выполнены следующие условия.

A: Фазовое пространство X допускает эргодическую декомпозицию с функцией укрупнения $\hat{u}(x)$: $\hat{u}(\cdot): X \to U$: $\hat{u}(x) = u$, $x \in X_u$, $u \in U$, где $(U, \mathfrak{A})$ — измеримое пространство с σ-алгеброй $\mathfrak{A}$, содержащей одноточечные множества, причем

$$X = \bigcup_{u \in U} X_u, \quad X_u \bigcap X_{u'} = \varnothing, \quad u \neq u', \quad u, u' \in U; \quad \forall u \in U: X_u \in \mathfrak{X},$$

$$\forall T \in \mathfrak{A}: X_T = \bigcup_{u \in T} X_u \in \mathfrak{X}. \tag{3}$$

B: Переходные вероятности $\{P(x, A);\ x \in X,\ A \in \mathfrak{X}\}$ невозмущенной цепи Маркова $\{x_n^0;\ n \geqslant 0\}$ согласованы с расщеплением (3) пространства X:

$$P(x, X_u) = \begin{cases} 1, & x \in X_u, \\ 0, & x \overline{\in} X_u, \end{cases}$$

причем $\{x_n^0;\ n \geqslant 0\}$ равномерно эргодическая в каждом классе X_u со стационарным распределением $\rho_u(A)$, $A \in \mathfrak{X}$, $u \in U$, порождающим стационарный проектор Π:

$$\Pi f(x) = \int_{X_u} \rho_u(dx) f(x) \mathbf{1}_u(x),$$

где

$$\mathbf{1}_u(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_u, \\ 0, & x \overline{\in} X_u, \end{cases}$$

в отличие от $\mathbf{1}(x) \equiv 1$, $\forall x \in X$, а $f(x)$ — некоторая ограниченная функция на X.

C: Первый $m(x)$ и второй $m_2(x)$ моменты $G_x(t)$ равномерно ограничены по x.

D: ПМП $\varkappa_\varepsilon(t/\varepsilon^2)$ допускает укрупнение до однородного скачкообразного марковского процесса $\hat{\varkappa}(t)$ в фазовом пространстве $(U, \mathfrak{A})$ с инфинитезимальным оператором $\Pi B R_0 B \Pi$, где $R_0 = (I - P + \Pi)^{-1} - \Pi$ [1], B — оператор, порожденный ядром $B(x, A)$, $x \in X$, $A \in \mathfrak{X}$, а P — ядром $P(x, A)$. При этом $\Pi B \Pi = 0$.

2 О с н о в н ы е р е з у л ь т а т ы. Следующая теорема задает алгоритм построения центральной предельной теоремы в схеме фазового укрупнения для ПМСЭ (1).

Т е о р е м а. *Предположим, что выполнены условия* A—D *и условие баланса*

E: $\int_{X_u} \rho_u(dx) [m(x) \Gamma_1(x) + D_1(x)] f = 0, \quad \forall u \in U, \quad f \in B_0.$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^\infty e^{-\lambda t} M_x [V_\varepsilon^d(t) f_{\varkappa_\varepsilon(t/\varepsilon^2)}]\, dt = [\lambda I - m^{-1}(u) \hat{L}(u)]^{-1} \hat{f}(u), \quad x \in X_u,$$

где

$$\hat{L}(u) = \int_{X_u} \rho_u(dx) L(x), \qquad L(x) = C_1(x) R_0 C_1(x) + m(x) \Gamma_1(x) D_1(x) + D_2(x) +$$

$$+ \frac{1}{2} m_2(x) \Gamma_1^2(x) + m(x) \Gamma_2(x) + B R_0 C_1(x) + C_1(x) R_0 B 1(x) - B R_0 B 1(x),$$

$$C_1(x) = m(x) \Gamma_1(x) + D_1(x), \quad \hat{f}(u) = \int_{X_u} \rho_u(dx) m(x) f_x / m(u), \quad f_x \in B_0,$$

$$m(u) = \int_{X_u} \rho_u(dx) m(x).$$

В частности, из предыдущей теоремы получаем центральную предельную теорему для непрерывных ПМСЭ в схеме фазового укрупнения.

Следствие 1. *Предположим, что выполнены условия* A—D *и условие баланса*

$$\mathrm{E}_0\colon \int\limits_{X_u} \rho_u(dx)\, m(x)\, \Gamma_1(x)\, f = 0, \quad x \in X_u, \quad f \in B_0.$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} M_x [V_\varepsilon^c(t)\, f_{\varkappa_\varepsilon(t/\varepsilon^2)}]\, dt = [\lambda I - m^{-1}(u)\, \hat{L}^c(u)]^{-1} \hat{f}(u),$$

где

$$\hat{L}^c(u) = \int\limits_{X_u} \rho_u(dx)\, L^c(x), \quad L^c(x) = m(x)\, \Gamma_1(x)\, R_0 m(x)\, \Gamma_1(x) + \frac{1}{2} m_2(x)\, \Gamma_1^2(x) +$$

$$+ m(x)\, \Gamma_2(x) + BR_0 m(x)\, \Gamma_1(x) + m(x)\, \Gamma_1(x)\, R_0 B1(x) - BR_0 B1(x), \qquad \check{f} \in \check{B}_{0X}^\infty,$$

$$f_x \in B_0.$$

3. Приложения.

А. Процесс накопления задается уравнением

$$Z_t^\varepsilon = z_0 + \varepsilon \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon^2)} a(x_{k-1}^\varepsilon) - \int\limits_0^t r(Z_s^\varepsilon, \varkappa_\varepsilon(s/\varepsilon^2))\, ds, \tag{4}$$

где Z_t^ε — накопленный запас за время $[0, t]$; z_0 — начальный запас, $z_0 \in R_+$; функция $a(x)\colon X \to R_+$ измерима и ограничена; $r(z, x)\colon R_+ \times X \to R_+$ — ограничена и измерима по x, неубывающая по z и имеет непрерывную и ограниченную производную $r_z'(z, x)$ по z, $r(0, x) \equiv 0$, $\forall x \in X$.

Определим

$$\varphi_\varepsilon(t, x) = M_x [f_{\varkappa_\varepsilon(t/\varepsilon^2)}(Z_t^\varepsilon)],$$

где функция $f_x(z) \in C''(R_+)$, или $f(z) \in \bigoplus\limits_{x\in X} C''(R_+)$, т. е. $f_x(z)$ имеет по z непрерывную и ограниченную вторую производную, $\forall x \in X$.

Следствие 2. *Если выполнены условия* A — D *и условие баланса*

$$\mathrm{E}\colon \int\limits_{X_u} \rho_u(dx)\, m(x)\, r(z, x) = \int\limits_{X_u} \rho_u(dx)\, a(x), \quad \forall\, z \in R_+,$$

то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} \varphi_\varepsilon(t, x)\, dt = [\lambda I - m^{-1}(u)\, \hat{A}(u)]^{-1} \hat{f}_u(z),$$

где

$$\hat{A}(u) = \int\limits_{X_u} \rho_u(dx)\, A(x), \quad A(x) = C_1(z, x)\, R_0 \frac{\partial}{\partial z} C_1(z, x)\, \partial/\partial z -$$

$$- m(x)\, r(z, x)\, a(x)\, \partial^2/\partial z^2 + \frac{1}{2} a^2(x)\, \partial^2/\partial z^2 + \frac{1}{2} m_2(x)\, r(z, x)\, r_z'(z, x)\, \partial/\partial z +$$

$$+ \frac{1}{2} m_2(x)\, r^2(z, x)\, \partial^2/\partial z^2 + BR_0 C_1(z, x)\, \partial/\partial z + C_1(z, x)\, R_0 B1(x)\, \partial/\partial z -$$

$$- BR_0 B1(x), \quad C_1(z, x) = a(x) - m(x)\, r(z, x),$$

$$\hat{f}_u(z) = \int\limits_{X_u} \rho_u(dx)\, m(x)\, f_x(z)/m(u).$$

Следствие 2 вытекает из теоремы, если

$$\Gamma_1(x) = -r(z, x)\, \partial/\partial z, \; D_1(x) = a(x)\, \partial/\partial z, \; D_2(x) = \frac{1}{2} a^2(x)\, \partial^2/\partial z^2, \; \Gamma_2(x) = 0.$$

Б. Процесс переноса $Z^{\varepsilon}(t)$ в случайной среде задается скоростью $v(z, x)$, $z \in R$, $x \in X$, зависящей от состояния x ПМП $\varkappa\ (t/\varepsilon^2)$, переключающего скорость движения:

$$dZ^{\varepsilon}(t)/dt = v(Z^{\varepsilon}(t), \varkappa_{\varepsilon}(t/\varepsilon^2)),$$
$$Z^{\varepsilon}(0) = z. \tag{5}$$

Предполагается, что функция $v(z, x): R \times X \to R$ измерима и ограничена по x, имеет ограниченную и непрерывную производную $v'_z(z, x)$ по z, $\forall\, x \in X$.

Определим $\psi_{\varepsilon}(t, x) = M_x [f_{\varkappa_{\varepsilon}(t/\varepsilon^2)}(Z^{\varepsilon}(t))]$, где $\tilde{f}(z) \in \bigoplus_{x \in X} C''(R_+)$.

Следствие 3. *Если выполнены условия* A—D *и условие баланса*

$$E_0: \int\limits_{X_u} \rho_u(dx)\, m(x)\, v(z, x) = 0,$$

то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t} \psi_{\varepsilon}(t, x)\, dt = [\lambda I - m^{-1}(u)\, \hat{A}^c(u)]^{-1}\, \hat{f}_u(z),$$

где

$$\hat{A}^c(u) = \int\limits_{X_u} \rho_u(dx)\, A^c(x), \quad A^c(x) = m(x)\, v(z, x)\, R_0 m(x)\, \partial/\partial z\, (v(z, x)\, \partial/\partial z) +$$
$$+ \frac{1}{2} m_2(x)\, v(z, x)\, v'_z(z, x)\, \partial/\partial z + \frac{1}{2} m_2(x)\, v^2(z, x)\, \partial^2/\partial z^2 +$$
$$+ BR_0 m(x)\, v(z, x)\, \partial/\partial z + m(x)\, v(z, x)\, R_0 B 1(x)\, \partial/\partial z - BR_0 B 1(x).$$

Следствие 3 получаем из следствия 1, полагая $\Gamma_1(x) = v(z, x)\, \partial/\partial z$, $\Gamma_2(x) \equiv 0$.

Замечание 1. Процесс накопления (4) $Z^{\varepsilon}(t)$ слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ к диффузионному процессу $\hat{Z}_t$: $d\hat{Z}_t = \alpha(\hat{Z}_t, \hat{\varkappa}(t))\, dt + \beta(\hat{Z}_t, \hat{\varkappa}(t)) \times \times dw(t)$, где коэффициенты сноса $\alpha(z, u)$ и диффузии $\beta(z, u)$ задаются соотношениями

$$\alpha(z, u) = \int\limits_{X_u} \rho_u(dx)\, [m(x)\, r(z, u)\, R_0 m(x)\, r'_z(z, u) - a(x)\, R_0 m(x)\, r'_z(z, x) +$$
$$+ \frac{1}{2} m_2(x)\, r(z, x)\, r'_z(z, x) + BR_0(a(x) - m(x)\, r(z, x)) +$$
$$+ (a(x) - m(x)\, r(z, x))\, R_0 B 1(x)]/m(u),$$

$$\beta^2(z, u) = 2 \int\limits_{X_u} \rho_u(dx) \Big[(a(x) - m(x)\, r(z, x))\, R_0 (a(x) - m(x)\, r(z, x)) -$$
$$- m(x)\, r(z, x)\, a(x) + \frac{1}{2} a^2(x) + \frac{1}{2} m_2(x)\, r^2(z, x) \Big] / m(u),$$

а $\varkappa(t)$ — марковский процесс с инфинитезимальным оператором $\Pi B R_0 B \Pi$ и фазовым пространством $(U, \mathfrak{A})$.

Замечание 2. Процесс переноса $Z^{\varepsilon}(t)$ в (5) слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ к диффузионному процессу $\hat{Z}(t)$:

$$d\hat{Z}(t) = \alpha_0(\hat{Z}(t), \hat{\varkappa}(t))\, dt + \beta_0(\hat{Z}(t), \hat{\varkappa}(t))\, dw(t),$$

где

$$\alpha_0(z, u) = \int\limits_{X_u} \rho_u(dx) \Big[m(x)\, v(z, x)\, R_0 m(x)\, v'_z(z, x) + \frac{1}{2} m_2(x)\, v(z, x) +$$

$$+ v'_z(z, x) + BR_0 m(x) v(z, x) + m(x) v(z, x) R_0 B1(x)\Big]/m(u),$$

$$\beta_0^2(z, u) = 2\int_{X_u} \rho_u(dx)\left[m(x) v(z, x) R_0 m(x) v(z, x) + \frac{1}{2} m_2(x) v^2(z, x)\right]/m(u).$$

В. Пусть $\eta(t, x)$, $x \in X$,— семейство однородных процессов с независимыми приращениями, независимых в совокупности при любом конечном наборе $x \in X : \Gamma_x(t) = M \exp(iz\eta(t, x)) = \exp(t\psi(x, z))$, где $\psi(x, z)$ — кумулянты процессов, $D(x) \equiv I$, $\forall x \in X$.

Тогда случайная эволюция (1) задает условную характеристическую функцию переключаемого процесса

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\nu(t)} \eta(\theta_k, \varkappa_{k-1}) + \eta(t - \tau_{\nu(t)}, \varkappa_{\nu(t)}), \tag{6}$$

т. е. $V^c(t) = M\{\exp(iz\eta(t))/\varkappa(s),\ 0 \leqslant s \leqslant t\}$. Переключаемый процесс (6) в схеме серий определим в виде $\alpha_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon}[\eta(t/\varepsilon) - \Lambda(\varkappa_\varepsilon(t/\varepsilon^2))]$. Параметр $\Lambda(x)$ определяется из условия баланса (7).

В схеме серий производящие операторы $\Gamma_\varepsilon(x)$ имеют вид $\Gamma_\varepsilon(x) = \psi(z\sqrt{\varepsilon}, x) - iz\sqrt{\varepsilon}\Lambda(x)$. Предполагается существование двух первых семиинвариантов процессов $\eta(t, x)$, $x \in X$, т. е. $\psi(z, x) = iz\psi_1(x) - z^2\psi_2(x)/2 + o(z^2)$. Тогда $\Gamma_1(x) = iz(\psi_1(x) - \Lambda(x))$; $\Gamma_2(x) = -z^2\psi_2(x)/2$.

Условие баланса принимает вид

$$\int_{X_u} \rho_u(dx)\, m(x)\, \psi_1(x)/m(u) = \widehat{\Lambda}(u), \tag{7}$$

где

$$\widehat{\Lambda}(u) = \int_{X_u} \rho_u(dx)\, \Lambda(x)/m(u).$$

Следствие 1 позволяет заключить, что процесс уклонений $\alpha_\varepsilon(t)$ слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ к стохастическому интегралу Ито $\alpha_0(t) = \int_0^t \sigma(\widehat{\varkappa}(s))\, dw(s)$, где $\sigma^2(u) = 2\int_{X_u} \rho_u(dx)[m(x)(\psi_1(x) - \Lambda(x)) R_0 m(x)(\psi_1(x) - \Lambda(x)) + m(x) \times \psi_2(x) + m_2(x)(\psi_1(x) - \Lambda(x))^2]/m(\widehat{u})$, $\varkappa(s)$— укрупненный марковский процесс.

4. Доказательство основной теоремы. Для преобразований Лапласа от усредненной ПМСЭ

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon(\lambda, x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} M_x[V_\varepsilon^d(t) f_{\varkappa_\varepsilon(t|\varepsilon^2)}]\, dt$$

строим уравнение марковского восстановления

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon(\lambda, x) - \int_X \int_0^\infty e^{-\lambda\varepsilon^2 s}\Gamma_x^\varepsilon(\varepsilon s)\, D^\varepsilon(y)\, \tilde{\varphi}_\varepsilon(\lambda, y)\, Q_\varepsilon(x, dy, ds) =$$

$$= \varepsilon^2 \int_0^\infty e^{-\lambda\varepsilon^2 s}\overline{G}_x(s)\, \Gamma_x^\varepsilon(\varepsilon s) f_x ds, \quad f_x \in B_0. \tag{8}$$

Далее находим асимптотическое представление уравнения (8):

$$\Big[I - P - \varepsilon(m(x)\Gamma_1(x) P + PD_1(x) - B) + \varepsilon^2\Big(\lambda m(x) P - m(x)\Gamma_1(x) PD_1(x) -$$

$$- PD_2(x) - \frac{1}{2} m_2(x)\Gamma_1^2(x) P - m(x)\Gamma_2(x) P\Big) + o(\varepsilon^2)\Big]\tilde{\varphi}_\varepsilon(\lambda, x) =$$

$$= \varepsilon^2[m(x) I + m_\varepsilon^{(1)}(\lambda)] f_x, \tag{9}$$

где

$$m_\varepsilon^1(\lambda) f_x = \int_0^\infty (e^{-\lambda\varepsilon^2 s} - 1) \overline{G}_x(s) \Gamma_x^\varepsilon(\varepsilon s) f_x ds +$$

$$+ \int_0^\infty \overline{G}_x(s) [\Gamma_x^\varepsilon(\varepsilon s) - I] f_x ds, \quad f_x \in B_0.$$

Применяя метод асимптотического обращения операторов, возмущенных на спектре [1, с. 76], и учитывая то, что $\Pi B \Pi + \int_{X_u} \rho_u(dx) [m(x)\Gamma_1(x) + D_1(x)] = 0$, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \Big[I - P - \varepsilon(m(x)\Gamma_1(x) P + PD_1(x) - B) +$$

$$+ \varepsilon^2 (\lambda m(x) P - m(x)\Gamma_1(x) PD_1(x) - PD_2(x) - \frac{1}{2} m_2(x) \Gamma_1^2(x) P -$$

$$- m(x)\Gamma_2(x) P + o(\varepsilon^2) \Big]^{-1} = R_\lambda^{-1}(u)\Pi, \qquad (10)$$

где

$$R_\lambda(u) = -\int_{X_u} \rho_u(dx) [m(x)\Gamma_1(x) + PD_1(x)] R_0 [m(x)\Gamma_1(x) + PD_1(x)] +$$

$$+ \lambda m(u) - \int_{X_u} \rho_u(dx) m(x) \Gamma_1(x) PD_1(x) - \int_{X_u} \rho_u(dx) D_2(x) -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{X_u} \rho_u(dx) m_2(x) \Gamma_1^2(x) - \int_{X_u} \rho_u(dx) m(x) \Gamma_2(x) + \Pi B R_0 (m(x)\Gamma_1(x) P +$$

$$+ PD_1(x) + \pi(m(x)\Gamma_1(x) P + PD_1(x)) R_0 B 1(x) - \Pi B R_0 B 1(x).$$

Из (9) и (10) следует доказательство теоремы.

1. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем.— Киев : Наук. думка, 1978.— 218 с.
2. *Королюк В. С., Свищук А.В.* Центральная предельная теорема для полумарковских случайных эволюций // Укр. мат. журн.— 1986.— 38, № 3.— С. 300—304.
3. *Королюк В. В.* Центральная предельная теорема для переключаемых процессов // Тр. IV Междунар. Вильнюс. конф. по теории вероятностей и мат. статистике : Тез. докл. (Вильнюс, 1985).— Вильнюс : Ин-т математики и кибернетики АН ЛитССР, 1985.— Т. 2.— С. 60—61.
4. *Королюк В. С., Королюк В. В.* Центральная предельная теорема для однородных процессов с независимыми приращениями с полумарковскими переключениями // Укр. мат. журн.— 1983.— 35, № 6.— С. 760—763.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 02.10.86