УДК 519.29

Т. В. Каратаева

Гомеоморфизм мультипликативных и аддитивных полугрупп без условий непрерывности

В настоящей работе продолжаются исследования, начатые в работах [1—5], и используются принятые в [4, 5] обозначения и определения. Однако в отличие от указанных работ мы не предполагаем традиционных условий непрерывности у рассматриваемых систем, но считаем выполненным более слабое условие регулярности.

Определение 1. *Будем говорить, что последовательность* $y_s^t(n)$ *элементов из* $\mathfrak{N}[0, T]$ *сходится к* $y_s^t \in \mathfrak{N}[0, T]$ *по вариации, если* $\underset{[0,T]}{\mathrm{Var}} |y(n) - y| = \sup\limits_{\Delta[0,T]} \Sigma |y_{t_{k-1}}^{t_k}(n) - y_{t_{k-1}}^{t_k}| \to 0,\ n \to \infty$.

Аналогично последовательность $(l)\,x_s^t(n)$ *элементов из* $(l)\,\mathfrak{M}[0, T]$ *сходится к* $(l)\,x_s^t \in (l)\,\mathfrak{M}[0, T]$ *по вариации, если* $\underset{[0,T]}{\mathrm{Var}} |(l)\,x(n) - (l)\,x| = \sup\limits_{\Delta[0,T]} \Sigma |(l)\,x_{t_{k-1}}^{t_k}(n) - (l)\,x_{t_{k-1}}^{t_k}| \to 0,\ n \to \infty$.

В работе [4] показано, что отображение множества $(l)\,\mathfrak{M}[0, T]$ всех левых m-полугрупп на множество $\mathfrak{N}[0, T]$ a-полугрупп, которое задается по формулам (7), (8) в [4], является взаимно однозначным.

Ниже мы покажем, что отображение D будет также взаимно непрерывным в смысле сходимости по вариации.

Теорема 1. I. *Если последовательность* $(l)\,x_s^t(n)$, $n = \overline{1, \infty}$, *левых m-полугрупп сходится к некоторой левой m-полугруппе* $(l)\,x_s^t$ *по вариации, то последовательность их инфинитезимальных a-полугрупп* $D((l)\,x(n))_s^t = y_s^t(n)$ *также сходится к соответствующей инфинитезимальной a-полугруппе* $D(x)_s^t = y_s^t$ *по вариации.*

II. *Если последовательность* $y_s^t(n)$, $n = \overline{1, \infty}$, *a-полугрупп сходится по вариации к некоторой a-полугруппе* y_s^t, *то последовательность им соответствующих первообразных левых m-полугрупп* $D_l^{-1}(y(n))_s^t = (l)\,x_s^t(n)$ *сходится по вариации к первообразной левой m-полугруппе* $D_l^{-1}(y)_s^t = (l)\,x_s^t$.

Доказательство. I. Обозначим

$$\Delta_N[s, t] = \{s = t_0^N \leqslant t_1^N \leqslant \ldots \leqslant t_{m_N}^N = t\}, \quad \Delta_{M_k}[t_{k-1}, t_k] = \{t_{k-1}^N = s_0^k \leqslant$$

$$\leqslant s_1^k \leqslant \ldots \leqslant s_{M_k}^k = t_k^N\}, \quad \delta_{M_k} = \max_{1 \leqslant i \leqslant M_k} (s_i^k - s_{i-1}^k), \quad \delta_N = \max_{1 \leqslant k \leqslant m_N} \delta_{M_k}.$$

Тогда в силу формул (7), (8) из [4] и леммы Фату справедливо соотношение

$$\sum_{k=1}^{m_N} | y_{t_{k-1}^N}^{t_k^N}(n) - y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} | = \sum_{k=1}^{m_N} | \lim_{\delta_{M_k}\to 0} \sum_{i=1}^{M_k} ((l)\, x_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}(n) - E) -$$

$$- \lim_{\delta_{M_k}\to 0} \sum_{i=1}^{M_k} ((l)\, x_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} - E) | = \sum_{k=1}^{m_N} | \lim_{\delta_{M_k}\to 0} \sum_{i=1}^{M_k} ((l)\, x_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}(n) - (l)\, x_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}) | \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim} \sum_{k=1}^{m_N} \sum_{i=1}^{M_k} | (l)\, x_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}(n) - (l)\, x_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} | \leqslant \operatorname*{Var}_{[0,T]} | (l)\, x(n) - (l)\, x | \to 0, \quad n\to\infty,$$

по условию теоремы. Это и доказывает первую часть теоремы.

II. Воспользовавшись формулами (7), (8) из [4] и леммой Фату, запишем соотношение

$$\sum_{k=1}^{m_N} | (l)\, x_{t_{k-1}}^{t_k}(n) - (l)\, x_{t_{k-1}}^{t_k} | = \sum_{k=1}^{m_N} \Big| \lim_{\delta_{M_k}\to 0} \prod_{i=1}^{M_k} (y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}(n) + E) -$$

$$- \lim_{\delta_{M_k}\to 0} \prod_{i=1}^{M_k} (y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} + E) \Big| = \sum_{k=1}^{m_N} \lim_{\delta_{M_k}\to 0} \Big| \sum_{i=1}^{M_k} \overrightarrow{\prod_{j=1}^{i-1}} (y_{s_{j-1}^k}^{s_j^k}(n) + E) (y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}(n) -$$

$$- y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}) \overrightarrow{\prod_{j=i+1}^{M_k}} (y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} + E) \leqslant \lim_{\delta_N\to 0} \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{M_k} \Big| \overrightarrow{\prod_{j=1}^{i-1}} (y_{s_{j-1}^k}^{s_j^k}(n) + E) \Big| | y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}(n) -$$

$$- y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} | \Big| \overrightarrow{\prod_{j=i+1}^{M_k}} (y_{s_{j-1}^k}^{s_j^k} + E) \Big| \leqslant \overline{\lim_{\delta_N\to 0}} \Big\{ \Big(\sup_k \sup_i \overrightarrow{\prod_{j=1}^{i-1}} | y_{s_{j-1}^k}^{s_j^k}(n) + E | \Big) \times$$

$$\times \Big(\sup_k \sup_i \overrightarrow{\prod_{j=i+1}^{M_k}} | y_{s_{j-1}^k}^{s_j^k} + E | \Big) \Big(\sum_{k=1}^{m_N} \sum_{i=1}^{M_k} | y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}(n) - y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} | \Big) \Big\}. \qquad (1)$$

Оценим в последнем выражении каждый сомножитель в отдельности. Для первого имеем

$$\sup_k \sup_i \overrightarrow{\prod_{j=1}^{i-1}} | y_{s_{j-1}^k}^{s_j^k}(n) + E | \leqslant \sup_k \sup_i \prod_{j=1}^{i-1} (| y_{s_{i-1}^k}^{s_j^k}(n) - y_{s_{j-1}^k}^{s_j^k} | + | y_{s_{j-1}^k}^{s_j^k} | + 1) \leqslant$$

$$\leqslant \exp \Big\{ \sup_k \sup_i \sum_{j=1}^{i-1} (| y_{s_{j-1}^k}^{s_j^k}(n) - y_{s_{j-1}^k}^{s_j^k} | + | y_{s_{j-1}^k}^{s_j^k} |) \Big\} < \infty$$

в силу условий теоремы и определения a-полугрупп [4].

Аналогично можно показать, что второй сомножитель также ограничен. Тогда правая часть (1) не превышает величину $C(s,t) \sum_{k=1}^{m_N} \sum_{i=1}^{M_k} | y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}(n) - y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} | \leqslant C(s,t) \operatorname*{Var}_{[0,T]} | y(n) - y |$, где $C(s,t)$ — некоторая константа, и в силу условий теоремы стремится к нулю при $n\to\infty$.

Следовательно, последовательность левых m-полугрупп сходится по вариации к левой m-полугруппе.

Замечание 1. Теорема 1 остается справедливой, если вместо левых m-полугрупп рассматривать правые m-полугруппы.

Следствие 1. *Соответствие между множеством $(l)\,\mathfrak{M}[0,T]$ всех левых* ***m*-полугрупп** *и множеством $(r)\,\mathfrak{M}[0,T]$ всех правых m-полугрупп,* *имеющих общую инфинитезимальную полугруппу, задаваемое формулами в* [5], *взаимно непрерывно.*

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из теоремы 1 и результатов [5].

Определение 2. *Будем говорить, что m-(a-) полугруппа разрывна справа, если $Z_t^{t+0} \neq E$ ($Z_t^{t+0} \neq 0$). Аналогично определяется разрывность слева.*

Теорема 2. *Пусть заданы две a-полугруппы y_s^t и v_s^t из $\mathfrak{R}[0, T]$ и y_s^t и v_s^t не имеют общих точек разрыва, в которых одна из a-полугрупп разрывна справа, а другая — слева. Тогда существуют пределы*

$$\begin{aligned} D_l^{-1}(y+v)_s^t &= \lim_{\delta_N \to 0} \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_N}} \left(x_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} + u_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} - E\right), \\ D_r^{-1}(y+v)_s^t &= \lim_{\delta_N \to 0} \overleftarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} \left(x_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} + u_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} - E\right) \end{aligned} \tag{2}$$

и индексы l и r у x_s^t и u_s^t можно расставлять в правых частях этих формул произвольным образом.

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу условия теоремы семейство $y_s^t + v_s^t$ будет a-полугруппой. Докажем первую из формул (2), где в качестве x_s^t возьмем для определенности правую m-полугруппу $(r)\,x_s^t$, а в качестве u_s^t, — левую m-полугруппу $(l)\,u_s^t$, так как остальные формулы в (4) доказываются аналогично. Для этого вначале покажем, что справедливы следующие равенства:

$$D_l^{-1}(y+v)_s^t = \lim_{\delta_N \to 0} \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_N}} \left((r)\,x_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} + v_{t_{k-1}^N}^{t_k^N}\right) = \lim_{\delta_N \to 0} \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_N}} \left((r)\,x_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} + (l)\,u_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} - E\right). \tag{3}$$

Для доказательства первого из них оценим норму разности

$$\begin{aligned} &\left|\overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_N}} \left(y_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} + v_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} - E\right) - \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_N}} \left((r)\,x_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} + v_{t_{k-1}^N}^{t_k^N}\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{m_N} \left|\overrightarrow{\prod_{i=1}^{k-1}} \left(y_{t_{i-1}^N}^{t_i^N} + \right.\right. \\ &\left.\left. + v_{t_{i-1}^N}^{t_i^N} + E\right)\right| \left| y_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} - (r)\,x_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} + E \right| \left| \overrightarrow{\prod_{i=k+1}^{m_N}} \left((r)\,x_{t_{i-1}^N}^{t_i^N} + v_{t_{i-1}^N}^{t_i^N}\right)\right| \leqslant \\ &\leqslant \sup_k \left(\exp\left\{\sum_{i=1}^{k-1} \left|y_{t_{i-1}^N}^{t_i^N}\right| + \sum_{i=1}^{k-1} \left|v_{t_{i-1}^N}^{t_i^N}\right|\right\} \sup_k \left(\exp\left\{\sum_{i=k+1}^{m_N} \left|(r)\,x_{t_{i-1}^N}^{t_i^N} - E\right| + \right.\right.\right. \\ &\left.\left.\left. + \sum_{i=k+1}^{m_N} \left|v_{t_{i-1}^N}^{t_i^N}\right|\right\}\right) \sum_{k=1}^{m_N} \left|y_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} - (r)\,x_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} + E\right|. \end{aligned}$$

Отметим, что первые два сомножителя в последнем выражении ограничены в силу условия ограниченности вариации для m- и a- полугрупп, а третий сомножитель, аналогично работе [4], стремится к нулю при $N \to \infty$. Следовательно, первое из равенств (3) справедливо. Докажем второе из них. Для этого рассмотрим соотношение

$$\left|\overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_N}} \left((r)\,x_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} + v_{t_{i-1}^N}^{t_k^N}\right) - \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_N}} \left((r)\,x_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} + (l)\,u_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} - E\right)\right| =$$

$$= \Big| \sum_{k=1}^{m_N} \overrightarrow{\prod_{i=1}^{k-1}} ((r)\, x_{t_{i-1}^N}^{t_i^N} + v_{t_{i-1}^N}^{t_i^N})(v_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} - (l)\, u_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} + E) \overrightarrow{\prod_{i=k+1}^{m_N}} ((r)\, x_{t_{i-1}^N}^{t_i^N} +$$

$$+ (l)\, u_{t_{i-1}^N}^{t_i^N} - E) \Big| \leqslant \sup_k \Big| \overrightarrow{\prod_{i=1}^{k-1}} ((r)\, x_{t_{i-1}^N}^{t_i^N} + v_{t_{i-1}^N}^{t_i^N}) \Big| \sup_k \Big| \overrightarrow{\prod_{i=k+1}^{m_N}} ((r)\, x_{t_{i-1}^N}^{t_i^N} +$$

$$+ (l)\, u_{t_{i-1}^N}^{t_i^N} - E) \Big| \sum_{k=1}^{m_N} | v_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} - (l)\, u_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} + E | \leqslant \sup_k \Big(\exp \Big\{ \sum_{i=1}^{k-1} | (r)\, x_{t_{i-1}^N}^{t_i^N} - E | +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k-1} | v_{t_{i-1}^N}^{t_i^N} | \Big\} \sup_k \Big(\exp \Big\{ \sum_{i=k+1}^{m_N} | (r)\, x_{t_{i-1}^N}^{t_i^N} - E | + \sum_{i=k+1}^{m_N} | (l)\, u_{t_{i-1}^N}^{t_i^N} - E | \Big\} \Big) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{m_N} | v_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} - (l)\, u_{t_{k-1}^N}^{t_k^N} + E |,$$

из которого второе из равенств (3) вытекает аналогично предыдущему.

Замечание 2. Если y_s^t и v_s^t имеют общую точку разрыва $\tau \in [0, T]$, в которой одна из полугрупп разрывна справа, а другая слева, то $v_s^t + y_s^t$ в точке τ уже не будет удовлетворять условию (6) в определении a-полугруппы в работе [4].

Пусть $x_s^t(n)$ — n произвольных (правых или левых, или тех и других m-полугрупп, любые две из которых удовлетворяют условию теоремы 2. Обозначим

$$\begin{gathered}
\lim_{\delta_N \to 0} \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_N}} (x_{t_{k-1}^N}^{t_k^N}(1) + x_{t_{k-1}^N}^{t_k^N}(2) + \ldots + x_{t_{k-1}^N}^{t_k^N}(n) - (n-1)\, E) = \overrightarrow{\underset{k=1}{\overset{n}{\Box}}}\, x(k), \\
\lim_{\delta_N \to 0} \overleftarrow{\prod_{k=1}^{m_N}} (x_{t_{k-1}^N}^{t_k^N}(1) + x_{t_{k-1}^N}^{t_k^N}(2) + \ldots + x_{t_{k-1}^N}^{t_k^N}(n) - (n-1)\, E) = \overleftarrow{\underset{k=1}{\overset{n}{\Box}}}\, x(k),
\end{gathered} \tag{4}$$

если указанные пределы существуют и не зависят от последовательности разбиений $\{\Delta_N [0, T]\}$ отрезка $[s, t] \in [0, T]$.

Следствие 2. *Пределы в формулах* (4) *всегда существуют и операция* $\overrightarrow{\Box}$ ($\overleftarrow{\Box}$) *коммутативна и ассоциативна.*

Следовательно, в формулах (4) можно дополнительно расставлять произвольным образом скобки, и от этого величина входящих в них выражений не изменится.

Следствие 3. *Множество* $(l)\, \mathfrak{M}^+ [0, T]$ *всех левых m-полугрупп, непрерывных справа на* $[0, T]$, *образует топологическую группу относительно операции* $\overrightarrow{\Box}$ *в топологии, задаваемой сходимостью по вариации. Аналогичные утверждения справедливы относительно* $(r)\, \mathfrak{M}^+[0, T]$ *(всех правых непрерывных справа),* $(l)\, \mathfrak{M}^- [0, T]$ *(всех левых непрерывных слева) и* $(r)\, \mathfrak{M}^- [0, T]$ *(всех правых непрерывных слева) m-полугрупп.*

Замечание 3. Из условия

$$\sup_{\Delta[s,t]} \Sigma\, | x_{t_{k-1}}^{t_k} - E | < \infty \tag{5}$$

вытекает соотношение

$$\sup_{\Delta[s,t]} \Sigma\, | x_0^{t_k} - x_0^{t_{k-1}} | < \infty. \tag{6}$$

Это непосредственно следует из неравенства

$$\sup_{\Delta[s,t]} \Sigma\, | x_0^{t_k} - x_0^{t_{k-1}} | \leqslant \sup_k | x_0^{t_{k-1}} | \sup_{\Delta[s,t]} \Sigma\, | x_{t_{k-1}}^{t_k} - E |.$$

Обратное утверждение, как показывает следующий пример, в общем случае не верно.

Пример 1. Зафиксируем точку τ на $[0, T]$ и зададим полугруппу x_s^t следующим образом: $x_s^t = 1$ при $0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$, $x_s^t = 0$ при $0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$, $x_s^t = \exp\left\{\sin\frac{1}{t-\tau} - \sin\frac{1}{t-s}\right\}$ при $\tau < s \leqslant t \leqslant T$. Легко видеть, что в этом случае условие (6) выполняется, а условие (5) — нет.

Однако при некоторых дополнительных ограничениях условие (6) влечет условие (5) и, таким образом, они эквивалентны. Докажем вначале следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть семейство x_s^t, удовлетворяющее условию*

$$x_s^\tau x_\tau^t = x_s^t \tag{7}$$

(*см.* (1) *в* [4]), *имеет пределы $x_\tau^{\tau+0}$ и $x_{\tau-0}^\tau$ в каждой точке $\tau \in [0, T]$ и $|x_{\tau-0}^\tau - E| < 1$, $|x_\tau^{\tau+0} - E| < 1$, $|x_{\tau-0}^{\tau+0} - E| < 1$. Тогда существует $(x_s^t)^{-1}$ и функция $|(x_s^t)^{-1}|$ ограничена на интервале* $[0, T]$.

Доказательство. Предположим вначале, что $s = 0$. Если теперь при каком-нибудь $t \in [0, T]$ выражение $(x_0^t)^{-1}$ не определено, то из условия (7) вытекает, что не определено либо $(x_0^{t/2})^{-1}$, либо $(x_{t/2}^t)^{-1}$ и т. д. Продолжая этот процесс, находим последовательность $x_{s_k}^{t_k}$, $0 \leqslant s_k \leqslant t_k \leqslant t \leqslant T$, для которой существует точка $\tau \in [0, T]$ такая, что s_k, $t_k \to \tau$ при $k \to \infty$, но $(x_{s_k}^{t_k})^{-1}$ не определено. Здесь возможны три случая: $s_k \uparrow \tau \downarrow t_k$, $\tau \downarrow s_k < t_k \downarrow \tau$, $\tau \uparrow s_k < t_k \uparrow \tau$.

Первый из них противоречит условию леммы. Во втором в силу условия леммы $x_\tau^{t_k} \to x_\tau^{\tau+0}$, $x_\tau^{s_k} \to x_\tau^{\tau+0}$ при $k \to \infty$ и, следовательно, $|x_\tau^{s_k} - E| < 1 - \varepsilon$, $|x_\tau^{t_k} - E| < 1 - \varepsilon$ для некоторого положительного $\varepsilon < 1$, поэтому определены $(x_\tau^{s_k})^{-1}$, $(x_\tau^{t_k})^{-1}$, $x_\tau^{s_k}(x_{s_k}^{t_k} - E) = x_\tau^{t_k} - x_\tau^{s_k} \to 0$, $k \to \infty$.

Но $|(x_\tau^{s_k})^{-1}| \leqslant |(x_\tau^{s_k})^{-1} - E| + 1 \leqslant |(x_\tau^{s_k})^{-1}|$, отсюда

$$|(x_\tau^{s_k})^{-1}| \leqslant \frac{1}{1 - |x_\tau^{s_k} - E|} < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Поэтому $|x_{s_k}^{t_k} - E| \leqslant |(x_\tau^{s_k})^{-1}| \, |x_\tau^{t_k} - x_\tau^{s_k}| \leqslant \frac{1}{\varepsilon} |x_\tau^{t_k} - x_\tau^{s_k}| \to 0$, $k \to \infty$, и, следовательно, $(x_{s_k}^{t_k})^{-1}$ определено вопреки предположению. Третий случай $s_k < t_k < \tau$ рассматривается аналогично.

Покажем теперь, что функция $|(x_0^t)^{-1}|$ ограничена на $[0, T]$. Для этого, предположив противное, найдем последовательность $\{t_k\} \in [0, T]$, сходящуюся к некоторой точке $\tau \in [0, T]$, такую, что $|(x_0^{t_k})^{-1}| \to \infty$, $k \to \infty$. Без ограничения общности можем считать, что либо $t_k \downarrow \tau$, либо $t_k \uparrow \tau$. Рассмотрим для определенности первый случай. Тогда аналогично предыдущему для больших k $|(x_0^{t_k})^{-1}| = |(x_\tau^{t_k})^{-1} (x_0^\tau)^{-1}| \leqslant |(x_\tau^{t_k})^{-1}| \, |(x_0^\tau)^{-1}| \leqslant \frac{1}{\varepsilon} |(x_0^\tau)^{-1}| < \infty$, что противоречит первоначальному предположению.

Переходя к общему случаю, отметим, что первое утверждение леммы вытекает из равенства $(x_s^t)^{-1} = (x_0^t)^{-1} x_0^s$ и доказанного выше частного случая. Из этого же равенства будет следовать и второе утверждение леммы, если мы докажем, что функция $|x_0^s|$ ограничена на $[0, T]$. Предположив противное, найдем такую точку $\tau \in [0, T]$ и последовательность точек $s_k \to \tau$ при $k \to \infty$, $s_k \in [0, T]$, что $|x_0^{s_k}| \to \infty$ при $k \to \infty$. Всегда можно считать, что либо $s_k \downarrow \tau$, либо $s_k \uparrow \tau$. В первом случае противоречие вытекает из неравенства $|x_0^{s_k}| \leqslant |x_0^\tau| \, |x_\tau^{s_k}|$, во втором — из неравенства $|x_0^{s_k}| \leqslant |x_0^\tau| \times |(x_{s_k}^\tau)^{-1}|$.

Следствие 4. *Если у семейства* x_s^t *со свойством* (7) *в каждой точке* $\tau\in[0,T]$ *выполняются условия* $|x_\tau^{\tau+0}-E|<\sqrt{2}-1$ *и* $|x_{\tau-0}^\tau-E|<\sqrt{2}-1$, *то величина* $(x_0^\tau)^{-1}$ *определена и функция* $|(x_0^\tau)^{-1}|$ *ограничена на* $[0,T]$.

Доказательство вытекает из следующего неравенства:

$$|x_{\tau-0}^{\tau+0}-E|\leqslant|x_{\tau-0}^\tau||x_\tau^{\tau+0}-E|+|x_{\tau-0}^\tau-E|\leqslant$$
$$\leqslant|x_{\tau-0}^\tau-E||x_\tau^{\tau+0}-E|+|x_\tau^{\tau+0}-E|+|x_{\tau-0}^\tau-E|<1$$

и леммы 1.

Следствие 5. *Если семейство* x_s^t *со свойством* (7) *удовлетворяет условию следствия* 4, *то условия* (6) *и* (5) *для него эквивалентны.*

Доказательство сразу же вытекает из замечания 3 и следующего неравенства: $\sum\limits_{k=1}^{m_N}|x_{t_{k-1}}^{t_k}-E|\leqslant\sup\limits_k|(x_0^{t_{k-1}})^{-1}|\sum\limits_{k=1}^{m_N}|x_0^{t_k}-x_0^{t_{k-1}}|$.

Лемма 2. *Если семейство* x_s^t *удовлетворяет условиям* (7) *и* (5), *то оно в каждой точке* $\tau\in[0,T]$ *имеет пределы* $x_{\tau-0}^\tau$ *и* $x_\tau^{\tau+0}$.

Доказательство. Покажем для определенности, что существует предел $x_\tau^{\tau+0}$, так как существование предела $x_{\tau-0}^\tau$ доказывается аналогично. По условию (5) для произвольной точки $\tau\in[0,T]$ и любой последовательности $t_n\downarrow\tau$ при $n\to\infty$ выполняется следующее соотношение:

$$\forall\delta>0\,\exists n:\sup_{m>n}|x_{t_{n+m}}^{t_n}-E|<\delta. \tag{8}$$

Воспользовавшись (7), запишем очевидное неравенство

$$|x_{t_{n+m}}^{t_{n+k}}-E|\leqslant|x_{t_{n+m}}^{t_n}-E|+|x_{t_{n+m}}^{t_n}-x_{t_{n+m}}^{t_{n+k}}|\leqslant$$
$$\leqslant|x_{t_{n+m}}^{t_n}-E|+|x_{t_{n+m}}^{t_{n+k}}-E+E|\,|x_{t_{n+k}}^{t_n}-E|\leqslant$$
$$\leqslant|x_{t_{n+m}}^{t_n}-E|+|x_{t_{n+m}}^{t_{n+k}}-E||x_{t_{n+k}}^{t_n}-E|+|x_{t_{n+k}}^{t_n}-E|,$$

из которого вытекает следующая оценка:

$$|x_{t_{n+m}}^{t_{n+k}}-E|\leqslant\frac{|x_{t_{n+m}}^{t_n}-E|+|x_{t_{n+m}}^{t_n}-E|}{1-|x_{t_{n+k}}^{t_n}-E|}. \tag{9}$$

Выбрав теперь для произвольного $\varepsilon>0$ в соотношении (8) $\delta\leqslant\varepsilon/(2+\varepsilon)$, из оценки (9) получаем неравенство $\forall k,m{:}\,|x_{t_{n+m}}^{t_{n+k}}-E|<\varepsilon$, из которого очевидно вытекает сходимость $|x_{t_m}^{t_n}-E|\to0$ при $t_n\downarrow\tau$, $t\leqslant t_m<t_n$, а поскольку операция обращения непрерывна в X, то из этого следует существование $(x_{t_m}^{t_n})^{-1}$ для больших m,n и сходимость $|(x_{t_m}^{t_n})^{-1}-E|\to0$ при $n,m\to\to\infty$. Из последнего с учетом равенства $x_\tau^{t_{n+k}}=x_\tau^{t_n}(x_{tn+k}^{tn})^{-1}$ вытека ет ограниченность $|x_\tau^{t_n}|$, и теперь из неравенства $|x_\tau^{t_n}-x_\tau^{t_{n+k}}|\leqslant|x_\tau^{t_{n+k}}||x_{tn+k}^{tn}-E|$ следует существование $x_\tau^{\tau+0}$.

Отметим, что утверждение, обратное лемме 2, очевидно не верно.

Следствие 6. *В условиях леммы* 2 *существуют пределы* $x_{\tau-0}^{\tau+0}$, $x_{\tau+0}^{\tau+0}=\lim\limits_{0\downarrow\delta>\varepsilon\uparrow0}x_{\tau+\varepsilon}^{\tau+\delta}=E$, $x_{\tau-0}^{\tau-0}=\lim\limits_{0\uparrow\delta>\varepsilon\uparrow0}x_{\tau-\delta}^{\tau+\varepsilon}=E$.

Замечание 4. Пример 1 показывает, что условие (6) не обеспечивает существование предела $x_{\tau-0}^{\tau+0}$.

Замечание 5. Отметим, что если у мультипликативной полугруппы не предполагать выполненным условие ограниченности вариации (7), то соответствующая инфинитезимальная аддативная полугруппа, как показывают примеры, существует не всегда. Может также случиться, что предел, определяющий инфинитезимальную полугруппу, зависит от последовательности разбиений отрезка $[0, T]$.

Пример. 2. Пусть $\xi(t)$ — непрерывная вещественная функция неограниченной вариации, например $\xi(t) = \begin{cases} t\cos \pi/t, & t \in (0, 1], \\ 0, & t = 0, \end{cases}$ и пусть $\eta(t) = \begin{cases} t, & t\cos \pi/t \geqslant 0, \\ 0, & t\cos\pi/t < 0. \end{cases}$ Рассмотрим мультипликативную полугруппу $x_s^t = e^{\eta(t) - \eta(s)}$. Тогда пределы, определяющие вариацию и инфинитезимальную полугруппу, бесконечны.

Пример 3. Пусть $\xi(t)$ — такая же, как в предыдущем примере, функция. Определим мультипликативную полугруппу $x_s^t = e^{\xi(t) - \xi(s)}$. Покажем, что x_s^t имеет инфинитезимальную полугруппу $y_s^t = \xi(t) - \xi(s)$. Действительно, в силу равномерной непрерывности функции $\xi(t)$ на $[0, T]$ имеем

$$\sum (x_{t_{k-1}}^{t_k} - 1) = \sum (e^{\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})} - 1) \leqslant \sum_{k=1}^{m_N} ([\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})] +$$

$$+ \sum_{i=2}^{\infty} [\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})]^i) \leqslant \xi(t) + \xi(s) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=2}^{\infty} [\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})]^k \to \xi(t) - \xi(s)$$

при $\delta_N \to 0$, так как

$$\sum_{k=1}^{m_N}\sum_{i=2}^{\infty} |\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})| \leqslant C \sum_{k=1}^{m_N} |\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})|^2 \leqslant C \sup_{1 \leqslant k \leqslant m_N} |\xi(t_k) -$$

$$- \xi(t_{k-1})|^i \left(\sum_{k=1}^{m_N} (1/k)^{2-\alpha}\right) \to 0, \quad \delta_N \to 0.$$

Здесь $0 < \alpha < 1$. Легко видеть, что

$$\operatorname*{Var}_{[0,1]} (x - 1) = \sup_{\Delta[0,1]} \sum |x_{t_{k-1}}^{t_k} - 1| > \operatorname*{Var}_{[0,1]} \xi(t) = \infty, \quad \operatorname*{Var}_{[0,1]} y = \operatorname*{Var}_{[0,1]} \xi(t) = \infty.$$

Если вместо $\xi(t) = \begin{cases} t\cos\pi/t, & t \in (0, 1], \\ 0, & t = 0 \end{cases}$ рассмотреть функцию неограниченной вариации $\zeta(t) = \begin{cases} \sqrt{t}\cos\pi/t, & t \in (0, 1], \\ 0, & t = 0, \end{cases}$ то у мультипликативной полугруппы $\exp\{\zeta(t) - \zeta(s)\}$ предел, определяющий инфинитезимальную полугруппу, зависит от последовательности разбиений.

1. *Fréchet M.* Recherches theoriques modernes sur le calcus des probabilities.— Paris : Gauthier — Villars, 1938.— 315 p.
2. *Добрушин Р. Л.* Обобщение уравнения Колмогорова марковских процессов с конечным числом возможных состояний // Мат. сб.— 1953.— 33.— С. 567—596.
3. *Буцан Г. П.* Мультипликативные параметрические полугруппы // Кибернетика.— 1978.— № 3.— С. 38—43.
4. *Каратаева Т. В., Буцан Г. П.* Об изоморфизме мультипликативных и аддитивных полугрупп без условий непрерывности // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, № 2.— С. 168—175.
5. *Каратаева Т. В.* Соотношения между правыми и левыми мультипликативными полугруппами без условий непрерывности // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1985.— № 2.— С. 8—11.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 11.05.85,
После доработки — 14.01.86