УДК 513.88+519.4

В. С. Яковлев

О представлениях некоторых $*$-алгебр гладких функций

В работе [1] введен некоторый класс коммутативных ядерных $*$-алгебр (ядерные квазианалитические $*$-алгебры) и изучены сильно непрерывные $*$-представления $*$-алгебр из этого класса. $*$-Алгебра многочленов от двух переменных, рассмотренная в [2, с. 290], не принадлежит введенному классу. Известно также, что для нее теорема о разложении сильно непрерывного $*$-представления на одномерные $*$-представления не справедлива [3, с. 102]. Отметим, что в случае неядерных $*$-алгебр (условие, сформулированное в [1], можно рассматривать и для неядерных алгебр) принадлежность к классу не обеспечивает существования разложения на одномерные представления. Так, в BP^*-алгебре L^∞ [0, 1] [4] каждый элемент является квазианалитическим, однако на этой алгебре не существует мультипликативных линейных функционалов, в то время как нетривиальные сильно непрерывные $*$-представления существуют. В данной работе рассмотрены примеры $*$-алгебр гладких функций, с помощью результатов [1] показано, что все неприводимые сильно непрерывные $*$-представления этих $*$-алгебр одномерны, и получены разложения произвольных сильно непрерывных $*$-представлений на $*$-представления, кратные одномерным. Отметим еще, что введение класса ядерных квазианалитических $*$-алгебр связано с поставленной И. М. Гельфандом и Н. Я. Виленкиным [2, с. 294] задачей выделения класса топологических $*$-алгебр, в которых понятия положительности и мультипликативной положительности функционалов совпадают.

В работе [1] было введено множество квазианалитических элементов топологической алгебры U. Введем еще три множества элементов топологической алгебры. Элемент $f \in U$ назовем ограниченным (аналитическим), если для некоторого $\lambda > 0$ множество $\{(\lambda f)^n \in U : n = 1, 2, \ldots\}$ $\left(\left\{\frac{1}{n!}(\lambda f)^n \in U : n = 1, 2, \ldots\right\}\right)$ ограничено в U. Элемент $f \in U$ назовем целым, если для любого $\lambda > 0$ множество $\left\{\frac{1}{n!}(\lambda f)^n \in U : n = 1, 2, \ldots\right\}$ ограничено в U. Очевидно, $U^q \supseteq U^\omega \supseteq U^c \supseteq U^b$, где U^q, U^ω, U^c, U^b обозначают соответственно множества квазианалитических, аналитических, целых и ограниченных элементов топологической алгебры U. В настоящей работе мы рассматриваем только такие $*$-представления π $*$-алгебры U на плотном подмножестве $D(\pi)$ гильбертова пространства H, что замыкания $\tilde{\pi}$ этих $*$-представлений [3, с. 89] являются точными, т. е. такие π, что для любого $\xi \in D(\tilde{\pi})$ найдется такой $f \in U$, что $\tilde{\pi}(f)\xi \neq 0$. Рассмотрим пространства $U = \operatorname{pr}\lim_{\tau \in T} W_2^{\tau_1}(\mathbb{R}^N, \tau_2(x)\,dx)$, $U = \bigcap_{\tau \in T} W_2^{\tau_1}(\mathbb{R}^N, \tau_2(x)\,dx)$, где множество $T \subseteq \{\tau = (\tau_1, \tau_2(x)) : \tau_1 = 0, 1, \ldots, \tau_2(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N),\ \tau_2(x) \geqslant 1\}$ такое, что U ядерно [5, с. 27, 89].

Теорема 1. *Любое неприводимое сильно непрерывное $*$-представление $*$-алгебры $U = \operatorname{pr}\lim_{\tau \in T} W_2^{\tau_1}(\mathbb{R}^N, \tau_2(x)\,dx)$ с поточечным умножением и инволюцией $f^*(x) = \overline{f(x)}$, $f \in U$, задается формулой $U \ni f \mapsto f(x_0) \in \mathbb{C}^1$, где*

$x_0 \in \mathbb{R}^N$. *Если* π — *любое сильно непрерывное* $*$-*представление* $*$-*алгебры* U, *то* $H = \int\limits_{\mathbb{R}^N}^{\oplus} H_x d\rho(x)$, *где* ρ — *конечная мера на* σ-*алгебре* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *борелевских множеств из* $\mathbb{R}^N$, *а операторы представления ограничены в* H, *диагональны в этом разложении и действуют по формуле* $\pi(f)\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^N}^{\oplus} \pi(f)(x)\xi(x)\,d\rho(x)$, *где* $\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^N}^{\oplus} \xi(x)\,d\rho(x)$, *а* $\pi(f)(x) = f(x)\cdot 1_{H_x}$ (1_{H_x} — *единичный оператор в* H_x).

Доказательство проводится по следующей схеме. Доказывается, что каждый элемент алгебры U ограничен и, следовательно, квазианалитичен и можно применить теорему из [1]. Так как $*$-представление $\tilde{\pi}$ точно, то можно исключить 0 из M [5, с. 221]. В данном случае множество M отождествляется с пространством $\mathbb{R}^N$ и действие функционала $m \in M$ задается формулой $m(f) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$. σ-алгебра $C_\sigma(M) = C_\sigma(\mathbb{C}^u) \cap M$ порождена множествами вида $M(f; \Delta) = \{m \in M : m(f) \in \Delta\}$, $f \in U$, $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^1)$. При переходе к $\mathbb{R}^N$ этому множеству соответствует множество $B(f; \Delta) = \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \in \Delta\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, поскольку $f \in U$ — непрерывная функция. Обратно, пусть $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ — открытый шар с центром в $x_0 \in \mathbb{R}^N$ радиуса $r > 0$. Тогда $B = \{x \in \mathbb{R}^N : j_\varepsilon(x) \in (a, +\infty)\}$, где $a = e^{-1/(\varepsilon^2 - r^2)}$, $j_\varepsilon(x) = e^{-1/(\varepsilon^2 - |x - x_0|^2)}$, если $|x - x_0| < \varepsilon$, и $j_\varepsilon(x) = 0$, если $|x - x_0| \geqslant \varepsilon$, $\varepsilon > r$. Поскольку $j_\varepsilon \in U$, то B принадлежит образу σ-алгебры $C_\sigma(M)$ при отождествлении M и $\mathbb{R}^N$. Так как шары порождают $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, то соответствие σ- алгебр $C_\sigma(M)$ и $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ доказано. Ограниченность операторов представления следует из ограниченности функций, принадлежащих U.

Переходя к преобразованию Фурье для $S(\mathbb{R}^N)$, получаем такое следствие.

Следствие. *Любое неприводимое сильно непрерывное* $*$-*представление* $*$-*алгебры* $S(\mathbb{R}^N)$ *со сверткой в качестве умножения и инволюцией* $f^*(x) = \overline{f(-x)}$ *задается формулой* $U \ni f \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i(m,x)} dx \in \mathbb{C}^1$, *где* $m \in \mathbb{R}^N$. *Если* π — *любое сильно непрерывное* $*$-*представление* $*$-*алгебры* $S(\mathbb{R}^N)$, *то* $H = \int\limits_{\mathbb{R}^N}^{\oplus} H_m d\rho(m)$, *где* ρ — *конечная мера на* σ-*алгебре* $\mathcal{B}(R^N)$ *борелевских множеств из* $\mathbb{R}^N$, *а операторы представления ограничены в* H, *диагональны в этом разложении и действуют по формуле* $\pi(f)\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^N}^{\oplus} \pi(f)(m) \times \xi(m)\,d\rho(m)$, $\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^N}^{\oplus} \xi(m)\,d\rho(m)$, *а* $\pi(f)(m) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i(m,x)} dx \cdot 1_{H_m}$, 1_{H_m} — *единичный оператор в* H_m.

Рассмотрим еще несколько примеров $*$-алгебр со сверткой.

Теорема 2. *Любое сильно непрерывное* $*$-*представление* $*$-*алгебры* $S(\mathbb{R}^N)$ *со сверткой в качестве умножения и инволюцией* $f^*(x) = \overline{f(x)}$, $f \in S(\mathbb{R}^N)$, *кратно единственному одномерному* $*$-*представлению, заданному формулой* $S(\mathbb{R}^N) \ni f \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx \in \mathbb{C}^1$. *Любое неприводимое сильно непрерывное* $*$-*представление* $*$-*алгебры* $U = \operatorname*{prlim}\limits_{\tau=0,1,\ldots} W^\tau(\mathbb{R}^N, e^{\tau|x|}dx)$ *со сверткой и инволюцией* $f^*(x) = \overline{f(-x)}$, $f \in U$, *задается формулой* $U \ni f \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i(m,x)} dx \in \mathbb{C}^1$, $m \in \mathbb{R}^N$, *а если в качестве инволюции рассматривать* $f^*(x) = \overline{f(x)}$, $f \in U$, — *то формулой* $U \ni f \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{(m,x)} dx \in \mathbb{C}^1$, $m \in \mathbb{R}^N$.

Если π — любое сильно непрерывное $*$-представление $*$-алгебры U, то $H = \int\limits_{\mathbb{R}^N}^{\oplus} H_m d\rho(m)$, где ρ — конечная мера на σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ борелевских множеств из $\mathbb{R}^N$, а операторы представления диагональны в этом разложении H и действуют по формуле $\pi(f)\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^N}^{\oplus} \pi(f)(m)\xi(m)\, d\rho(m)$, где $\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^N}^{\oplus} \xi(m)\, d\rho(m)$, а $\pi(f)(m) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i(m,x)}dx \cdot 1_{H_m}$ в случае инволюции $f^*(x) = \overline{f(-x)}$ и $\pi(f)(m) = \int\limits_{R^N} f(x) e^{(m,x)}dx \cdot 1_{H_m}$ в случае инволюции $f^*(x) = \overline{f(x)}$, где 1_{H_m} — единичный оператор в H_m. В случае инволюции $f^*(x) = \overline{f(-x)}$ операторы $\pi(f)$ ограничены, а в случае $f^*(x) = \overline{f(x)}$ справедливо включение $D(\pi) \subseteq \left\{\xi \in H : \forall_{f \in U} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{(m,x)}dx \right|^2 \cdot \|\xi(m)\|^2_{H_m} d\rho(m) < +\infty\right\}$, $\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^N}^{\oplus} \xi(m)\, d\rho(m)$.

Отметим основные моменты доказательства. Каждый элемент алгебры $S(\mathbb{R}^N)$ согласно изложенному выше ограничен. Каждый элемент алгебры $U = \operatorname{pr}\lim\limits_{\tau=0,1,\dots} W_2^\tau(\mathbb{R}^N, e^{\tau|x|}dx)$ является целым. Таким образом, можно применить теорему из [1]. В случае, когда $\tilde{\pi}$ точно, 0 исключается из M. Можно показать, что на плотных подалгебрах, состоящих из функций и $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, при рассмотрении инволюций $f^*(x) = \overline{f(-x)}$ и $f^*(x) = \overline{f(x)}$ ненулевые функционалы $m \in M$ отождествляются с $\mathbb{R}^N$ и их действия задаются соответственно формулами $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \ni f \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i(m,x)}dx \in \mathbb{C}^1$ и $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \ni f \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) \times e^{(m,x)}dx \in \mathbb{C}^1$, $m \in \mathbb{R}^N$. Ясно, что функционал, заданный второй формулой, продолжается на все $S(\mathbb{R}^N)$ только для $m = 0 \in \mathbb{R}^N$ и с использованием результатов [1] получаем первое утверждение теоремы. В случае $U = \operatorname{pr}\lim\limits_{\tau=0,1,\dots} W_2^\tau(\mathbb{R}^N, e^{\tau|x|}dx)$ оба функционала продолжаются на все U и, следовательно, в этом случае M отождествляется с $\mathbb{R}^N$. σ-алгебра $C_\sigma(M) = C_\sigma(\mathbb{C}^U) \cap M$ порождена множествами вида $M(f;\Delta) = \{m \in M : m(f) \in \Delta\}$, $f \in U$, $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^1)$, которым при переходе к $\mathbb{R}^N$ соответствуют множества $\left\{m \in \mathbb{R}^N : \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i(m,x)}dx \in \Delta\right\}$ в случае инволюции $f^*(x) = \overline{f(-x)}$ и множества $\left\{m \in \mathbb{R}^N : \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{(m,x)}dx \in \Delta\right\}$ в случае инволюции $f^*(x) = \overline{f(x)}$, $f \in U$. Поскольку интегралы $\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i(m,x)}dx$ и $\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{(m,x)}dx$ при $f \in U$ являются непрерывными функциями от $m \in \mathbb{R}^N$, то эти множества принадлежат $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Поскольку $e^{-|x|^2/4 + i(m_0,x)} \in U$ и $e^{-|x|^2/4 - (m_0,x)} \in U$ для любого $m_0 \in \mathbb{R}^N$ и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-|x|^2/4 + i(m_0,x)} \cdot e^{-i(m,x)}dx = 2^N \pi^{N/2} e^{-|m-m_0|^2}, \text{ а } \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-|x|^2/4 - (m_0,x)} \cdot e^{(m,x)}dx =$$

$$= 2^N \pi^{N/2} \cdot e^{|m-m_0|^2},$$

то множество

$$\left\{m \in \mathbb{R}^N : \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-|x|^2/4 + i(m_0,x)} e^{-i(m,x)}dx > C,\ C < 2^N \pi^{N/2}\right\} =$$

$$= \left\{ m \in \mathbb{R}^N : \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-|x|^2/4 - (m_0, x)} e^{(m,x)} dx < C_1,\ C_1 = 2^{2N} \pi^N C^{-1} \right\} =$$

$$= \{ m \in \mathbb{R}^N : | m - m_0 |^2 < \ln (2^N \pi^{N/2} C^{-1}) \}$$

является образом измеримого множества из M при отождествлениях M и $\mathbb{R}^N$ и представляет собой шар с центром в точке $m_0 \in \mathbb{R}^N$ и радиусом $\sqrt{\ln (2^N \pi^{N/2} C^{-1})}$. Так как шары порождают σ-алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, то образ σ-алгебры $C_\sigma(M)$ есть σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ борелевских множеств из $\mathbb{R}^N$. Ограниченность операторов представления в случае инволюции $f^*(x) = \overline{f(-x)}$ следует из ограниченности функций $\mathbb{R}^N \ni m \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i(m,x)} dx \in \mathbb{C}^1$ для всех $f \in U$.

1. *Яковлев В. С.* О представлениях некоторых коммутативных ядерных $*$-алгебр // Укр. мат. журн.— 1987.— 39, № 2.— С. 235—243.
2. *Гельфанд И. М.*, *Виленкин Н. Я.* Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства.— М. : Физматгиз, 1961.— 472 с.
3. *Powers R. T.* Self — Adjoint algebras of unbounded operators // Communs Math. Phys.— 1971.— 21.— P. 85—124.
4. *Husain T.*, *Warsi S. A.* Positive functionals on BP^*-algebras // Periodica Mathematica Hungarica.— 1977.— 8, N 1.— P. 15—28.
5. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— Киев : Наук. думка, 1978.— 360 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 27.11.85