УДК 519.21

*Г. А. Шаршанова*

# О мероморфных характеристических функциях с не всеми мнимыми тремя полюсами

1. Рассмотрим характеристические функции, у которых целая часть равна нулю. Отметим некоторые факты, вытекающие из известных свойств аналитических характеристических функций [1, 2]. У мероморфной характеристической функции полюсы на вещественной оси отсутствуют. Характеристическая функция удовлетворяет условию симметрии

$$\overline{\varphi(t)} = \varphi(-\bar{t}), \tag{1}$$

откуда следует, что полюсы мероморфной характеристической функции располагаются симметрично относительно мнимой оси или лежат на ней. В каждой полуплоскости ближайший к действительной оси полюс должен лежать на мнимой оси. Характеристическая функция удовлетворяет условию нормировки $\varphi(0) = 1$, а в полосе аналитичности — условию хребтовости

$$|\varphi(t)| \leqslant \varphi(i\,\mathrm{Im}\,t). \tag{2}$$

На основании этих фактов легко доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Для того чтобы мероморфная функция с тремя не всеми мнимыми полюсами и равной нулю целой частью была характеристической, необходимо выполнение следующих условий:*

1) *ее можно представить в виде*

$$\varphi_v(t) = \sum_{l=1}^{m} a_l \left(\frac{i\beta}{t+i\beta}\right)^l + \sum_{k=1}^{n}\left[\lambda_k\left(\frac{-\tau}{t-\tau}\right)^k + \bar{\lambda}_k\left(\frac{\bar{\tau}}{t+\bar{\tau}}\right)^k\right], \tag{3}$$

*где для числовых параметров имеем*

$$\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}; \tag{4}$$

$$\tau = \xi - i\varkappa, \quad \xi > 0, \quad \varkappa \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad |\varkappa| \geqslant |\beta|, \tag{5}$$

$$a_1, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{R}, \quad a_m > 0, \quad \lambda_n \neq 0, \tag{6}$$

$$\varphi_0(0) = \sum_{l=1}^{m} a_l + 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1; \tag{7}$$

2) *все полюсы лежат либо только в верхней, либо только в нижней полуплоскости* $\mathbb{C}$;

3) $\varkappa = \beta \Rightarrow m \geqslant n$;

4) $\varkappa = \beta \wedge m = n \Rightarrow a_m|\beta|^m \geqslant |\lambda_m|\,|\tau|^m$.

Следствие. *Если функция* (3) *является характеристической и* $m < n$, *то* $|\varkappa| > |\beta|$.

Таким образом, рассматриваемые мероморфные характеристические функции принадлежат множеству тех мероморфных функций, у которых полюсы располагаются только в одной полуплоскости $\mathbb{C}$ — верхней или нижней. Но известно, что если функция $\varphi(t)$ характеристическая, то функция $\varphi(-t)$ также будет характеристической. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением тех мероморфных функций, у которых все полюсы находятся в нижней полуплоскости. В этом случае

$$\beta > 0, \quad \varkappa > 0. \tag{8}$$

Для преобразования Фурье $p_0(x)$ от функции (3) в этом случае получим

$$p_0(x) =$$

$$= \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ e^{-\beta x} \sum\limits_{l=1}^{m} a_l \beta^l \dfrac{x^{l-1}}{(l-1)!} + 2e^{-\varkappa x} \sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k| |\tau|^k \cos(\xi x - \vartheta_k) \dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!}, & x > 0, \end{cases} \tag{9}$$

где

$$\vartheta_k = k\alpha + \beta_k, \tag{10}$$

$$\alpha = \arg i\tau, \tag{11}$$

$$\beta_k = \arg \lambda_k. \tag{12}$$

Функция (3), удовлетворяющая условиям (5)—(8), будет характеристической тогда и только тогда, когда $p_0(x) \geqslant 0 \ \forall x \geqslant 0$. Отсюда легко получить некоторые достаточные условия характеристичности функции (3).

Теорема 2. *Пусть в* (3) *числовые параметры удовлетворяют условиям* (5)—(8), $m < n$, $a_{m-1} = \ldots = a_1 = \lambda_{n-1} = \ldots = \lambda_1 = 0$, $\varkappa > \beta$; *пусть*

$$a_m \beta^m \geqslant 2e^{m-n} \left(\frac{n-m}{\varkappa - \beta}\right)^{n-m} \frac{(m-1)!}{(n-1)!} |\lambda_n| |\tau|^n. \tag{13}$$

*Тогда* (3) — *характеристическая функция.*

Теорема 3. *Пусть в* (3) *числовые параметры удовлетворяют условиям* (5) — (8), $m > n$, $a_{m-1} = \ldots = a_1 = \lambda_{n-1} = \ldots = \lambda_1 = 0$, $\varkappa > \beta$; *пусть* $\cos \vartheta_n > 0$ *и* $x_0$ — *наименьший положительный корень уравнения* $\cos(\xi x - \vartheta_n) = 0$; *кроме того,*

$$a_m \beta^m \geqslant 2 \frac{(m-1)!}{(n-1)!} \frac{\xi |\lambda_n| |\tau|^n}{x_0^{m-n-1} [(m-n) + (\varkappa - \beta) x_0]} e^{-(\varkappa-\beta) x_0}. \tag{14}$$

*Тогда* (3) — *характеристическая функция.*

Теорема 4. *Предположим, что в* (3) *числовые параметры удовлетворяют* (5)—(8), $\varkappa = \beta$, $m \geqslant n$, $a_n \neq 0$, *а остальные коэффициенты* $a_l$, $\lambda_l$ *равны нулю. Тогда для того чтобы функция* (3) *была характеристической, необходимо и достаточно, чтобы* $\forall x \in ]0, 2\pi/\xi[$ *имело место*

$$(1 - \delta_{mn}) a_m \beta^m \frac{(n-1)!}{(m-1)!} x^{m-n} + [a_n \beta^n + 2 |\lambda_n| |\tau|^n \cos(\xi x - \vartheta_n)] \geqslant 0, \tag{15}$$

*и достаточно, чтобы выполнялось*

$$a_n |\beta|^n \geqslant 2 |\lambda_n| |\tau|^n. \tag{16}$$

*В случае* $m = n$ *условие* (16) *является и необходимым.*

2. Рассмотрим теперь мероморфные характеристические функции, у которых целая часть, вообще говоря, отлична от нуля.

Теорема 5. *Если мероморфная функция с не всеми мнимыми тремя полюсами является характеристической, то выполняются следующие условия:*

1′) *ее можно представить в виде*

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) + h(t), \tag{17}$$

*где* $\varphi_0(t)$ *имеет вид* (3), *числовые параметры удовлетворяют условиям* (4) — (6), 2), 3), 4) *и*

$$\varphi(0) = \sum_{l=1}^{m} a_l + 2\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k + h(0) = 1. \tag{18}$$

Следствие. *Если функция* (17) *является характеристической и* $m < n$, *то* $|\varkappa| > |\beta|$.

Теорема 6. *Пусть дана функция* (3), *удовлетворяющая* (4) *и* (5), *причем если* $\varkappa = \beta$, *то* $m > n$; *целая функция* $h(t)$ *такая, что функция*

*$\varphi(t) = \varphi_0(t) + h(t)$ является характеристической, существует тогда и только тогда, когда выполняются условия* (6) *и полюсы* (3) *лежат либо только в верхней, либо только в нижней полуплоскости* $\mathbb{C}$.

Теорема 7. *Пусть дана функция* (3), *удовлетворяющая условиям* (4)—(6), $\varkappa = \beta > 0$, $m = n$; *пусть справедливо неравенство*

$$a_m\beta^m > 2|\lambda_m||\tau|^m.$$

*Тогда существует целая функция $h(t)$ такая, что функция $\varphi(t) = \varphi_0(t) + h(t)$ является характеристической.*

3. Изучим вопрос о безграничной делимости характеристических функций вида (3). Так как этот вопрос для функций $\varphi(t)$ и $\varphi(\beta t)$ решается одновременно $\forall\beta \in R\setminus\{0\}$, то для простоты предположим $\beta = 1$. При этом вместо характеристических функций будем использовать преобразования Лапласа — Стилтьеса $f(s)$ от функций распределения, которые связаны с $\varphi(t)$ соотношением $f(s) = \varphi(-is)$. В результате для $f(s)$, соответствующей (3), получим

$$f(s) = \frac{P(s)}{(1-s)^m(s^2 - 2\varkappa s + |\tau|^2)^n}, \tag{19}$$

где $P(s)$ — следующий полином:

$$P(s) = (s^2 - 2\varkappa s + |\tau|^2)^n \sum_{l=1}^{m} a_l (1-s)^{m-l} + (1-s)^m \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{n} [\lambda_k(-i\tau)^k (s + i\bar{\tau})^k + \bar{\lambda}_k (i\bar{\tau})^k (s - i\tau)^k](s^2 - 2\varkappa s + |\tau|^2)^{n-k}, \tag{20}$$

а числовые параметры удовлетворяют условиям (6), (7) и

$$\tau = \xi - i\varkappa, \quad \xi > 0, \quad \varkappa \geqslant 1. \tag{21}$$

Наибольшая степень, какую может иметь полином $P(s)$, равна $2n + m - 1$, наименьшая степень равна нулю, свободный член равен $P(0) = |\tau|^{2n}$. Коэффициенты $P(s)$ вещественны, поэтому корни $P(s)$ вещественны или образуют сопряженные пары. Обозначим вещественные корни через

$$\xi_1, \ldots, \xi_q, \tag{22}$$

а сопряженные корни —

$$\begin{aligned} &s_1 = \mu_1 + i\nu_1, \quad \bar{s}_1 = \mu_1 - i\nu_1, \quad \nu_1 > 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &s_p = \mu_p + i\nu_p, \quad \bar{s}_p = \mu_p - i\nu_p, \quad \nu_p > 0, \end{aligned} \tag{23}$$

где $0 \leqslant 2p + q \leqslant 2n + m - 1$.

Теорема 8. *Для того чтобы функция* (19), *удовлетворяющая условиям* (6), (7), (21), *с полиномом $P(s) \equiv |\tau|^{2n}$ была безгранично делимым преобразованием Лапласа — Стилтьеса, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$m \geqslant \frac{2n\xi}{\sqrt{(1-\varkappa)^2 + \xi^2}} e^{(1-\varkappa)(3\pi/(2\xi) - \theta/\xi)}, \tag{24}$$

*где $\theta \in [\pi/2, \pi[$ таково, что*

$$\sin\theta = \xi/\sqrt{(1-\varkappa)^2 + \xi^2}, \quad \cos\theta = (1-\varkappa)/\sqrt{(1-\varkappa)^2 + \xi^2}. \tag{25}$$

В случае, когда полином $P(s)$ имеет лишь вещественные корни (22), справедлива такая теорема.

Теорема 9. *Для того чтобы функция* (19), *удовлетворяющая условиям* (6), (7), (21), *с полиномом $P(s)$, имеющим только вещественные корни* (22), *была безгранично делимым преобразованием Лапласа — Стилтьеса, не-*

*обходимо и достаточно, чтобы выполнялось:* А) $\xi_1 > 1, \ldots, \xi_q > 1$; Б) *на отрезке* $[0, 3\pi/(2\xi) - \theta/\xi]$, *где* $\theta \in [\pi/2, \pi[$ *и определяется формулами* (25), *функция*

$$r(x) = m + 2ne^{(1-\varkappa)x}\cos\xi x - e^{(1-\xi_1)x} - \ldots - e^{(1-\xi_q)x} \tag{26}$$

*неотрицательна.*

Следствие. *Если функция* (19) *удовлетворяет условиям* (6), (7), (21), *полином* $P(s)$ *имеет только вещественные корни* А),

$$m - \frac{2n\xi}{\sqrt{(1-\varkappa)^2 + \xi^2}} e^{(1-\varkappa)(3\pi/(2\xi) - \theta/\xi)} - q \geqslant 0,$$

*где* $\theta \in [\pi/2, \pi[$ *и вычисляется по формулам* (25), *то она безгранично делима.*

Рассмотрим некоторые случаи, когда полином $P(s)$ имеет не только вещественные корни. Отметим, что если функция (19), удовлетворяющая условиям (6), (7), (21), безгранично делима, то все корни полинома $P(s)$ лежат в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s \geqslant 1$ [2, с. 300]. Следовательно, в этом случае вещественные корни (22) таковы, что $\xi_1 > 1, \ldots, \xi_q > 1$, а комплексные корни (23) таковы, что $\mu_1 \geqslant 1, \ldots, \mu_p \geqslant 1$.

Теорема 10. *Для того чтобы функция* (19), *удовлетворяющая условиям* (6), (7), (21), $\varkappa = 1$, *где* $P(s)$ *имеет только комплексные корни* (23) *такие, что* $\mu_1 = \ldots = \mu_p = 1$, *была безгранично делимой, необходимо*

$$m \geqslant 2\left(n + \cos\frac{\nu_1}{\xi}\pi + \ldots + \cos\frac{\nu_p}{\xi}\pi\right) \tag{27}$$

*и достаточно*

$$m \geqslant 2(n + p). \tag{28}$$

Теорема 11. *Для того чтобы функция* (19), *удовлетворяющая условиям* (6), (7), (21), $\varkappa = 1$, *с полиномом* $P(s)$, *имеющим только комплексные корни* (23) *такие, что* $\mu_1 = \ldots = \mu_p = 1$, *а* $\xi, \nu_1, \ldots, \nu_p$ *линейно независимы (см.* [4, *с.* 106]), *была безгранично делимой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство* (28).

Доказательство. Необходимость. Для $s$ таких, что $\mathrm{Re}\, s < 1$, имеет место

$$f'(s)/f(s) = \int_0^\infty e^{sx} k(x)\, dx, \tag{29}$$

где

$$k(x) = e^{-x}(m + 2n\cos\xi x - 2\cos\nu_1 x - \ldots - 2\cos\nu_p x). \tag{30}$$

Поскольку (19) безгранично делимо, то $k(x) \geqslant 0$ $\forall x \geqslant 0$ [3, с. 507]. Согласно теореме Кронекера [4, с. 106], так как $\xi, \nu_1, \ldots, \nu_p$ линейно независимы, при любом $\delta > 0$ существует $x \geqslant 0$, удовлетворяющее системе неравенств

$$|\xi x - \pi| < \delta \pmod{2\pi}, \quad |\nu_j x| < \delta \pmod{2\pi}, \quad j = 1, 2, \ldots, p.$$

Отсюда, предположив противное, т. е. $m < 2(n + p)$, получим, что найдутся $x > 0$, для которых $k(x) < 0$. Следовательно, справедливо (28). Необходимость доказана.

Достаточность вытекает из теоремы 10.


1. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов.— М. : Наука, 1972.— 480 с.
2. *Лукач Е.* Характеристические функции.— М. : Наука, 1979.— 424 с.
3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей : В 2-х т.— М. : Мир, 1984.— Т. 2.— 752 с.
4. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции.— М. : Наука, 1953.— 396 с.



Харьков. ун-т



Получено 24.11.84,
после доработки — 31.03.86