УДК 519.21

Т. В. Каратаева, Т. А. Скороход

К вопросу о смешанном произведении зависимых мультипликативных полугрупп

Смешанное произведение для независимых стохастических полугрупп изучалось в работах [1, 2]. В данной статье рассматривается вопрос о существовании смешанного произведения для одного случая зависимых мультипликативных полугрупп.

Пусть H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство операторов Гильберта—Шмидта в H с нормой $\sigma(\cdot)$, $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — вероятностное пространство, $\mathfrak{F}(s, t) \subset \mathfrak{F}$ — поток σ-алгебр со следующими свойствами: 1) $\mathfrak{F}(s, u)$, $\mathfrak{F}(u, t)$ независимы $(s \leqslant u \leqslant t)$; 2) $\sigma\text{-}(\mathfrak{F}(s, u) \cup \mathfrak{F}(u, t)) = \mathfrak{F}(s, t)$.

Рассмотрим семейство случайных линейных операторов $X(s, t)$, согласованное с $\mathfrak{F}(s, t)$ и со значениями в $E + \mathfrak{H}$.

Пусть $\mathbf{M}\sigma^2(X(s, t) - E) = d^2(X(s, t) - E) < \infty$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Определение 1. *Семейство $X(s, t)$ называется мультипликативной стохастической полугруппой, если выполнены условия:* 1) $X(s, u) X(u, t) = X(s, t)$, $X(t, t) = E \pmod P$; 2) $d(X(s, t) - E) \to 0$, $|s - t| \to 0$.

Определение 2. *Если $Y(t)$—процесс с независимыми приращениями, принимающий значения в $\mathfrak{H}$ и непрерывный в норме $d(\cdot)$, то семейство $Y(s, t) = Y(t) - Y(s)$ будем называть аддитивной стохастической полугруппой.*

Как известно (см. [1—3]), между $X(s, t)$ и парой $(Y(s, t), \mathbf{M}X(s, t))$ существует взаимно-однозначное соответствие, устанавливаемое по формулам

$$X(s, t) = \lim \prod_{k=1}^{n} (\mathbf{M}X(t_{k-1}, t_k) + Y(t_{k-1}, t_k)), \tag{1}$$

$$Y(s, t) = \lim \sum_{k=1}^{n} (X(t_{k-1}, t_k) - \mathbf{M}X(t_{k-1}, t_k)).$$

Будем говорить, что $Y(s, t)$ — соответствующая $X(s, t)$ аддитивная полугруппа, если она определяется формулой (1).

Определение 3. *Смешанным произведением стохастических полугрупп $X_1(s, t)$ и $X_2(s, t)$ будем называть предел в норме $d(\cdot)$ вида*

$$(X_1 \boxtimes X_2)(s, t) = \lim \prod_{k=1}^{n} X_1(t_{k-1}, t_k) X_2(t_{k-1}, t_k), \quad s = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$$

$$\text{при } \max(t_k - t_{k-1}) \to 0.$$

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть $\mathbf{M}X(s, t) = E$, $X(s, t)$ — стохастическая полугруппа, не имеющая скачков больше C, т. е.*

$$\sigma(X(t - 0, t + 0) - E) \leqslant C \pmod P \ \forall\, t \in [0, T],$$

а также

$$\sup_{\{t_k\}} \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{M}\sigma^4(X(t_{k-1}, t_k) - E - Y(t_{k-1}, t_k)))^{1/4} < \infty,$$

где $Y(s, t)$ — соответствующая $X(s, t)$ аддитивная полугруппа. Тогда существует предел

$$X(s, t) \boxtimes X(s, t) = \lim \prod_{k=1}^{n} X^2(t_{k-1}, t_k). \tag{2}$$

Доказательство. Проверим выполнение условий теоремы из работы [4], которая дает достаточные условия существования предела (2). Для этого нужно показать, что существует неслучайная полугруппа $M(s, t) = \lim \prod_{k=1}^{n} \mathbf{M}X^2(t_{k-1}, t_k)$ и аддитивная полугруппа

$$\mathcal{Y}(s, t) = \lim \sum_{k=1}^{n} (X^2(t_{k-1}, t_k) - \mathbf{M}X^2(t_{k-1}, t_k)), \tag{3}$$

удовлетворяющая условию

$$\sup_{\{t_k\}} \sum_{k=1}^{n} d(\mathcal{Y}(t_{k-1}, t_k) - X^2(t_{k-1}, t_k) + \mathbf{M}X^2(t_{k-1}, t_k)) = R < \infty. \tag{4}$$

Докажем, что существует предел (3). Предварительно убедимся, что существует предел в норме $d(\cdot)$

$$\lim \sum_{k=1}^{n} Y^2(t_{k-1}, t_k) = Y_0(s, t). \tag{5}$$

Так как

$$Y^2(s, t) - \sum_{k=1}^{n} Y^2(t_{k-1}, t_k) = \sum_{k \neq i} Y(t_{k-1}, t_k)\, Y(t_{i-1}, t_i), \qquad s = t_0 < \ldots < t_n = t,$$

то, взяв два монотонных разбиения интервала $[s, t]$ $t_{k-1} = \tau_0^k < \tau_1^k < \ldots$ $\ldots < \tau_{n_k}^k = t_k$, оценим разность сумм

$$d^2\left(\sum_{k=1}^{n} Y^2(t_{k-1}, t_k) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_k} Y^2(\tau_{i-1}^k, \tau_i^k)\right) =$$

$$= d^2\left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq i}}^{n_k} Y(\tau_{i-1}^k, \tau_i^k)\, Y(\tau_{j-1}^k, \tau_j^k)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} d^2\left(\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n_k} Y(\tau_{i-1}^k, \tau_i^k)\, Y(\tau_{j-1}^k, \tau_j^k)\right) =$$

$$= 4\sum_{k=1}^{n} d^2\left(\sum_{i<j} Y(\tau_{i-1}^k, \tau_i^k)\, Y(\tau_{j-1}^k, \tau_j^k)\right) =$$

$$= 4\sum_{k=1}^{n} d^2\left(\sum_{j=1}^{n_k} Y(\tau_0^k, \tau_{j-1}^k)\, Y(\tau_{j-1}^k, \tau_j^k)\right). \tag{6}$$

Оценим внутреннюю сумму в последнем выражении:

$$d^2\left(\sum_{j=1}^{n_k} Y(\tau_0^k, \tau_{j-1}^k)\, Y(\tau_{j-1}^k, \tau_j^k)\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n_k} d^2(Y(\tau_0^k, \tau_{j-1}^k)\, d^2(Y(\tau_{j-1}^k, \tau_j^k)) +$$

$$+ 2\sum_{j<i} |\mathbf{M}\,\mathrm{sp}\,(Y(\tau_0^k, \tau_{j-1}^k)\, Y(\tau_{j-1}^k, \tau_j^k))^* Y(\tau_0^k, \tau_{i-1}^k)\, Y(\tau_{i-1}^k, \tau_i^k)| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n_k} d^2(Y(\tau_0^k, \tau_{j-1}^k))\, d^2(Y(\tau_{j-1}^k, \tau_j^k)).$$

Таким образом, оценка квадрата нормы выражения (6) не превышает величину

$$4\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_k} d^2(Y(\tau_0^k, \tau_{j-1}^k))\, d^2(Y(\tau_{j-1}^k, \tau_j^k)) \leqslant$$

$$\leqslant 4 \sup_k d^2(Y(t_{k-1}, t_k))\, d^2(Y(s, t)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Отсюда следует, что существует предел (5) по любой монотонной последовательности разбиений. Независимость предела от последовательности разбиений следует из работы [5, с. 222]. Так как $Y_0(s, t)$ — стохастическая полугруппа, непрерывная в смысле

$$\mathbf{M}\sigma(Y_0(s, t)) = \lim \sum \mathbf{M}\sigma(Y^2(t_{k-1}, t_k)) \leqslant d^2(Y(s, t)) \to 0, \quad |s - t| \to 0$$

и не имеющая скачков больше некоторого C_1, то она непрерывна в норме $d(\cdot)$. Покажем теперь, что $\mathcal{Y}(s, t) = Y_0(s, t) - \mathbf{M}Y_0(s, t) + 2Y(s, t)$.

Для этого убедимся, что $Y_0(s, t) = \lim \sum\limits_{k=1}^{n} (X(t_{k-1}, t_k) - E)^2$ (предел в норме $d(\cdot)$). Оценим разность

$$d\left(\sum_{k=1}^{n} Y^2(t_{k-1}, t_k) - \sum_{k=1}^{n} (X(t_{k-1}, t_k) - E)^2\right) =$$

$$= d\left(\sum_{k=1}^{n} [(Y(t_{k-1}, t_k) - X(t_{k-1}, t_k) + E + X(t_{k-1}, t_k) - E)^2 - \right.$$

$$\left. - (X(t_{k-1}, t_k) - E)^2]\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} d(Y(t_{k-1}, t_k) - X(t_{k-1}, t_k) + E)^2 +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{n} d((X(t_{k-1}, t_k) - E)(Y(t_{k-1}, t_k) - X(t_{k-1}, t_k) + E)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{M}\sigma^4(Y(t_{k-1}, t_k) - X(t_{k-1}, t_k) + E))^{1/2} +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{M}\sigma^4(X(t_{k-1}, t_k) - E))^{1/4} (\mathbf{M}\sigma^4(Y(t_{k-1}, t_k) - X(t_{k-1}, t_k) + E)))^{1/4} \leqslant$$

$$\leqslant R \max_k (\mathbf{M}\sigma^4(Y(t_{k-1}, t_k) - X(t_{k-1}, t_k) + E))^{1/4} +$$

$$+ 2R \max_k (\mathbf{M}\sigma^4(X(t_{k-1}, t_k) - E))^{1/4} \to 0.$$

Это следует из того, что для любого m (см. [1], теоремы 1.6, 1.6′ и замечание 2.6) $\mathbf{M}\sigma^m(Y(s, t)) \to 0$, $\mathbf{M}\sigma^m(X(s, t) - E)) \to 0$, $|s - t| \to 0$. Так как

$$\mathcal{Y}(s, t) = \lim \sum_{k=1}^{n} (X^2(t_{k-1}, t_k) - \mathbf{M}X^2(t_{k-1}, t_k)) =$$

$$= \lim \sum_{k=1}^{n} (X(t_{k-1}, t_k) - E)^2 - \mathbf{M}(X(t_{k-1}, t_k) - E)^2 +$$

$$+ 2(X(t_{k-1}, t_k) - E) = Y_0(s, t) - \mathbf{M}Y_0(s, t) + 2Y(s, t),$$

то $\mathcal{Y}(s, t)$ — аддитивная стохастическая полугруппа.

Проверим выполнение условия (4). Оценим выражение

$$d(\mathcal{Y}(t_{k-1}, t_k) - (X(t_{k-1}, t_k) - E)^2 - 2(X(t_{k-1}, t_k) - E) +$$

$$+ \mathbf{M}(X(t_{k-1}, t_k) - E)^2) = d\left(\lim \sum_{i=1}^{n_k} Y^2(\tau_{i-1}, \tau_i) - \mathbf{M}Y^2(\tau_{i-1}^k, \tau_i^k) + \right.$$

$$+ 2Y(t_{k-1}, t_k) - X(t_{k-1}, t_k) + E - (X(t_{k-1}, t_k) - E)^2 +$$

$$\left. + \mathbf{M}(X(t_{k-1}, t_k) - E)^2\right) \leqslant 2d\left(\lim \sum_{i=1}^{n_k} Y^2(\tau_{i-1}, \tau_i) - Y^2(t_{k-1}, t_k)\right) +$$

$$+ 2d(Y(t_{k-1}, t_k) - X(t_{k-1}, t_k) + E) + 2d(Y^2(t_{k-1}, t_k) - (X(t_{k-1}, t_k) - E)^2) \leqslant$$

$$\leqslant 2d^2(Y(t_{k-1}, t_k)) + 2d(Y(t_{k-1}, t_k) - X(t_{k-1}, t_k) + E) +$$

$$+ (\mathbf{M}\sigma^4(Y(t_{k-1}, t_k) - X(t_{k-1}, t_k) + E))^{1/2} + 2(\mathbf{M}\sigma^4(X(t_{k-1}, t_k) - E))^{1/4} \times$$

$$\times \mathbf{M}\sigma^4(Y(t_{k-1}, t_k) - X(t_{k-1}, t_k) + E).$$

Так как

$$2\sup_{\{t_k\}}\sum_{k=1}^{n} d^2(Y(t_{k-1},t_k))+2d(Y(t_{k-1},t_k)-X(t_{k-1},t_k)+E)\leqslant$$
$$\leqslant 2d^2(Y(s,t))+2C_T d^2(Y(s,t)),\quad C_T=\text{const},$$

то, следовательно, условие (4) выполняется. Теперь покажем, что существует неслучайная полугруппа $\mathbf{M}(s,t)=\lim\prod_{k=1}^{n}\mathbf{M}X^2(t_{k-1},t_k)$ (предел в обычной операторной норме).

Действительно, существует предел

$$\lim\prod_{k=1}^{n}(E+\mathbf{M}Y_0(t_{k-1},t_k))=\lim\prod_{k=1}^{n}(E+\mathbf{M}Y^2(t_{k-1},t_k)),$$

так как $\mathbf{M}Y_0(s,t)=\lim\mathbf{M}\sum_{k=1}^{n}Y^2(t_{k-1},t_k)$ и $\mathbf{M}Y^2(s,t)=\lim\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}Y^2(t_{k-1},t_k)$. Покажем, что

$$\lim\prod_{k=1}^{n}(E+\mathbf{M}Y^2(t_{k-1},t_k))=\lim\prod_{k=1}^{n}\mathbf{M}X^2(t_{k-1},t_k);$$

$$\left\|\prod_{k=1}^{n}(E+\mathbf{M}Y^2(t_{k-1},t_k))-\prod_{k=1}^{n}(E+\mathbf{M}(X(t_{k-1},t_k)-E)^2)\right\|=$$
$$=\left\|\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{k-1}(E+\mathbf{M}Y^2(t_{i-1},t_i))(\mathbf{M}Y^2(t_{k-1},t_k)-\mathbf{M}(X(t_{k-1},t_k)-E)^2)\times\right.$$
$$\left.\times\prod_{i=k+1}^{n}(E+\mathbf{M}(X(t_{i-1},t_i)-E)^2)\right\|\leqslant\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}d^2(X(t_{k-1},t_k)-E)\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}d^2(Y(t_{k-1},t_k))\right\}\sum_{k=1}^{n}[d^2(Y(t_{k-1},t_k)-X(t_{k-1},t_k)+E)+$$
$$+d(X(t_{k-1},t_k)-E)\,d(Y(t_{k-1},t_k)-X(t_{k-1},t_k)+E)].$$

Следовательно, существует смешанное произведение $X(s,t)\boxtimes X(s,t)=$ $=\lim\prod_{k=1}^{n}X^2(t_{k-1},t_k)$.

Будем говорить, что $Y(t)$ — винеровский процесс в $\mathfrak{H}$, если выполнены условия:

1) $Y(t)$ — сильный винеровский процесс в H (см. определение в [6, с. 104]);

2) $\operatorname{sp}\mathbf{M}Y^*(t)\,Y(t)=t\operatorname{sp}\mathbf{M}Y^*(1)\,Y(1)=td^2(Y(1))<\infty$. Это необходимое и достаточное условие, чтобы $Y(t)$ был оператором Гильберта—Шмидта при всех $t\in[0,T]$ (см. [6], теорема 4), а также чтобы $Y(t)$ был непрерывен в норме $d(\cdot)$:

$$d^2(Y(t)-Y(s))=\operatorname{sp}\mathbf{M}(Y(t)-Y(s))^*(Y(t)-Y(s))=$$
$$=\operatorname{sp}\mathbf{M}(Y(t)^*Y(t)-Y(t)^*Y(s))=(t-s)\,d^2(Y(1)).$$

Теорема. *Пусть $Y(t)$ — винеровский процесс в $\mathfrak{H}$, $\{e_i,\ i=\overline{1,\infty}\}$ — ортонормированный базис в H, $(Y(t)e_i,e_j)=y_{ij}(t)$, $y_{ij}(t)$, $i,j=\overline{1,\infty}$, ортогональны. Тогда существует предел в норме $d(\cdot)$*

$$X(s,t)\boxtimes X(s,t)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}X^2(t_{k-1},t_k),$$

где $X(s,t)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(E+Y(t_{k-1},t_k))$, $Y(s,t)=Y(t)-Y(s)$, $s=t_0<t_1<\ldots$

$$\ldots<t_n=t.$$

Доказательство. Покажем, что выполняются условия леммы. Достаточно показать, что

$$\mathbf{M}\sigma^4(X(t)-E-Y(t))\leqslant ct^4,\quad c=\mathrm{const},\quad X(t)=X(0,t),\tag{7}$$

$$((X(t)-E-Y(t))e_i,e_j)=x_{ij}(t)-\delta_{ij}-y_{ij}(t),\tag{8}$$

где $x_{ij}(t)=(X(t)e_i,e_j)$.

Обозначим правую часть (8) через $a_{ij}(t)$. Справедливо равенство

$$a_{ij}(t)=\int_0^t\sum_{r=1}^{\infty}(x_{ir}(u)-\delta_{ir})\,y_{rj}(du).$$

Это интегральное уравнение, связывающее $X(s,t)$ и $Y(s,t)$ (см. [1]) в координатной форме. Таким образом, выражение (7) имеет вид $\mathbf{M}\left(\sum_{i,j=1}^{\infty}a_{ij}^2(t)\right)^2\leqslant ct^4$. Применим формулу Ито к функции $f(a_{ij},\ i,j=\overline{1,\infty})=\left(\sum_{i,j=1}^{\infty}a_{ij}^2\right)^2$. Вычислим ее первые и вторые производные:

$$f'_{a_{ij}}=4\left(\sum_{i,j=1}^{\infty}a_{ij}^2\right)a_{ij},\ f''_{a_{ij},a_{km}}=8a_{ij}a_{km}\ \text{при}\ \{i,j\}\neq\{k,m\},$$

$$f''_{a_{ij},a_{ij}}=4\left(\sum_{i,j=1}^{\infty}a_{ij}^2\right)+8a_{ij}^2.$$

После усреднения формулы Ито имеем следующее выражение:

$$\mathbf{M}f(a_{ij},\ i,j=\overline{1,\infty})=4\mathbf{M}\int_0^t\sum_{i,j,k,m}a_{ij}(u)\,a_{km}(u)\,d\langle a_{ij},a_{km}\rangle_u+$$

$$+2\mathbf{M}\int_0^t\left(\sum_{i,j}a_{ij}^2(u)\right)\sum_{i,j}d\langle a_{ij},a_{ij}\rangle_u.$$

Пусть $\mathbf{M}y_{rj}^2(t)=b_{rj}^2(t)$, $\sum_j b_{rj}^2\leqslant b$, тогда формула Ито (усредненная) примет следующий вид:

$$\mathbf{M}\sigma^4(X(t)-E-Y(t))=4\mathbf{M}\int_0^t\sum_{i,j,k}(x_{ij}(u)-\delta_{ij}-y_{ij}(u))\times$$

$$\times(x_{kj}(u)-\delta_{kj}-y_{kj}(u))\sum_r(x_{ir}(u)-\delta_{ir})(x_{kr}(u)-\delta_{kr})\,b_{rj}^2du+$$

$$+2\mathbf{M}\int_0^t\sum_{i,j}(x_{ij}(u)-\delta_{ij}-y_{ij}(u))^2\sum_{i,j,r}(x_{ir}(u)-\delta_{ir})^2\,b_{rj}^2du\leqslant$$

$$\leqslant 4b\mathbf{M}\int_0^t\sum_{i,k}((X(u)-E-Y(u))(X(u)-E-Y(u))^*e_i,e_k)\times$$

$$\times((X(u)-E)(X(u)-E)^*e_i,e_k)\,du+2b\mathbf{M}\int_0^t\sum_i\sum_j((X(u)-E-Y(u))\times$$

$$\times (X(u) - E - Y(u))^* e_j, e_j) ((X(u) - E)(X(u) - E)^* e_i, e_i)\, du \leqslant$$

$$\leqslant 6b \int_0^t \mathbf{M}\sigma^2 (X(u) - E - Y(u))\, \sigma^2 (X(u) - E)\, du \leqslant$$

$$\leqslant 6b \int_0^t (\mathbf{M}\sigma^4 (X(u) - E - Y(u))^{1/2} (\mathbf{M}\sigma^4 (X(u) - E))^{1/2}\, du.$$

Таким образом, получено интегральное неравенство

$$\mathbf{M}\sigma^4 (X(t) - E - Y(t)) \leqslant c_1 \int_0^t (\mathbf{M}\sigma^4 (X(u) - E - Y(u))^{1/2} (\mathbf{M}\sigma^4 (X(u) - E))^{1/2}\, du. \tag{9}$$

Аналогичное неравенство можно получить для $\mathbf{M}\sigma^4 (X(t) - E)$:

$$\mathbf{M}\sigma^4 (X(t) - E) \leqslant c_2 \int_0^t (\mathbf{M}\sigma^4 (X(u) - E))^{1/2} (\mathbf{M}\, \| X(u) \|^4)^{1/2}\, du \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant c_0 c_2^{1+1/2+\ldots+1/2^k} \int_0^t \left(\int_0^{t_1} \ldots \left(\int_0^{t_k} (\mathbf{M}\sigma^4 (X(t_{k+1}) - E)^{1/2}\, dt_{k+1})^{1/2} \ldots dt_2 \right)^{1/2} dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant c_2^2 c_0 \prod_{i=1}^{k} (2^i/2^{i+1} - 1)^{1/2^{k-i}} \int_0^t t_1^{(2^k-1)/2^k} dt_1 \leqslant c_0 c_2^2 e_0^{2R} \int_0^t t_1 dt_1 \to c_3 t^2,$$

где $\sup\limits_u (\mathbf{M}\, \| X(u) \|^4)^{1/2} \leqslant c_0$, $\quad R = \sup\limits_{1/2 \leqslant x \leqslant 2/3} |\ln x|$.

Подставляя полученную оценку в правую часть (9), получаем

$$\mathbf{M}\sigma^4 (X(t) - E - Y(t)) \leqslant c_4 \int_0^t (\mathbf{M}\sigma^4 (X(u) - E - Y(u)))^{1/2}\, u du \leqslant$$

$$\leqslant c_4^2 k_1 \int_0^t \left(\int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{k-1}} \left(\int_0^{t_k} t_{k+1} dt_{k+1} \right)^{1/2} t_h dt_h \right)^{1/2} \ldots t_2 dt_2 \Bigg)^{1/2} t_1 dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant c_4^2 k_1 \prod_{i=0}^{k} (2^{i-1}/2^{i+1} - 1)^{1/2^{k-i}} \int_0^t t_1^{(2^k-1)/2^{k-1}} t_1 dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant c_4^2 k_1 e^{2R} \int_0^t t_1^3 t_1^{2-1/k-1}\, dt_1 \to ct^4,$$

где $R = \sup\limits_{1/4 \leqslant x \leqslant 1/3} |\ln x|$. Теорема доказана.

1. *Буцан Г. П.* Стохастические полугруппы.— Киев : Наук. думка, 1977.— 213 с.
2. *Буцан Г. П., Буцан С. П.* Неоднородные стохастические полугруппы // Укр. мат. журн.— 1981.— 33, № 4.— С. 437—443.
3. *Скороход Т. А.* О замыкании стохастических полугрупп // Вероятностные распределения в бесконечномерных пространствах.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978.— С. 144—153.
4. *Каратаева Т. В., Скороход Т. А.* Предельная теорема для произведений случайных операторов // Проблемы теории вероятностных распределений.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983.— С. 67—75.
5. *Буцан Г. П.* Об инфинитезимальных полугруппах для одного класса стохастических полугрупп // Укр. мат. журн.— 1983.— 35, № 2.— С 221—224.
6. *Скороход А. В.* Случайные линейные операторы.— Киев : Наук. думка, 1978.— 200 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 19.04.85,
после доработки — 13.01.86