УДК 517.432

Ю. М. Березанский, Н. В. Жернаков, Г. Ф. Ус

Операторные стохастические интегралы

Известно, что построение интеграла Лебега от операторнозначной функции по операторнозначной мере вызывает трудности (см., например, [1, 2; 3, гл. 3, § 2, п. 1]). В настоящей статье строится и изучается операторный «стохастический» интеграл вида

$$\int_0^\tau A(t)\,dE(t) = B(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}_+^1 = (0, \infty), \tag{1}$$

где $A=(A(t))_{t\in\mathbb{R}^1_+}$ — семейство коммутирующих нормальных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $\mathscr{B}(\mathbb{R}^1_+)\ni\delta\mapsto E(\delta)$ — разложение единицы (р. е.) в H, частично коммутирующее с A в том смысле, что $\forall t>0$ $\forall\delta\in\mathscr{B}((t,\infty))$ $A(t)$ коммутирует с $E(\delta)$ (т. е. р. е. оператора $A(t)$ коммутирует с $E(\delta)$; здесь и ниже $\mathscr{B}(R)$ обозначает σ-алгебру борелевских множеств пространства R).

Интеграл (1) обобщает понятие стохастического интеграла $\int\limits_0^\tau \xi_t d\mu_t=\eta_\tau$ по квадратично интегрируемому мартингалу $\mu=(\mu_t)_{t\in\mathbb{R}^1_+}$ (по поводу приведенных ниже понятий см., например, [4, 5]). А именно, пусть $(\Omega,\mathscr{F},P)$ — вероятностное пространство, $H=L_2(\Omega,\mathscr{F},P)$, $A(t)$ — оператор умножения на случайную величину $\xi_t(\omega)$, $\omega\in\Omega$, E — р. е., порожденное потоком σ-подалгебр $(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^1_+}$ σ-алгебры $\mathscr{F}$, т. е. $E(t)$ равно проектору в H на его подпространство $L_2(\Omega,\mathscr{F}_t,P)$. Для каждого $\mu_\infty\in H$ $\mu_t=E(t)\mu_\infty$ является квадратично интегрируемым мартингалом; обратно, при некоторых минимальных требованиях на исходный мартингал он может быть представлен указанным образом. Условие частичной коммутируемости, как легко видеть, сейчас эквивалентно $\mathscr{F}_t$-согласованности процесса $\xi=(\xi_t)_{t\in\mathbb{R}^1_+}$, т. е. измеримости $\forall t>0$ функции $\xi_t(\omega)$ относительно $\mathscr{F}_t$.

Оказывается, что для заданных достаточно регулярного процесса ξ и мартингала μ и так введенных по ним A и E справедливо равенство

$$\int\limits_0^\tau \xi_t d\mu_t=\Bigl(\int\limits_0^\tau A(t)\,dE(t)\Bigr)\mu_\infty,\quad \tau\in\mathbb{R}^1_+. \tag{2}$$

Построение интеграла (1) ведется по следующему пути, использующему спектральную теорию коммутирующих семейств нормальных операторов [6; 3, гл. 2]. Пусть F — совместное р. е. семейства A — некоторая проекторнозначная мера на σ-алгебре $\mathscr{C}_\sigma^{\mathfrak{A}}(\mathbb{C}^{\mathbb{R}^1_+})$, натянутой на цилиндрические множества пространства $\mathbb{C}^{\mathbb{R}^1_+}$ (состоящего из всех функций $\mathbb{R}^1_+\ni t\mapsto\lambda(t)\in\mathbb{C}^1$). Тогда $A(t)=\int\limits_{\mathbb{C}^{\mathbb{R}^1_+}}\lambda(t)\,dF(\lambda(\cdot))$, $t\in\mathbb{R}^1_+$. Подставляя это выражение в интеграл (1) (который надлежит корректно определить) и переходя с помощью формального применения теоремы Фубини к произведению мер, получаем равенство

$$B(\tau)=\int\limits_{(0,\tau]\times\mathbb{C}^{\mathbb{R}^1_+}}\lambda(t)\,d(E\times F)((t,\lambda(\cdot))),\quad \pi\in\mathbb{R}^1_+, \tag{3}$$

(здесь интегрируется функция $(0,\tau]\times\mathbb{C}^{\mathbb{R}^1_+}\ni(t,\lambda(\cdot))\mapsto\lambda(t)\in\mathbb{C}^1$).

Р. е. E и F, вообще говоря, не коммутируют, однако их частичная коммутация позволяет корректно определить $E\times F$. Подынтегральная функция в (3) будет измеримой относительно требуемой σ-алгебры, если предположить определенную регулярность функции $\mathbb{R}^1_+\ni t\mapsto A(t)$. Тем самым интеграл в (3) приобретает смысл и эта формула служит определением интеграла (1).

Другое определение интеграла (1) в случае специальных A и E, связанного равенством (2) со стохастическим интегралом, получено в [7]. Наши построения обобщают также конструкцию квантового стохастического интеграла [8, 9] для коммутативных квантовых процессов. Перейдем к более точным формулировкам.

1. Построение произведения разложений единицы. Рассмотрим семейство коммутирующих нормальных операторов в H $A=$

$= (A(t))_{t\in\mathbb{R}^1_+}$ и действующее в этом же пространстве р. е. $\mathscr{B}(\mathbb{R}^1_+)\ni\delta\mapsto E(\delta)$, частично коммутирующее с A (в определенном выше смысле). Пусть $\mathscr{C}_\sigma(\mathbb{C}^{\mathbb{R}^1_+})\ni\alpha\mapsto F(\alpha)$ — совместное р. е. семейства A. Определить обычное произведение $E\times F$ не удается, так как эти два р. е. не коммутируют. Однако его можно определить на меньшем запасе множеств, чем σ-алгебра, натянутая на все прямоугольники $\delta\times\alpha$: именно, на σ-алгебре, натянутой на такие прямоугольники, где коммутация заведомо имеет место.

Для этого рассмотрим алгебру $\mathscr{C}(\mathbb{C}^{\mathbb{R}^1_+})\subset\mathscr{C}_\sigma(\mathbb{C}^{\mathbb{R}^1_+})$ цилиндрических множеств $\alpha = Ц(t_1,\ldots,t_n;\beta)=\{\lambda(\cdot)\in\mathbb{C}^{\mathbb{R}^1_+}\mid(\lambda(t_1),\ldots,\lambda(t_n))\in\beta\}$ ($t_1,\ldots,t_n\in\mathbb{R}^1_+$ различны, их количество для данного α выбрано минимальным; $\beta\in\mathscr{B}(\mathbb{C}^n)$; $n=1,2,\ldots$). Обозначим через $\mathscr{P}$ совокупность всех прямоугольников из $\mathbb{R}^1_+\times\mathbb{C}^{\mathbb{R}^1_+}$ вида $\delta\times\alpha=\delta\times Ц(t_1,\ldots,t_n;\beta)$, где $Ц(t_1,\ldots,t_n;\beta)\in\mathscr{C}(\mathbb{C}^{\mathbb{R}^1_+})$, $\delta\in\mathscr{B}((\max_{j=1,\ldots,n}t_j,\infty))$ (если $\alpha=\mathbb{C}^{\mathbb{R}^1_+}$, то $\delta\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^1_+)$ любое, поэтому $\mathbb{R}^1_+\times\mathbb{C}^{\mathbb{R}^1_+}\in\mathscr{P}$); пусть $\mathscr{P}_\sigma$ — σ-алгебра, натянутая на $\mathscr{P}$.

Теорема 1. *Существует р. е.* $\mathscr{P}_\sigma\ni\gamma\mapsto K(\gamma)$ *такое, что*

$$K(\delta\times Ц(t_1,\ldots,t_n;\beta)) = E(\delta)\,F(Ц(t_1,\ldots,t_n;\beta)),\quad Ц(t_1,\ldots,t_n;\beta)\in\mathscr{C}(\mathbb{C}^{\mathbb{R}^1_+}),$$
$$\delta\in\mathscr{B}((\max_{j=1,\ldots,n}t_j,\infty)). \tag{4}$$

Поясним, что $E(\delta)$ и $F(Ц(t_1,\ldots,t_n;\beta))$ для множеств, фигурирующих в (4), коммутируют. Действительно, в коммутируемости достаточно убедиться при $\beta=\beta_1\times\ldots\times\beta_n$, $\beta_j\in\mathscr{B}(\mathbb{C}^1)$, но тогда $F(Ц(t_1,\ldots,t_n;\beta_1\times\ldots\times\beta_n)) = F_{t_1}(\beta_1)\ldots F_{t_n}(\beta_n)$, где F_t — р. е. оператора $A(t)$, и она следует из определения частичной коммутируемости A и E. Таким образом, доказательство теоремы сводится к доказательству возможности продолжения проекторнозначной функции множеств (4) с указанных произведений $\delta\times Ц(t_1,\ldots,t_n;\beta)$ на всю σ-алгебру $\mathscr{P}_\sigma$. Это делается с помощью должной модификации схемы доказательства теорем 1.1 — 1.3 из работы [6], при этом существенно используется то обстоятельство, что $\mathscr{P}$ является полукольцом (т. е. $\forall\gamma',\gamma''\in\mathscr{P}$ $\gamma'\cap\gamma''\in\mathscr{P}$ и если $\gamma'\subseteq\gamma''$, то $\gamma''\setminus\gamma'$ распадается в конечное число непересекающихся множеств из $\mathscr{P}$).

Р. е. K по-прежнему будем называть произведением р. е. E и F и обозначать $E\times F$. Оно определяется на $\mathscr{P}_\sigma$ равенством (4) однозначно. Можно доказать, что $E\times F$ — регулярная мера, т. е. $\forall f\in H$ скалярная мера $\mathscr{P}_\sigma\ni\gamma\mapsto((E\times F)(\gamma)f,f)_H\in[0,\infty)$ регулярна.

2. Определение и свойства операторного стохастического интеграла. Непосредственно определить интеграл (1) с помощью формулы (3), в которую подставлено построенное р. е. $E\times F$, нельзя, так как функция $R=\mathbb{R}^1_+\times\mathbb{C}^{\mathbb{R}^1_+}\ni(t,\lambda(\cdot))\mapsto\lambda(t)\in\mathbb{C}^1$ не будет измеримой относительно σ-алгебры $\mathscr{P}_\sigma$ (ее $\lambda(\cdot)$ — сечение $\{t\in\mathbb{R}^1_+\mid\lambda(t)=c\in\mathbb{C}^1\}$ — не входит, вообще говоря, в $\mathscr{B}(\mathbb{R}^1_+)$, поэтому эта функция не будет измеримой даже относительно более широкой, чем $\mathscr{P}_\sigma$, σ-алгебры, натянутой на все прямоугольники $\delta\times\alpha$, $\delta\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^1_+)$, $\alpha\in\mathscr{C}(\mathbb{C}^{\mathbb{R}^1_+})$.

Поступим следующим образом. Известно [6, § 3, п. 5], что при определенной регулярности операторов $A(t)$ по t совместное р. е. F можно считать заданным не на всем $\mathbb{C}^{\mathbb{R}^1_+}$, а на некоторой части τ этого пространства, состоящей из регулярных функций $\lambda(\cdot)$. Заменяя в интеграле (3) область интегрирования $\mathbb{R}^1_+\times\mathbb{C}^{\mathbb{R}^1_+}$ на $\mathbb{R}^1_+\times\tau$, получаем измеримость подынтегральной функции относительно соответствующей σ-алгебры.

Напомним некоторые результаты работы [6]. Пусть задано семейство $A=(A(t))_{t\in\mathbb{R}^1_+}$ коммутирующих нормальных операторов в H, или, иными словами, операторнозначная функция $A:\mathbb{R}^1_+\ni t\mapsto A(t)$, значения которой —

коммутирующие нормальные операторы. Предположим, что имеется квазиядерное оснащение

$$H_- \supseteq H \supseteq H_+ \supseteq D \tag{5}$$

пространства H, стандартно связанное с A. Это означает, что: 1) в цепочке $H_- \supseteq H \supseteq H_+$ оператор вложения $O: H_+ \to H$ Гильберта — Шмидта; 2) линейное топологическое пространство D, топологически вложенное в H_+, при любом $t \in \mathbb{R}^1_+$ входит в область определения $\mathfrak{D}(A(t))$; 3) сужения $A(t) \restriction D$, $A^*(t) \restriction D$ непрерывно действуют из D в H_+. Предположим также, что D — сепарабельный проективный предел гильбертовых пространств и что $\forall u \in D$ вектор-функция $\mathbb{R}^1_+ \ni t \mapsto A(t) u \in H_+$ слабо непрерывна слева на $\mathbb{R}^1_+$. Операторнозначную функцию A, удовлетворяющую этим требованиям, будем называть регулярной.

Согласно [6, § 3, пп. 3,5] для регулярной функции A совокупность $\tau = LC(\mathbb{R}^1_+)$ непрерывных слева функций $\mathbb{R}^1_+ \ni t \mapsto \lambda(t) \in \mathbb{C}^1$ образует множество полной внешней меры F (т. е. $\forall \alpha \in \mathcal{C}_\sigma(\mathbb{C}^{\mathbb{R}^1_+})$, $\alpha \supseteq LC(\mathbb{R}^1_+)$ мера $F(\alpha) = 1$). Можно показать, что тогда и $R' = \mathbb{R}^1_+ \times \tau = \mathbb{R}^1_+ \times LC(\mathbb{R}^1_+)$ будет полной внешней меры $K = E \times F$. Это дает возможность произвести модификацию [6, § 1, п. 9] р. е. K посредством R', т. е. ввести новое р. е. $K' = (E \times F)'$ на σ-алгебре $\mathcal{P}'_\sigma$ множеств вида $\gamma' = \gamma \cap R'$, $\gamma \in \mathcal{P}_\sigma$, равенством $K'(\gamma \cap R') = K(\gamma)$ (так как $\forall \alpha \in \mathcal{P}_\sigma$, $\alpha \supseteq R'$ мера $K(\alpha) = 1$, то это определение корректно).

Определим для регулярной функции A, частично коммутирующей с р. е. E, операторный стохастический интеграл формулой

$$\int_0^\tau A(t)\, dE(t) = \int_{(0,\tau] \times LC(\mathbb{R}^1_+)} \lambda(t)\, d(E \times F)'((t, \lambda(\cdot))) = B(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}^1_+. \tag{6}$$

Это определение уже корректно, так как нетрудно доказать, что сейчас функция $(0, \tau] \times LC(\mathbb{R}^1_+) \ni (t, \lambda(\cdot)) \mapsto \lambda(t) \in \mathbb{C}^1$ будет измерима относительно $\mathcal{P}'_\sigma$. Заменяя в (6) $(0, \tau]$ на $(0, \infty)$, получаем определение интеграла $B(\tau)$ при $\tau = \infty$.

Таким образом, $\forall \tau \in \mathbb{R}^1_+ \cup \{\infty\}$ интеграл (6) является нормальным, вообще говоря, неограниченным оператором в H. Поскольку он определяется спектральным интегралом, то его область определения

$$\mathfrak{D}(B(\tau)) = \Big\{ f \in H \,\Big|\, \int_{(0,\tau] \times LC(\mathbb{R}^1_+)} |\lambda(t)|^2 d((E \times F)'((t, \lambda(\cdot))) f, f)_H < \infty \Big\},$$
$$\tau \in \mathbb{R}^1_+ \cup \{\infty\}. \tag{7}$$

Теорема 2. *Операторный стохастический интеграл* (6), (7) *обладает следующими свойствами:* 1) $\forall \tau \in \mathbb{R}^1_+$ $B(\tau) = B(\infty) E((0, \tau]) = E((0, \tau]) B(\infty)$; 2) $\forall \tau, \sigma \in \mathbb{R}^1_+$ *операторы* $B(\tau)$ *и* $B(\sigma)$ *коммутируют, причем* $B(\tau) B(\sigma) = B^2(\min\{\tau, \sigma\})$; 3) $\forall \delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1_+)$ $\forall \tau \in \mathbb{R}^1_+$ *подпространство* $E(\delta) H$ *приводит* $B(\tau)$; 4) $\forall t \in \mathbb{R}^1_+$ $\forall \tau \in \mathbb{R}^1_+$ $t \leqslant \tau$ *операторы* $A(t)$ *и* $B(\tau)$ *коммутируют*; 5) *пусть* A_1, A_2 — *регулярные операторнозначные функции, связанные с оснащением* (5), *такие, что и функция* $\mathbb{R}^1_+ \ni t \mapsto A_1(t) + A_2(t)$ *регулярная, связанная с* (5); *тогда интеграл* (6), *в котором* $A(t)$ *заменено на сумму* $A_1(t) + A_2(t)$, *равен сумме интегралов от* $A_1(t)$ *и* $A_2(t)$; 6) *пусть* $\mathbb{C}^1 \ni z \mapsto f(z) \in \mathbb{C}^1$ *непрерывна и такова, что операторнозначная функция* $\mathbb{R}^1_+ \ni t \mapsto f(A(t))$ *регулярна и связана с* (5). *Тогда*

$$f\Big(\int_0^\tau A(t)\, dE(t)\Big) = \int_0^\tau f(A(t))\, dE(t), \quad \tau \in \mathbb{R}^1_+ \cup \{\infty\}.$$

(Здесь, как и всюду в этой статье, под коммутируемостью нормальных операторов понимается коммутируемость их разложений единицы.) Приведем следующий пример. Обозначим через $\varkappa_\delta$ характеристическую функцию множества δ и положим $A(t)=\varkappa_{(p_1,q_1]}(t)A_1$, $t\in\mathbb{R}^1_+$, где A_1 — некоторый нормальный оператор в H, а $0<p_1<q_1<\infty$ фиксированы. Из спектрального представления для A_1 следует наличие квазиядерного оснащения (5), стандартно связанного с A_1 (см., например, [10]). Легко видеть, что введенная функция A будет регулярной, если ее рассматривать с этим оснащением. Пусть E — некоторое р. е. на $\mathbb{R}^1_+$. Частичная коммутируемость A и E сейчас означает коммутируемость A_1 и $E(\delta)$ $\forall\delta\in\mathcal{B}((p_1,\infty))$. Нетрудно подсчитать, что интеграл (6), как и следует ожидать, равен $A_1E((p_1,\min\{\tau,q_1\}])$. Аналогичная ситуация будет и в случае конечного числа n полуинтервалов $(p_j,q_j]$ и нормальных операторов A_j; сейчас должна предполагаться коммутируемость A_j и $E(\delta)$ $\forall\delta\in\mathcal{B}((p_j,\infty))$, $j=1,\ldots,n$.

3. Разложение по обобщенным собственным векторам операторного стохастического интеграла. Таким образом, $B=(B(\tau))_{\tau\in\mathbb{R}^1_+}$ является семейством коммутирующих нормальных операторов и имеет смысл говорить о разложении по их совместным обобщенным собственным векторам [6]. Отметим, что р. е. G_τ оператора $B(\tau)$, $\tau\in\mathbb{R}^1_+$, на основании спектрального представления (6) имеет вид $G_\tau(\alpha)=(E\times F)'(\{(t,\lambda(\cdot))\in(0,\tau]\times LC(\mathbb{R}^1_+)\mid\lambda(t)\in\alpha\})$, $\alpha\in\mathcal{B}(\mathbb{C}^1)$.

Можно показать, что если исходная цепочка (5) стандартно связана с оператором $B(\infty)$ и $\forall\delta\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^1_+)$ оператор $E(\delta)$ непрерывно действует из H_+ в H_+, то (5) стандартно связана и с семейством B. Ниже *будем предполагать выполненными эти условия*. Заметим, что сейчас $(E(\delta))^+$ действует непрерывно из H_- в H_-, $\delta\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^1_+)$.

Оказывается, что $\forall u\in D$ вектор-функция $\mathbb{R}^1_+\ni\tau\mapsto B(\tau)u\in H_+$ в смысле слабой сходимости в каждой точке непрерывна справа и имеет предел слева. Из соотношения $B(\tau)B(\sigma)=B^2(\min\{\tau,\sigma\})$, $\tau,\sigma\in\mathbb{R}^1_+$, и этого факта, переходя к соответствующему скалярному уравнению, заключаем, что каждая точка обобщенного спектра $g(B)\subseteq\mathbb{C}^{\mathbb{R}^1_+}$ семейства B имеет вид $a\varkappa_{[b,\infty)}(\cdot)$ с некоторыми $a\in\mathbb{C}^1$, $b\in\mathbb{R}^1_+$. Более того, справедлив следующий результат.

Теорема 3. *Обобщенный спектр $g(B)\subseteq\{a\varkappa_{[b,\infty)}(\cdot)\mid a\in\mathbb{C}^1,\ b\in\mathbb{R}^1_+\}$. Пусть $\varphi\in H_-$ — обобщенный совместный собственный вектор семейства B, отвечающий собственному значению $a\varkappa_{[b,\infty)}(\cdot)$. Тогда $\psi=(E((0,\tau]))^+\varphi\in H_-$ — обобщенный собственный вектор оператора $B(\infty)$ с собственным значением $a\varkappa_{[b,\infty)}(\tau)$, $\tau\in\mathbb{R}^1_+$. Обратно, если $\varphi\in H_-$ — обобщенный собственный вектор оператора $B(\infty)$, отвечающий собственному значению a, то $\psi=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}(E((b-\varepsilon,b]))^+\varphi$ (предел существует в смысле слабой сходимости в H_-) является совместным обобщенным собственным вектором семейства B с собственным значением $a\varkappa_{[b,\infty)}(\cdot)$.*

Из этой теоремы следует, что, вообще говоря, $g(B)$ — более узкое множество, чем $\{a\varkappa_{[b,\infty)}(\cdot)\mid a\in\mathbb{C}^1,\ b\in\mathbb{R}^1_+\}$: если $a\varkappa_{[b,\infty)}(\cdot)\in g(B)$, то a и b должны быть такими, чтобы $\forall\tau\in\mathbb{R}^1_+$ $a\varkappa_{[b,\infty)}(\tau)\in g(B(\infty))$.

4. Сравнение со стохастическим интегралом по мартингалу. Пусть $(\Omega,\mathcal{F},P)$ — вероятностное пространство, $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^1_+}$ — непрерывный справа поток σ-подалгебр $\mathcal{F}$, полных относительно P. В пространстве $H=L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$ этот поток порождает неубывающую непрерывную справа проекторнозначную функцию $E(t)$, где $E(t)$ — проектор в H на $L_2(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$ (иными словами, $E(t)$ — оператор условного среднего относительно $\mathcal{F}_t$). Рассмотрим $\mathcal{F}_t$-мартингал $\mu=(\mu_t)_{t\in\mathbb{R}^1_+}\subset H$ такой, что P — почти все его траектории $\mathbb{R}^1_+\ni t\mapsto\mu_t(\omega)\in\mathbb{C}^1$ непрерывны справа и имеют конечный предел слева. Как известно [4, гл. 1, § 3, гл. 2, § 3; 5, гл. 1, п.6], такой мартингал является квадратично интегрируемым тогда и только тогда, когда $\exists \mu_\infty \in H$: $\forall t \in \mathbb{R}^1_+$ $\mu_t(\omega) = (E(t)\mu_\infty)(\omega)$.

Пусть $\xi = (\xi_t)_{t \in \mathbb{R}^1_+}$ — $\mathcal{F}_t$-согласованный процесс. Этот процесс порождает семейство коммутирующих нормальных операторов $A(t)$ умножения на $\xi_t(\cdot)$ в H, $t \in \mathbb{R}^1_+$. Как отмечалось, условие частичной коммутируемости $A = (A(t))_{t \in \mathbb{R}^1_+}$ и E сейчас эквивалентно $\mathcal{F}_t$-согласованности ξ. Предположим дополнительно, что A — регулярная операторнозначная функция (это определенное ограничение на процесс). Тогда, разумеется, существует интеграл (7). Утверждается, что справедливо равенство (2), если только $\xi_t(\omega)$ как функция точки (t, ω) входит в пространство $L_2 = L_2(\mathbb{R}^1_+ \times \Omega, \mathcal{C}_\sigma, \langle\mu, \mu\rangle\, dt \times P)$, где $\mathcal{C}_\sigma$ — σ-алгебра, натянутая на прямоугольники $\delta \times \alpha$ вида $\alpha \in \mathcal{F}_t$, $\delta \in \mathcal{B}((t, \infty))$, $t \in \mathbb{R}^1_+$, а $\langle\mu, \mu\rangle(t)$ — характеристика мартингала μ (по существу это утверждение вытекает из изложенного в конце п. 2; поясним также, что при невыполнении указанного сейчас условия $\xi \in L_2$ μ_∞ не входит в область определения интеграла (6), хотя сам интеграл и существует).

В случае ступенчатого процесса ξ (т. е. функции $\xi_t(\omega)$ вида $\xi_t(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} \varkappa_{(t_j, t_{j+1}]}(t)\, \zeta_j(\omega)$, где $0 = t_0 < t_1 < \ldots$ — фиксированные точки на $\mathbb{R}^1_+$, $\varkappa_\alpha$ — характеристическая функция множества α, $\zeta_j \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$) оснащение (5) всегда существует [10] и соответствующая функция A всегда регулярна. Для таких случайных процессов $\xi \in L_2$ существует оба интеграла в (2) и справедливо указанное равенство. Левый интеграл (2) известной процедурой продолжается до интеграла для общих $\xi \in L_2$, в то время как соответствующий операторный интеграл перестает, вообще говоря, существовать.

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн С. Г.* Интегрирование и дифференцирование функций эрмитовых операторов и приложение к теории возмущений // Тр. семинара по функцион. анализу.— Воронеж: Воронеж. ун-т, 1956.— 1.— С. 81—105.
2. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Двойные операторные интегралы Стильтьеса // Пробл. мат. физики.— Ленинград : Ленингр. ун-т, 1966.— 1.— С. 33—67.
3. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— Киев : Наук. думка, 1978.— 360 с.
4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т.— М. : Наука, 1975.— Т. 3.— 496 с.
5. *Ikeda N., Watanabe S.* Stochastic differential equations and diffusion processes.— Amsterdam; Tokyo : North-Holland, Kodansha, 1981.— 464 p.
6. *Березанский Ю. М.* Проекционная спектральная теорема // Успехи мат. наук.— 1984.— 39, № 4.— С. 3—52.
7. *Cuculescu I.* Spectral families and stochastic integrals // Rev. roum. math. pures et appl.— 1970.— 15, N 2.— P. 201—223.
8. *Barnett C., Streater R. F., Wilde I. F.* The Itô—Clifford integral // J. Funct. Anal.— 1982.— 48, № 2.— P. 172—212.
9. *Streater R. F.* Quantum stochastic integrals // Acta phys. austr.— 1984.— 26.— P. 53—74.
10. *Березанский Ю. М.* О проекционной спектральной теореме // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, № 2.— С. 146—154.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 02.01.86