УДК 519.21

И. К. Мацак

К закону повторного логарифма

1. Пусть B — сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, $\{X_k\}_1^\infty$ — последовательность независимых случайных величин в B, $S_n = \sum_1^n X_k$. Изучению асимптотического поведения почти наверное (п. н.) ве-

личины $\| S_n \|$ при $n \to \infty$ посвящено много работ (см, например, [1, 2]). Классические результаты А. Я. Хинчина и А. Н. Колмогорова о законе повторного логарифма содержатся в [3].

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть* $0 < c < 1/2$, $n_0 > 1$, $B_n \geqslant \sum_1^n M \| X_k \|^2 \uparrow \infty$ *и п. н.* $\| X_n \| \leqslant c (B_n / \ln n)^{1/2} \uparrow \infty$, $n > n_0$. *Тогда п. н.*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} | \| S_n \| - M \| S_n \| | / (16 B_n \ln n)^{1/2} \leqslant 1. \tag{1}$$

Теорема 2. *Пусть* $\{X_k\}_1^\infty$ *одинаково распределены,* $MX_1 = 0$, $M \| X_1 \|^2 = \sigma^2$, *при некотором* $\delta > 0$ $M \| X_1 \|^{2+\delta} < \infty$. *Тогда п. н.*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} | \| S_n \| - M \| S_n \| | / (16 \sigma^2 n \ln n)^{1/2} \leqslant 1, \tag{2}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| S_n \| / (M \| S_n \| + (16 \sigma^2 n \ln \ln n)^{1/2}) \leqslant 1. \tag{3}$$

Некоторые результаты, близкие к неравенству (3), получены в [2]. В приводимых ниже следствиях предполагается, что условия теоремы 2 выполняются.

Следствие 1 [1]. *Пусть* $M \| S_n \| = O (n \ln \ln n)^{1/2}$. *Тогда* $\overline{\lim_{n\to\infty}} \| S_n \| / (n \ln \ln n)^{1/2} < \infty$.

Отметим, что в [1] получен более точный результат.

Следствие 2. А. *Если* $\lim_{n\to\infty} M \| S_n \| / (n \ln \ln n)^{1/2} = \infty$, *то п. н.* $\overline{\lim_{n\to\infty}} \| S_n \| / M \| S_n \| = 1$.

Б. *Если* $\lim_{n\to\infty} M \| S_n \| / (n \ln n)^{1/2} = \infty$, *то п. н.* $\lim_{n\to\infty} \| S_n \| / M \| S_n \| = 1$.

3. Вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть* Y — *случайная величина, удовлетворяющая неравенству* $M \exp (tY) \leqslant K \exp (Gt^2/2)$, $|t| \leqslant T$. *Тогда* $P (|Y| > x) \leqslant 2K \exp (-x^2/2G)$, $0 \leqslant x \leqslant GT$.

Доказательство леммы 1 содержится в доказательстве теоремы 15 [3, с. 70].

Лемма 2. *Пусть* $X_1, \ldots, X_n$ — *независимые случайные величины в* B — *удовлетворяют условию*

$$M \| X_j \|^k \leqslant k! \sigma_j^2 L^{k-2} / 2, \quad k \geqslant 2. \tag{4}$$

Тогда

$$P (| \| S_n \| - M \| S_n \| | > x) \leqslant 2 \exp (-x^2 / 16 B_n), \quad 0 \leqslant x \leqslant 2B_n / L, \tag{5}$$

где $\sigma_j^2 \geqslant M \| X_j \|^2$, $B_n = \sum_1^n \sigma_j^2$, $S_n = \sum_1^n X_k$.

Оценка (5) является некоторым видоизменением известной оценки В. В. Юринского [4]. Отметим кратко изменения в методе работы [4]. Если $M_s \eta = M (\eta / X_1, \ldots, X_{s-1})$, $M_1 \eta = M \eta$, $\zeta_s = M_{s+1} \| S_n \| - M_s \| S_n \|$, то $\| S_n \| - M \| S_n \| = \sum_1^n \zeta_s$. Тогда [4] выполняются соотношения

$$M_s | \zeta_s |^k \leqslant 2^k M \| X_s \|^k, \quad k \geqslant 2, \quad M_s \zeta_s = 0 \text{ п. н.} \tag{6}$$

Отсюда, учитывая неравенство (4), получаем $M_s \exp (t \zeta_s) \leqslant \exp (4 t^2 \sigma_s^2)$, $|t| \leqslant 1/4L$ (аналогичное доказательство см. [3, с. 73, 74]). Положим $Y = \| S_n \| - M \| S_n \|$. Из последнего неравенства следует

$$M \exp (tY) \leqslant \exp (4 t^2 B_n); \ |t| \leqslant 1/4L. \tag{7}$$

Применение леммы 1 завершает доказательство.

4. Доказательства основных результатов. Неравенство (1) является следствием леммы 2. Действительно, положим $L_n = (c^2 B_n/\ln n)^{1/2}$. В условиях теоремы 1 из неравенства (5) при $\varepsilon \in (0, 4/c^2 - 16)$

$$P(|\|S_n\| - M\|S_n\|| \geqslant ((16+\varepsilon)B_n \ln n)^{1/2}) \leqslant 2n^{-(1+\varepsilon/16)}.$$

Лемма Бореля — Кантелли дает неравенство

$$|\|S_n\| - M\|S_n\||/((16+\varepsilon)B_n \ln n)^{1/2} \leqslant 1 \text{ п. н.}$$

Отсюда следует оценка (1), поскольку ε — произвольное число из интервала $(0, 4/c^2 - 16)$.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Положим

$$X_n' = \begin{cases} X_n, & \|X_n\| \leqslant L_n' \\ 0, & \|X_n\| > L_n' \end{cases}, \quad L_n' = (c^2\sigma^2 n/\ln n)^{1/2}, \quad n \geqslant 2,$$

$$0 < c < 1/2, \quad S_n' = \sum_2^n X_k'$$

Имеем $\sum\limits_{n\geqslant 2} P(X_n' \neq X_n) \leqslant \sum\limits_{n\geqslant 2} M\|X_1\|^{2+\delta}/(L_n')^{2+\delta} < \infty$. Поэтому п. н.

$$\sup_{n\geqslant 1} |\|S_n\| - \|S_n'\|| < \infty. \tag{8}$$

К последовательности X_n' применима теорема 1 с $B_n = \sigma^2 n$, т. е. п. н.

$$|\|S_n'\| - M\|S_n'\||/(16\sigma^2 n \ln n)^{1/2} \leqslant 1. \tag{9}$$

Из определения X_n' при достаточно малом $\delta > 0$ получаем $M\|X_1\|^{2+\delta} \geqslant M\|X_n - X_n'\|^{2+\delta} \geqslant M\|X_n - X_n'\|(L_n')^{1+\delta}$, следовательно,

$$|M\|S_n\| - M\|S_n'\|| \leqslant M\sum_1^n \|X_k - X_k'\| \leqslant C \ln n^{(1+\delta)/2} n^{(1-\delta)/2}. \tag{10}$$

Из последней оценки и неравенства (8), (9) следует соотношение (2).

Докажем неравенство (3). Пусть $n > 3$,

$$X_n'' = \begin{cases} X_n, & \|X_n\| \leqslant L_n'' \\ 0, & \|X_n\| > L_n'' \end{cases}, \quad L_n'' = (c^2\sigma^2 n/\ln\ln n)^{1/2}, \quad S_n'' = \sum_{k=3}^n X_k'', \ 0 < c < 1/2.$$

Предположим, что выполняется неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|S_n''\|/(M\|S_n''\| + (16\sigma^2 n \ln\ln n)^{1/2}) \leqslant 1 \text{ п. н.} \tag{11}$$

Повторяя приведенные выше выкладки, получаем соотношения, аналогичные (8)—(10) для S_n''. Тогда из неравенства (11) следует (3). Таким образом, достаточно доказать (11).

По предположению $MX_n = 0$. Следовательно, $\|MX_n''\| = \|M(X_n'' - X_n)\| \leqslant M\|X_1\|^{2+\delta}/(L_n'')^{1+\delta}$, $\sum\limits_1^n M\|X_k''\| \leqslant Cn^{1/2-\varepsilon}$, $1/2 > \varepsilon > 0$, поэтому при доказательстве неравенства (11) можно считать, что $MX_n'' = 0$. Отсюда имеем $\{S_k''\}_1^n$ — мартингал, а $\{\|S_k''\|\}_1^n$ — субмартингал [5]. Известно [6], что $\{\exp(t(\|S_k''\| - M\|S_n''\|))\}_1^n$, $t > 0$, — также субмартингал и выполняется неравенство

$$M\sup_{k\leqslant n} \exp(t)\|S_k''\| - M\|S_n''\|)) \leqslant 4M\exp(t(\|S_n''\| - M\|S_n''\|)). \tag{12}$$

Из оценок (7), (12) и леммы 1 при $Y = \sup\limits_{k\leqslant n} \|S_k''\| - M\|S_n''\|$ следует

$P(\sup_{k\leqslant n}\|S_k''\|-M\|S_n''\|>x)\leqslant 8\exp(-x^2/16\sigma^2 n),\quad 0<x\leqslant(4\sigma^2 n\ln\ln n/c^2)^{1/2}$.
Тогда при достаточно больших n

$$P(\sup_{k\leqslant n}\|S_k''\|\geqslant M\|S_n''\|+(4\sigma^2 n\ln\ln n/c^2)^{1/2})\leqslant 8(\ln n)^{-(1+\varepsilon)}\leqslant$$
$$\leqslant 16(\ln(M\|S_n''\|+(4\sigma^2 n\ln\ln n/c^2)^{1/2}))^{-(1+\varepsilon)},\quad 0<\varepsilon<(2c)^{-2}-1, \quad (13)$$

(использовалась оценка $M\|S_n''\|\leqslant\sigma n$). Известно [7], что из (13) вытекает неравенство $\overline{\lim_{n\to\infty}}\|S_n''\|/(M\|S_n''\|+(4\sigma^2 n\ln\ln n/c^2)^{1/2})\leqslant 1$ п. н. Поскольку c — любое число из интервала $(0, 1/2)$, то, следовательно, выполняется неравенство (11).

Следствия 1 и 2, Б немедленно следуют из теоремы 2. Неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|S_n\|/M\|S_n\|\geqslant 1 \quad (14)$$

из следствия 2, А можно получить, если использовать оценки [3, с. 68] $|\mu(X)-MX|\leqslant(2DX)^{1/2}$, $\mu(X)$ — медиана случайной величины X, $D\|S_n\|\leqslant\leqslant\sum_1^n M\|X_k\|^2$. Последнее неравенство содержится в работе [8]. Следовательно, $1/2\leqslant P(\|S_n\|\geqslant M\|S_n\|-(2D\|S_n\|)^{1/2})\leqslant P(\|S_n\|\geqslant M\|S_n\|-Cn^{1/2})\leqslant\lim_{m\to\infty}P(\sup_{n>m}\|S_n\|/(M\|S_n\|-Cn^{1/2})\geqslant 1)=P(\overline{\lim_{n\to\infty}}\|S_n\|/(M\|S_n\|-Cn^{1/2})\geqslant 1)$. Для доказательства (14) в условиях следствия 2 остается применить закон 0 или 1.

5. Пример. Рассмотрим последовательность случайных величин в банаховом пространстве, которая удовлетворяет условиям следствия 2, Б.Этот пример хорошо показывает отличие асимптотики $\|S_n\|$ в общем банаховом пространстве от конечномерного случая. Пусть B — пространство c_0 сходящихся к 0 последовательностей $X=\{x_i\}_1^\infty$, $\|X\|=\sup_{i\geqslant 1}|x_i|$. Тогда для любой функции $\varphi(n)\uparrow\infty$, $n\uparrow\infty$, можно построить последовательность независимых, симметричных, одинаково распределенных случайных величин X_k в c_0, $\|X_k\|=1$, что п. н. $\overline{\lim_{n\to\infty}}\|S_n\|\varphi(n)/n=\infty$.

Положим $X_1=\{\varepsilon_i c_i\}_1^\infty$, $\{\varepsilon_i\}_1^\infty$ — последовательность независимых симметричных величин Бернулли $P(\varepsilon_i=+1)=P(\varepsilon_i=-1)=1/2$; $\{c_i\}_1^\infty$ — вещественная последовательность, $c_i=1$, $i\leqslant i_0$; $c_i=(\varphi((\ln i)/2))^{-1/2}$, $i>i_0$; X_j, $j>1$, независимые копии X_1. Если $X_j=\{\varepsilon_i^j c_i\}_{i=1}^\infty$, $j\geqslant 1$, $\tau_n=\inf(i\geqslant 1:\varepsilon_i^j=1,\ j=\overline{1, n})$, то $\sum_{n\geqslant 1}P(\tau_n>2^{2n})=$
$=\sum_{n=1}(1-2^{-n})^{2^{2n}}<\infty$ и п. н.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\tau_n 2^{-2n}\leqslant 1,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\|S_n\|\varphi(n)/n\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}c_{\tau_n}\varphi(n)\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}c_{2^{2n}}\varphi(n)=\infty.$$

1. *Acosta A.*, *Kuelbs J.*, *Ledoux M.* An inequality for the law of the iterated logaritm // Lect. Notes Math.— 1983.— **990**.— P. 1—29.
2. *Kuelbs J.*, *Zinn J.* Some results on LIL behavior // Ann. Probab.— 1983.— **11**, N 3.— P. P. 506—557.
3. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин.— М. : Наука, 1972.— 414 с.
4. *Юринский В. В.* Показательные оценки для больших уклонений // Теория вероятностей и ее применения.— 1974.— **19**, № 1.— С. 152—153.
5. *Булдыгин В. В.* Сходимость случайных элементов в топологических пространствах.— Киев : Наук. думка, 1980.— 240 с.
6. *Гихман И. И.*, *Скороход А. В.* Теория случайных процессов.— М. : Наука, 1971.— 661 с.
7. *Петров В. В.* Последовательности m-ортогональных случайных величин // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та.— 1982.— **119**.— С. 198—202.
8. *Пинелис И. Ф.* Некоторые предельные теоремы для больших уклонений бесконечномерных случайных блужданий // Теория вероятностей и ее применения.— 1981.— **26**, № 3.— С. 645—646.

Киев. ун-т

Получено 25.03.85,
после доработки — 06.02.86