УДК 517.948.35

В. Е. Слюсарчук

О представлении ограниченных решений линейных дискретных систем

Пусть G — счетная аддитивная группа; E — конечномерное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_E$; $\mathfrak{M}$ — банахово пространство определенных на G E-значных ограниченных функций $x = x(g)$ с нормой $\|x\|_{\mathfrak{M}} = \sup\limits_{g\in G}\|x(g)\|_E$; $[X, Y]$ — банахово пространство линейных непрерывных операторов $A: X \to Y$ с нормой $\|A\|_{[X,Y]} = \sup\{\|Ax\|_Y : \|x\|_X = 1\}$ (X и Y — банаховы пространства).

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{\alpha\in G} A_\alpha(g)\, x(g+\alpha) = f(g), \tag{1}$$

где $A_\alpha(g) \in [E, E]$ $\forall \alpha, g \in G$,

$$\sup_{g\in G}\sum_{\alpha\in G}\|A_\alpha(g)\|_{[E,E]} < \infty, \tag{2}$$

а $x(g)$ и $f(g)$ — искомый и заданный элементы пространства $\mathfrak{M}$.

В данной работе в предположении, что оператор $(\mathfrak{A}x)(g) = \sum\limits_{\alpha\in G} A_\alpha(g) \times \times x(g+\alpha)$ имеет непрерывный обратный, решается задача о представлении ограниченных решений уравнения (1). Полученные результаты усиливают и обобщают ряд утверждений теории разностных уравнений [1] и дополняют результаты работы [2] о дискретных системах.

Основную роль при исследовании управления (1) играют c-непрерывные операторы.

1. c-Непрерывные операторы. Оператор $\mathfrak{B} \in [\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$ называется c-непрерывным, если для каждых $\varepsilon > 0$ и конечного $M \subset G$ найдутся $\delta > 0$ и конечное $Q \subset G$ такие, что $\|(\mathfrak{B}x)(g)\|_E < \varepsilon$ $\forall g \in M$, если только $\|x(g)\|_E < \delta$ $\forall g \in Q$ и $\|x\|_{\mathfrak{M}} \leqslant 1$.

Примером c-непрерывного оператора является оператор $\mathfrak{A}$ на основании соотношения (2).

Понятие c-непрерывного оператора ввел Э. Мухамадиев [3] (в случае операторов, действующих в пространстве непрерывных и ограниченных на оси функций). c-Непрерывные операторы, действующие в пространстве $\mathfrak{M}$, впервые рассмотрены в [4]. В этой и других работах автора [5, 6] с помощью c-непрерывных операторов получены условия разрешимости линейных и слабо нелинейных дискретных уравнений в пространстве $\mathfrak{M}$.

Очевидно, что множество $\mathfrak{R}$ всех c-непрерывных элементов $A \in [\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$ является банаховой подалгеброй с единицей алгебры $[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$.

Приведем одно свойство обратимых в $[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$ элементов из $\mathfrak{R}$, позволяющее решить задачу о представлении ограниченных решений уравнения (1).

Теорема 1. *Пусть c-непрерывный оператор $\mathfrak{B} \in [\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$ имеет непрерывный обратный $\mathfrak{B}^{-1} \in [\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$. Тогда $\mathfrak{B}^{-1}$ является c-непрерывным оператором.*

Доказательство этого утверждения содержится в работе [6].

Замечание 1. В силу теоремы 1 подалгебра $\mathfrak{R}$ алгебры $[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$ является наполненной [7, с. 11].

Выясним общий вид c-непрерывного оператора $\mathfrak{B} \in [\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$.

Определим операторы $T_\alpha \in [\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$, $P_\alpha \in [E, \mathfrak{M}]$, $Q_\alpha \in [\mathfrak{M}, E]$, $\alpha \in G$ равенствами

$$(T_\alpha x)(g) = x(g+\alpha), \quad x \in \mathfrak{M},$$

$$(P_\alpha u)(g) = \begin{cases} u, & \text{если } g = \alpha, \\ 0, & \text{если } g \neq \alpha, \end{cases} \quad u \in E, \ Q_\alpha z = z(\alpha), \ z \in \mathfrak{M}.$$

Очевидно, что

$$T_\beta P_\alpha = P_{\alpha-\beta}, \quad Q_\beta T_\alpha = Q_{\alpha+\beta} \ \forall \alpha, \beta \in G. \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{B}$ — *c-непрерывный элемент пространства* $[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$. *Тогда найдутся такие* $[E, E]$*-значные функции* $B_\alpha(g)$, $\alpha \in G$, *для которых*

$$\sup_{g \in G} \sum_{\alpha \in G} \| B_\alpha(g) \|_{[E,E]} < \infty, \tag{4}$$

что

$$(\mathfrak{B}x)(g) = \sum_{\alpha \in G} B_\alpha(g)\, x(g + \alpha), \quad g \in G, \ x \in \mathfrak{M}, \tag{5}$$

или найдется $[E, E]$*-значная функция* $G(g, \alpha)$, *для которой*

$$\sup_{g \in G} \sum_{\alpha \in G} \| G(g, \alpha) \|_{[E,E]} < \infty, \tag{6}$$

что

$$(\mathfrak{B}x)(g) = \sum_{\alpha \in G} G(g, \alpha)\, x(\alpha), \quad g \in G, \ x \in \mathfrak{M}. \tag{7}$$

Аналог теоремы 2 для операторов, действующих в пространстве непрерывных и ограниченных на оси функций, приведен в [8].

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим произвольную последовательность конечных множеств $M_k \subset G$, $k \geqslant 1$, для которых $M_k \subset M_{k+1}$ $\forall k \geqslant 1$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k = G$. Из c-непрерывности оператора $\mathfrak{B}$ следует, что

$$Q_g \mathfrak{B} x = \lim_{k \to +\infty} \sum_{\alpha \in M_k} Q_g \mathfrak{B} P_\alpha x(\alpha) \tag{8}$$

$\forall x \in \mathfrak{M}$ и $g \in G$. Поэтому $\varphi(Q_g \mathfrak{B} x) = \sum_{\alpha \in G} \varphi(Q_g \mathfrak{B} P_\alpha x(\alpha))$ $\forall g \in G$, $x \in \mathfrak{M}$ и $\varphi \in S$, где $S = \{\varphi \in E^* : \| \varphi \|_{E^*} = 1\}$, и, следовательно,

$$\| \mathfrak{B} \|_{[\mathfrak{M},\mathfrak{M}]} \geqslant \sup_{g \in G} \sum_{\alpha \in G} \sup_{\|x\|_E = 1} | \varphi(Q_g \mathfrak{B} P_\alpha x) | \ \forall \varphi \in S. \tag{9}$$

Поскольку множество S компактно на основании конечномерности пространства E, то найдется такое конечное подмножество $M \subset S$, что

$$\min_{m \in M} \| \varphi - m \|_{E^*} \leqslant \frac{1}{2} \quad \forall \varphi \in S. \tag{10}$$

Из соотношения (9) получаем неравенство

$$(\operatorname{card} M) \| \mathfrak{B} \|_{[\mathfrak{M},\mathfrak{M}]} \geqslant \sup_{g \in G} \sum_{\alpha \in G} \sum_{\varphi \in M} \sup_{\|x\|_E = 1} | \varphi(Q_g \mathfrak{B} P_\alpha x) |,$$

где $\operatorname{card} M$ — число элементов множества M. Это неравенство и соотношения

$$\sum_{\varphi \in M} \sup_{\|x\|_E = 1} | \varphi(Q_g \mathfrak{B} P_\alpha x) | \geqslant \sup_{\|x\|_E = 1} \max_{\varphi \in M} | \varphi(Q_g \mathfrak{B} P_\alpha x) | \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \sup_{\|x\|_E = 1} \max_{\varphi \in S} | \varphi(Q_g \mathfrak{B} P_\alpha x) | = \frac{1}{2} \| Q_g \mathfrak{B} P_\alpha \|_{[E,E]}$$

(здесь учтено соотношение (10)) приводят к неравенству

$$(2 \operatorname{card} M) \| \mathfrak{B} \|_{[\mathfrak{M},\mathfrak{M}]} \geqslant \sup_{g \in G} \sum_{\alpha \in G} \| Q_g \mathfrak{B} P_\alpha \|_{[E,E]}. \tag{11}$$

Итак, в силу (8) и (11)

$$Q_g\mathfrak{B}x = \sum_{\alpha\in G} Q_g\mathfrak{B}P_\alpha x(\alpha), \quad g\in G, \ x\in\mathfrak{M}. \tag{12}$$

Докажем соотношение (5). Для этого представим (12) в виде $Q_g\mathfrak{B}x = \sum_{\alpha\in G} Q_g\mathfrak{B}P_{g+\alpha}x(g+\alpha)$. Используя обозначение $B_\alpha(g) = Q_g\mathfrak{B}P_{g+\alpha}$, получаем (5). Соотношение (4) следует из (11).

Соотношения (6) и (7) вытекают из (11) и (12). В качестве $G(g,\alpha)$ следует взять $Q_g\mathfrak{B}P_\alpha$. Теорема 2 доказана.

Замечание 2. При доказательстве соотношения (7) в теореме 2 не используется то обстоятельство, что G — группа, а используется лишь то, что G — счетное множество. Следовательно, утверждение о том, что c-непрерывный оператор $\mathfrak{B}\in[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$ представляется в виде (7), справедливо и в случае, когда G не является группой, а является произвольным счетным множеством. Аналогичную особенность имеет и теорема 1.

Из теорем 1 и 2 и c-непрерывности оператора $\mathfrak{A}$ следует такая теорема.

Теорема 3. *Если уравнение* (1) *для каждой функции* $f = f(g)\in\mathfrak{M}$ *имеет в* $\mathfrak{M}$ *единственное решение* $x = x(g)$, *то найдется* $[E, E]$-*значная функция* $G(g, \alpha)$, *удовлетворяющая условию* (6), *такая, что решение* $x(g)$ *уравнения* (1) *представляется в виде*

$$x(g) = \sum_{\alpha\in G} G(g,\alpha) f(\alpha), \quad g\in G. \tag{13}$$

Эта теорема обобщает аналогичное утверждение работы [2] (в [2] исследуется уравнение (1) в случае $G = Z$).

В дальнейшем нам потребуются следующие определения.

Оператор $\mathfrak{B}\in[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$ называется почти периодическим, если замыкание множества $\{T_\alpha\mathfrak{B}T_{-\alpha} : \alpha\in G\}$ в пространстве $[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$ компактно. Если же $T_\alpha\mathfrak{B}T_{-\alpha} = \mathfrak{B}\ \forall\alpha\in G$, то оператор $\mathfrak{B}$ называется автономным.

Замечание 3. Если в теореме 2 оператор $\mathfrak{B}$ является почти периодическим, то коэффициенты $B_\alpha(g)$, $\alpha\in G$, в равенстве (5) также являются почти периодическими, так как в силу равенств (3) и доказательства теоремы $B_\alpha(g) = Q_g\mathfrak{B}P_{g+\alpha} = Q_0(T_g\mathfrak{B}T_{-g})P_\alpha$, $\alpha\in G$. Если $\mathfrak{B}$ — автономный оператор, то коэффициенты $B_\alpha(g)$, $\alpha\in G$, не зависят от g, поскольку $Q_g\mathfrak{B}P_{g+\alpha} = Q_0(T_g\mathfrak{B}T_{-g})P_\alpha = Q_0\mathfrak{B}P_\alpha\ \forall g\in G$.

2. Обратимость и почти периодичность оператора $\mathfrak{A}$. Если оператор $\mathfrak{A}$ имеет непрерывный обратный, то на основании теоремы 3 каждое ограниченное решение $x(g)$ уравнения (1) представляется в виде (13). Достаточные условия обратимости оператора $\mathfrak{A}$ дает следующая теорема.

Теорема 4 [6]. *Пусть* $\mathfrak{A}$ — *почти периодический c-непрерывный элемент пространства* $[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$ *и* $\inf\limits_{\|x\|_{\mathfrak{M}}=1} \|\mathfrak{A}x\|_{\mathfrak{M}} > 0$. *Тогда* $\mathfrak{A}$ *имеет почти периодический c-непрерывный обратный* $\mathfrak{A}^{-1}\in[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$.

Другие условия обратимости оператора $\mathfrak{A}$ приведены в работах [5, 9, 10].

Применение теоремы 4 к уравнению (1) предполагает проверку выполнения условия почти периодичности оператора $\mathfrak{A}$. Требования почти периодичности функций $A_\alpha(g)$, $\alpha\in G$, недостаточно для почти периодичности c-непрерывного оператора $\mathfrak{A}$. Укажем необходимые и достаточные условия почти периодичности c-непрерывного оператора $\mathfrak{A}$.

Обозначим через $l^1(G)$ банахово пространство $[E, E]$-значных функций $\rho = \rho(\alpha)$, определенных на G, для которых $\sum_{\alpha\in G}\|\rho(\alpha)\|_{[E,E]} < \infty$, с нормой $\|\rho\|_{l^1(G)} = \sum_{\alpha\in G}\|\rho(\alpha)\|_{[E,E]}$.

Теорема 5. *Для того чтобы оператор* $\mathfrak{A}$ *был почти периодическим, необходимо и достаточно, чтобы функция* $a(g) = A_\alpha(g)$, *как* $l^1(G)$-*значная функция, была почти периодической.*

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$, $g_n \in G$, $n \geqslant 1$, и рассмотрим величины $\alpha(n, m) = \sup_{g\in G} \| a(g+g_n) - a(g+g_m)\|_{l^1(G)}$, $\beta(n, m) = \| T_{g_n} \mathfrak{A} T_{-g_n} - T_{g_m} \mathfrak{A} T_{-g_m}\|_{[\mathfrak{M},\mathfrak{M}]}$. Найдется постоянная a (см. доказательство теоремы 2), для которой $\beta(n, m) \leqslant \alpha(n, m) \leqslant a\beta(n, m)$. Поэтому нижние пределы $\varliminf_{n,m\to\infty} \alpha(n, m)$, $\varliminf_{n,m\to\infty} \beta(n, m)$ (здесь $n \neq m$) одновременно либо равны, либо не равны 0. Это означает, что $a(g)$ и $\mathfrak{A}$ одновременно или почти периодичны, или не почти периодичны. Теорема 5 доказана.

Замечание 4. Если выполняются условия теоремы 3 и соответствующий уравнению (1) оператор $\mathfrak{A}$ является почти периодическим, то в силу теорем 4 и 5 и замечания 3 в (13) $[E, E]$-значная функция G $(g, g+\alpha)$ является почти периодической по g для всех $\alpha \in G$, причем для любой последовательности $\beta_n \in G$, $n \geqslant 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{g\in G} \sum_{\alpha\in G} \| G(g, g+\alpha) - G(g+\beta_n, g+\beta_n+\alpha)\|_{[E,E]} = 0.$$

Если оператор $\mathfrak{A}$ является автономным, то $G(g, g+\alpha)$ не зависит от g для каждого $\alpha \in G$.

3. Экспоненциальные оценки функции $G(g, \alpha)$. В работе [2] показано, что в случае, когда $G = Z$ и коэффициенты $A_\alpha(g)$, $\alpha \in G$, уравнения (1) удовлетворяют условию $\sup_{\alpha, g\in G} a^{|\alpha|} \| A_\alpha(g)\|_{[E,E]} < \infty$ для некоторого $a > 1$, функция $G(g, \alpha)$ в формуле (13) удовлетворяет оценке $\| G(g, \alpha)\|_{[E,E]} \leqslant Mq^{|g-\alpha|}$ $\forall g, \alpha \in G$ с некоторыми постоянными $M > 0$ и $q \in (0, 1)$. Покажем, что аналогичный результат справедлив и в более общем случае.

Будем предполагать, что $G = Z^m$, где Z^m — аддитивная группа, элементами которой являются векторы $g = \langle g_1, \ldots, g_m\rangle \in R^m$, для которых $g_1, \ldots, g_m \in Z$.

Теорема 6. *Если выполняются условия теоремы* 3 *и*

$$\| A_\alpha(g)\|_{[E,E]} \leqslant N(1-\varepsilon)^{\sum_{l=1}^{m} |\alpha_l|} \qquad \forall \alpha, g \in G, \tag{14}$$

где $N = \mathrm{const} > 0$, $\varepsilon = \mathrm{const} \in (0, 1)$, *то найдутся такие постоянные* $\delta \in (0, 1)$ *и* $M > 0$, *что функция* $G(g, \alpha)$ *в формуле* (13) *будет удовлетворять условию*

$$\| G(g, \alpha)\|_{[E,E]} \leqslant M(1-\delta)^{\sum_{l=1}^{m} |g_l-\alpha_l|} \qquad \forall g, \alpha \in G. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть Q — множество векторов $p = \langle p_1, \ldots, p_m\rangle \in G$, каждая координата которых равна либо 1, либо -1, и $\langle p, n\rangle$ для $p, n \in G$ обозначает $\sum_{l=1}^{m} p_l n_l$. Рассмотрим оператор $\mathfrak{A}_{q,p} \in [\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$, $q \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, $p \in Q$, определенный равенством $(\mathfrak{A}_{q,p} x)(g) = \sum_{\alpha\in G} A_\alpha(g) q^{\langle\alpha,p\rangle} x(g+\alpha)$, $g \in G$. Из (14) следует, что $\mathfrak{A}_{q,p}$ — c-непрерывный оператор и $\lim_{q\to 1} \| \mathfrak{A}_{q,p} - \mathfrak{A}\|_{[\mathfrak{M},\mathfrak{M}]} = 0$ $\forall p \in Q$. Поэтому найдется $\nu \in (0, 1)$, что оператор $\mathfrak{A}_{q,p}$ будет иметь c-непрерывный обратный $\mathfrak{A}_{q,p}^{-1}$ $\forall q \in (1-\nu, 1+\nu)$ и $p \in Q$. Пусть $\gamma \in (1, 1+\nu)$. Тогда оператор $\mathfrak{A}_{\gamma,p}^{-1}$, как c-непрерывный оператор, определяется согласно теореме 2 равенством $(\mathfrak{A}_{\gamma,p}^{-1} y)(g) = \sum_{\alpha\in G} G_{\gamma,p}(g, \alpha)\, y(\alpha)$, где $G_{\gamma,p}(g, \alpha)$ — $[E, E]$-значная функция, и

$$M = \sup_{p\in Q} \sup_{g\in G} \sum_{\alpha\in G} \| G_{\gamma,p}(g, \alpha)\|_{[E,E]} < \infty. \tag{16}$$

Аналогично $(\mathfrak{A}^{-1}y)(g)=\sum\limits_{\alpha\in G}G(g,\alpha)\,y(\alpha)$, где $G(g,\alpha)$ удовлетворяет условию (6).

Возьмем произвольное $n_0>0$ и функцию $y_{n_0}(g)\in\mathfrak{M}$ такие, чтобы $\|y_{n_0}(g)\|_E=0$, если $|g_1|+\ldots+|g_m|\geqslant n_0$. Очевидно, что функции $f_{\gamma,p,n_0}(g)=\gamma^{(g,p)}y_{n_0}(g)$, $p\in Q$, принадлежат $\mathfrak{M}$ и $\gamma^{-(g,p)}(\mathfrak{A}^{-1}f_{\gamma,p,n_0})(g)\equiv\equiv(\mathfrak{A}^{-1}_{\gamma,p}y_{n_0})(g)\ \forall p\in Q$. Тогда

$$\sum_{\alpha\in G}G(g,\alpha)\,\gamma^{(\alpha-g,p)}y_{n_0}(\alpha)\equiv\sum_{\alpha\in G}G_{\gamma,p}(g,\alpha)\,y_{n_0}(\alpha)\quad\forall p\in Q.$$

Согласно произвольности выбора $y_{n_0}\in\mathfrak{M}$ и n_0 $G(g,\alpha)\,\gamma^{(\alpha-g,p)}\equiv G_{\gamma,p}(g,\alpha)$ $\forall p\in Q$. Из (16) и последнего тождества получаем $\|G(g,\alpha)\|_{[E,E]}\leqslant\leqslant M\gamma^{-|g_1-\alpha_1|-\ldots-|g_m-\alpha_m|}\ \forall g,\ \alpha\in G$, т. е. справедливо неравенство (15). Теорема 6 доказана.

Замечание 5. Справедливо утверждение, обратное к теореме 6, а именно: в случае обратимости оператора $\mathfrak{A}$ неравенство (15) влечет выполнение неравенства (14).

4. Примеры. Проиллюстрируем применимость и эффективность полученных результатов.

Пример 1. Рассмотрим разностное уравнение

$$\sum_{k=0}^{p}A_k(n)\,x(n-k)=f(n),\quad n\in Z,\tag{17}$$

где $p\geqslant 2$ и $A_k(n)$, $k=\overline{0,p}$,— $[E,E]$-значные ограниченные на Z функции. Предположим, что оператор $(\mathfrak{A}x)(n)=\sum\limits_{k=0}^{p}A_k(n)\,x(n-k)$ является обратимым. Результаты монографии [1] не позволяют получить для ограниченных решений уравнения (17) формулу, аналогичную (13), в случае, когда $A_0(n)$ и $A_p(n)$ не являются обратимыми для некоторых $n\in Z$ (в этом случае уравнение (17) нельзя разрешить относительно $x(n)$ или $x(n-p)$ и, следовательно, нельзя ввести эволюционный (разрешающий) оператор уравнения). Из теорем 3 и 6 следует, что ограниченные решения уравнения (17) всегда (в случае обратимости $\mathfrak{A}$) представляются в виде (13), где $G=Z$, причем функция $G(g,\alpha)$ удовлетворяет оценке, аналогичной (15).

Пример 2. Пусть $G=Z$, $E=C$ (C — множество всех комплексных чисел).

Приведем простое доказательство теоремы Винера [11]: если сумма абсолютно сходящегося тригонометрического ряда $\sum\limits_{m\in Z}c_me^{imt}$, $c_m\in C$, $t\in R$, нигде не обращается в нуль, то функция $\dfrac{1}{\sum\limits_{m\in Z}c_me^{imt}}$ также разлагается в абсолютно сходящийся тригонометрический ряд.

Определим оператор $\mathfrak{A}\in[\mathfrak{M},\mathfrak{M}]$ равенством $(\mathfrak{A}x)(n)=\sum\limits_{m\in Z}c_mx(n+m)$, $n\in Z$, $x\in\mathfrak{M}$. Поскольку $\sum\limits_{m\in Z}|c_m|<\infty$ и $\sum\limits_{m\in Z}c_me^{imt}\neq 0$ $\forall t\in R$, то оператор $\mathfrak{A}$ является c-непрерывным и $\operatorname{Ker}\mathfrak{A}=0$. Поэтому оператор $\mathfrak{A}$ обратим (здесь можно воспользоваться теоремой 4) и, следовательно (в силу теорем 1 и 2, а также замечания 3), обратный оператор $\mathfrak{A}^{-1}$ представим в виде $(\mathfrak{A}^{-1}f)(n)=\sum\limits_{\iota\in Z}b_pf(n+p)$ $\left(\sum\limits_{p\in Z}|b_p|<\infty\right)$. Пусть $f(n)=e^{int}$, $t\in R$. Тогда $(\mathfrak{A}^{-1}f)(n)=e^{int}\sum\limits_{p\in Z}b_pe^{ipt}$ и $e^{int}\equiv(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1}f)(n)\equiv e^{int}\left(\sum\limits_{m\in Z}a_me^{imt}\right)\left(\sum\limits_{p\in Z}b_pe^{ipt}\right)$, т. е. $\left(\sum\limits_{m\in Z}a_me^{imt}\right)\left(\sum\limits_{p\in Z}b_pe^{ipt}\right)\equiv 1$. Отсюда следует утверждение теоремы Винера.

1. *Халанай А.*, *Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем.— М. : Мир, 1971.— 307 с.
2. *Слюсарчук В. Е.*, *Яско Ф. Ф.* О представлении решений линейных неоднородных дискретных систем // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.— 1982.— № 1.— С. 33—36.
3. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки.— 1972.— **11**, № 3.— С. 269—274.
4. *Слюсарчук В. Е.* Об ограниченных решениях нелинейных почти периодических дискретных систем // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1979.— № 7.— С. 520—522.
5. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость разностных операторов // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1980.— № 11.— С. 24—27.
6. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических *c*-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб.— 1981.— **116**, № 4.— С. 483—501.
7. *Бурбаки Н.* Спектральная теория.— М. : Мир, 1972.— 183 с.
8. *Слюсарчук В. Е.* Интегральное представление *c*-непрерывных линейных операторов // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1981.— № 8.— С. 34—37.
9. *Слюсарчук В. Е.* Оценки спектров и обратимость функциональных операторов // Мат. сб.— 1978.— **105**, № 2.— С. 269—285.
10. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость линейных неавтономных разностных операторов в пространстве ограниченных на Z функций // Мат. заметки.— 1985.— 37, № 5.— С. 662—666.
11. *Винер Н.* Интеграл Фурье и некоторые его приложения.— М. : Физматгиз, 1963. — 256 с.

Укр. ин-т инженеров вод. хоз-ва, Ровно

Получено 12.06.83,
после доработки — 18.04.86