УДК 517.968

С. В. Переверзев

Аппроксимационные числа и приближение собственных значений интегральных операторов

1. Пусть X — некоторое гильбертово пространство, $G(X)$ — множество линейных вполне непрерывных самосопряженных операторов из X в X. Для операторов $H \in G(X)$ рассмотрим задачу о нахождении собственных значений, т. е. таких чисел $\lambda(H)$, что уравнение

$$\lambda(H)\,u = Hu, \quad u \in X, \tag{1}$$

имеет решение $u \not\equiv 0$. Через $\lambda_1^{+(-)}(H)$, $\lambda_2^{+(-)}(H), \ldots, \lambda_m^{+(-)}(H), \ldots$ будем обозначать соответственно положительные и отрицательные собственные значения (если они существуют) оператора $H \in G(X)$, упорядоченные по убыванию модулей ($|\lambda_k^{+(-)}(H)| \leqslant |\lambda_m^{+(-)}(H)|$ при $k \geqslant m$).

В работе [1] ставится задача об оптимизации всевозможных дискретных методов размерности N приближенного нахождения собственных значений самосопряженных операторов. В данной работе рассматриваются методы приближенного нахождения собственных значений, основанные на аппроксимации исходного оператора H оператором конечного ранга N.

Пусть $H_N \in G(X)$ — некоторый конечномерный оператор ранга N. Определение собственных значений $\lambda_m^{+(-)}(H_N)$ сводится к нахождению собственных значений матрицы порядка N. Поэтому при нахождении собственных значений естественно перейти от уравнения (1) к близкому в определенном смысле уравнению $\lambda(H_N)\,u = H_N\,u$ с конечномерным оператором.

Рассмотрим величину $\lambda_m^{+(-)}(H, H_N) = \min\limits_{\lambda \in S(H)} |\lambda - \lambda_m^{+(-)}(H_N)|$, характеризующую близость $\lambda_m^{+(-)}(H_N)$ к спектру $S(H)$ оператора H. В силу неравенства Вейля — Куранта [2, с. 257] для любых $H, H_N \in G(X)$

$$|\lambda_m^{+(-)}(H) - \lambda_m^{+(-)}(H_N)| \leqslant \| H - H_N \|_{X \to X}. \tag{2}$$

Поэтому естественно использовать для аппроксимации собственных значений $H \in G(X)$ собственные значения конечномерных операторов, которые достаточно хорошо приближают H в операторной норме. Как известно, значение наилучшего приближения непрерывного линейного оператора H, действующего из нормированного пространства Y в нормированное пространство Z, конечномерными операторами ранга N в операторной норме есть аппроксимационное число [3, с. 160]

$$a_N(H, Y, Z) = \inf_{H_N} \| H - H_N \|_{Y \to Z}. \tag{3}$$

В случае $Y = Z = X$, $H \in G(X)$ inf в (3) достигается на N-м отрезке разложения Шмидта оператора H. Однако из результатов [4, 5] следует, что для достаточно широких классов $\mathscr{H}$ операторов можно указать такие эффективные способы построения N-мерных операторов $H_N(H)$, что

$$A_N(\mathscr{H}, Y, Z) = \sup_{H \in \mathscr{H}} a_N(H, Y, Z) \asymp \sup_{H \in \mathscr{H}} \| H - H_N(H) \|_{Y \to Z}. \tag{4}$$

В настоящей работе для некоторых классов операторов указаны точные порядки величин $A_N(\mathscr{H}, Y, Z)$ и получены оценки $\lambda_m^{+(-)}(H, H_N(H))$, где $H \in \mathscr{H}$, а $H_N(H)$ удовлетворяет (4). Эти оценки показывают, что использование операторов $H_N(\mathscr{H})$, удовлетворяющих (4), для приближенного решения проблемы собственных значений обеспечивает на определенных классах операторов гораздо более высокий порядок точности в сравнении с некоторыми известными методами, например методом Бубнова—Галеркина [6].

2. Определим классы операторов. Для простоты изложения ограничимся рассмотрением периодического случая.

Пусть C и L_p, $1 \leqslant p < \infty$,— пространства соответственно непрерывных и суммируемых в степени p на $[0, 2\pi]$ 2π-периодических функций f с нормами $\|f\|_C = \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |f(x)|$, $\|f\|_p = \|f\|_{L_p} = \left\{\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$. В соотношениях общего характера L_∞ означает C, а $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_C$. Пусть L_p^ν, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\nu = 1, 2, \ldots,$ — нормированное пространство 2π-периодических функций f, у которых $f^{(\nu-1)}$ абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$, а $f^{(\nu)} \in L_p$, $\|f\|_{L_p^\nu} = \|f\|_p + \|f^{(\nu)}\|_p$. При $\nu = 0$ L_p^ν означает L_p, а $\|f\|_{L_p^0} = \|f\|_p$.

Через $\mathscr{H}_{p,q}^{\mu,\varkappa} = \mathscr{H}_{p,q}^{\mu,\varkappa}(\alpha)$, $\mu, \varkappa = 1, 2, \ldots$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, обозначим класс интегральных операторов H вида $Hf(x) = \int_0^{2\pi} h(x, y) f(y)\, dy$, ядра $h(x, y)$ которых являются 2π-периодическими функциями своих аргументов и для любой $f \in L_q$

$$\left\| \frac{d^i}{dx^i} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^j h(x, y)}{\partial y^j} f(y)\, dy \right\|_p \leqslant \alpha_{ij} \| f \|_q, \quad i = 0, 1, \ldots, \mu; \ j = 0, 1, \ldots, \varkappa;$$

$$\alpha = \{\alpha_{ij}\}.$$

Кроме того, через $\mathscr{H}_2^\mu(\alpha; \beta, k)$ обозначим класс самосопряженных операторов $H \in \mathscr{H}_{2,2}^{\mu,\mu}(\alpha)$, у которых существует не менее k положительных (отрицательных) собственных значений и $|\lambda_i^{+(-)}(H)| \geqslant \beta$, $i = 1, 2, 3, \ldots, k$.

Рассмотрим оператор Валле — Пуссена V_m (см., например, [7, с. 119]), действующий из L_1 в пространство T_{2m} тригонометрических многочленов порядка $2m-1$ и сопоставляющий каждой $f \in L_1$ многочлен

$$V_m f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \cos k(x-y) + \sum_{k=m+1}^{2m} \left(1 - \frac{k-m}{m}\right) \cos k(x-y) \right] \times$$
$$\times f(y)\, dy.$$

Из [8, с. 185] и равномерной ограниченности $\| V_m \|_{L_p \to L_p}$ при любых m следует, что для $f \in L_q^\nu$, $\nu > (q^{-1} - p^{-1})_+$,

$$\| f - V_m f \|_p \leqslant c m^{-\nu + (q^{-1} - p^{-1})_+} \| f^{(\nu)} \|_q, \tag{5}$$

где постоянная c зависит лишь от p, q, ν. Условимся в дальнейшем через c обозначать величины, зависимость которых от тех или иных параметров (таких, как α, p, μ, ν) является в данном случае несущественной. Эти величины предполагаются, вообще говоря, различными в различных неравенствах.

Поставим в соответствие каждому оператору $H \in \mathscr{H}_{p,q}^{\mu,\varkappa}$ конечномерный оператор $H_N(H) = HV_n + V_n H - V_n H V_n$ ранга $N \leqslant 8n - 2$, действующий в подпространство, базисом которого является максимальная линейно независимая система из множества функций $\sin kx$, $\cos kx$, $H \sin kx$, $H \cos kx$, $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$.

Теорема 1. *Если* $H \in \mathscr{H}_{p,q}^{\mu,\varkappa}$, $\nu = 0, 1, \ldots,$ *и* $\mu > (p^{-1} - r^{-1})_+$, $\varkappa > (s^{-1} - q^{-1})_+ - \nu$, *то*

$$\| H - H_N(H) \|_{L_s^\nu \to L_r} \leqslant c N^{-\mu - \varkappa - \nu + (p^{-1} - r^{-1})_+ + (s^{-1} - q^{-1})_+}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\psi = Hf - HV_n f$, $f \in L_s^\nu$. Используя представление для ψ, из леммы 1 [9] получаем

$$\psi(x) = (-1)^\varkappa \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial^\varkappa h(x, y)}{\partial y^\varkappa} [F(y) - V_n F(y)]\, dy, \tag{6}$$

где F — $(\varkappa + \nu)$-й 2π-периодический интеграл от функции

$$f_\nu(x) = \begin{cases} f^{(\nu)}(x), & \nu = 1, 2, \ldots, \\ f(x) - \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f(t)\, dt, & \nu = 0. \end{cases}$$

В силу соотношения (5) при $\mu > (p^{-1} - r^{-1})_+$

$$\| Hf - H_N(H) f \|_r = \| \psi - V_n \psi \|_r \leqslant c \| \psi^{(\mu)} \|_p n^{-\mu + (p^{-1} - r^{-1})_+}. \tag{7}$$

Кроме того, учитывая определение класса $\mathscr{H}_{p,q}^{\mu,\varkappa}$, из (5) и (6) находим

$$\| \psi^{(\mu)} \|_p = \left\| \frac{d^\mu}{dx^\mu} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial^\varkappa h(x, y)}{\partial y^\varkappa} [F(y) - V_n F(y)]\, dy \right\|_p \leqslant \alpha_{\mu\varkappa} \| F - V_n F \|_q \leqslant$$
$$\leqslant c n^{-\varkappa - \nu + (s^{-1} - q^{-1})_+} \| F^{(\varkappa + \nu)} \|_s \leqslant c \| f \|_{L_s^\nu} n^{-\varkappa - \nu + (s^{-1} - q^{-1})_+}. \tag{8}$$

Утверждение теоремы следует теперь из (7) и (8).

Непосредственно из определения аппроксимационных чисел и теоремы 1 получаем такое следствие.

Следствие. *При выполнении условий теоремы* 1

$$A_N(\mathscr{H}_{p,q}^{\mu,\varkappa}, L_s^\nu, L_r) \leqslant c N^{-\mu - \varkappa - \nu + (p^{-1} - r^{-1})_+ + (s^{-1} - q^{-1})_+}.$$

Теорема 2. *При* $\mu, \varkappa = 1, 2, \ldots,\ \nu = 0, 1, \ldots,\ 1 \leqslant r \leqslant p \leqslant q \leqslant s \leqslant \infty$

$$A_N(\mathscr{H}^{\mu,\varkappa}_{p,q}, L^\nu_s, L_r) \asymp N^{-\mu-\varkappa-\nu}.$$

Доказательство проведем для случая $\nu = 1, 2, \ldots$. При $\nu = 0$ все рассуждения лишь упростятся.

Требуемая оценка сверху для величины A_N содержится в следствии из теоремы 1. Получим оценку снизу.

Рассмотрим оператор

$$D_{\mu,\varkappa,\gamma} f(x) = \frac{\gamma}{\pi}\int_0^{2\pi} D_{\mu+\varkappa}(x-y) f(y)\, dy,$$

где $D_m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - \pi m/2)}{k^m}$, $m = 1, 2, \ldots,$ — функции Бернулли. В силу определения $D_m(t)$ и неравенства для нормы свертки (см. [10, с. 95, 71]) находим, что для любой $f \in L_q$ при $p \leqslant q$

$$\left\| \frac{d^i}{dx^i}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^j}{\partial y^j}[D_{\mu+\varkappa}(x-y)] f(y)\, dy \right\|_p = \left\| \int_0^{2\pi} D_{\mu+\varkappa-i-j}(x-y) f(y)\, dy \right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \| D_{\mu+\varkappa-i-j}\|_1 \| f\|_p \leqslant c \| f\|_q, \quad i, j = 0, 1, \ldots, i + j < \mu + \varkappa, \tag{9}$$

$$\left\| \frac{d^\mu}{dx^\mu}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^\varkappa}{\partial y^\varkappa}[D_{\mu+\varkappa}(x-y)] f(y)\, dy \right\|_p = \pi \left\| f(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\, dy \right\|_p \leqslant c \| f\|_q. \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует, что входящую в определение оператора $D_{\mu,\varkappa,\gamma}$ константу γ можно выбрать так, что $D_{\mu,\varkappa,\gamma} \in \mathscr{H}^{\mu,\varkappa}_{p,q}(\alpha)$ при $p \leqslant q$.

Пусть теперь $W^\nu_{s,0}$ — класс функций f, представимых в виде $f(x) = \pi^{-1}\int_0^{2\pi} D_\nu(x-y)\varphi(y)\, dy$, где функции φ в среднем равны нулю на периоде и $\|\varphi\|_s \leqslant (1 + \pi^{-1}\| D_\nu\|_1)^{-1}$. Вновь пользуясь неравенством для нормы свертки, имеем $\| f\|_s + \| f^{(\nu)}\|_s \leqslant \frac{1}{\pi}\| D_\nu\|_1 \|\varphi\|_s + \|\varphi\|_s \leqslant 1$, что означает принадлежность $W^\nu_{s,0}$ единичному шару $L^\nu_s(1)$ в пространстве L^ν_s. Известно [8, с. 247], что N-й поперечник по Колмогорову

$$d_N(W^\nu_{s,0}, L_r) \geqslant cN^{-\nu}. \tag{11}$$

Заметим, что когда f пробегает класс $W^\nu_{s,0}$, функции

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_{\mu+\varkappa}(x-y) f(y)\, dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_{\mu+\varkappa+\nu}(x-y) f^{(\nu)}(y)\, dy \tag{12}$$

заполняют класс $W^{\mu+\varkappa+\nu}_{s,0}$. Но тогда, учитывая (11), (12), для любого конечномерного оператора H_N из L^ν_s в L_r ранга не выше N

$$\| D_{\mu,\varkappa,\gamma} - H_N\|_{L^\nu_s \to L_r} = \sup_{f \in L^\nu_s(1)} \| D_{\mu,\varkappa,\gamma} f - H_N f\|_r \geqslant \sup_{f \in W^\nu_{s,0}} \| D_{\mu,\varkappa,\gamma} f - H_N f\|_r \geqslant$$

$$\geqslant \gamma \inf_{X_N, \dim X_N \leqslant N}\ \sup_{F \in W^{\mu+\varkappa+\nu}_{s,0}}\ \inf_{g \in X_N} \| F - g\|_r = \gamma d_N(W^{\mu+\varkappa+\nu}_{s,0}, L_r) \geqslant cN^{-\mu-\varkappa-\nu}.$$

В силу произвольности оператора H_N утверждение теоремы 2 следует из последнего неравенства, определения аппроксимационного числа и принадлежности $D_{\mu,\varkappa,\gamma} \in \mathscr{H}^{\mu,\varkappa}_{p,q}$.

З а м е ч а н и е 1. Задача об оценке собственных и аппроксимационных чисел интегральных операторов в зависимости от гладкости ядра является классической (см., например, [11]). Однако в известных нам работах оценки a_N получены лишь для операторов, действующих из L_s в L_r. Случай операторов, действующих из L_s^ν в L_r, $1 \leqslant r, s \leqslant \infty$, ранее не рассматривался. Кроме того, в большинстве работ поведение a_N изучалось в зависимости от гладкости ядра по одной из переменных (в многомерном случае — по группе переменных). Из работ об оценках a_N в терминах «смешанной» гладкости нам известны лишь [11] (теорема 2.5) и [4, 5]. При этом в указанных работах требовалось существование у ядра смешанных частных производных определенного порядка. Пример оператора $D_{\mu,\varkappa,\gamma} \in \mathscr{H}_{p,q}^{\mu,\varkappa}$, у которого ядро не имеет частной производной $\dfrac{\partial^{\mu+\varkappa}}{\partial x^\mu \partial y^\varkappa}$, показывает, что требование существования смешанных производных ядра является более ограничительным в сравнении с требованием гладкости, используемым при определении класса $\mathscr{H}_{p,q}^{\mu,\varkappa}$.

3. Из теорем 1 и 2 следует, что для класса $\mathscr{H}_2^\mu(\alpha;\beta,k)$ оператор $H_N(H) = V_nH + HV_n - V_nHV_n$, $N \leqslant 8n-2$, удовлетворяет соотношению (4). Ниже получены оценки величин $\lambda_m^{+(-)}(H, H_N(H))$ для $H \in \mathscr{H}_2^\mu(\alpha;\beta,k)$. При этом нам понадобится вспомогательное утверждение, которое непосредственно следует из неравенства (2) и теоремы 1 [12].

Л е м м а. *Пусть* $H \in \mathscr{H}_2^\mu(\alpha;\beta,k)$ *и конечномерный самосопряженный оператор* H_N *ранга* N *таков, что*

$$\| H - H_N \|_{L_2 \to L_2} < \beta/2. \tag{13}$$

Тогда при $i \leqslant k$

$$\min_{\lambda \in S(H)} |\lambda_i^{+(-)}(H_N) - \lambda| \leqslant \frac{\| H(H - H_N) H_N \|_{L_2 \to L_2}}{(\beta - \| H - H_N \|_{L_2 \to L_2})(\beta - 2 \| H - H_N \|_{L_2 \to L_2})}.$$

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\mu, k = 1, 2, \ldots$. *Тогда, начиная с некоторого* $N > N_0$, *для* $i \leqslant k$

$$\sup_{H \in \mathscr{H}_2^\mu(\alpha;\beta,k)} \lambda_i^{+(-)}(H, H_N(H)) \leqslant cN^{-4\mu},$$

где постоянная c *не зависит от* N.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы I начиная с некоторого $N > N_0$ выполняются условия леммы и

$$[(\beta - \| H - H_N(H) \|_{L_2 \to L_2})(\beta - 2 \| H - H_N(H) \|_{L_2 \to L_2})]^{-1} \leqslant c, \tag{14}$$

где c зависит лишь от α, β, μ. Оценим теперь $\| H(H - H_N(H)) H_N(H) \|$. Заметим, что $\| H(H - H_N(H)) H_N(H) \|_{L_2 \to L_2} \leqslant \| H(H - H_N(H)) H \|_{L_2 \to L_2} + \| H(H - H_N(H))^2 \|_{L_2 \to L_2}$. Из теоремы 1 имеем

$$\| H(H - H_N(H))^2 \|_{L_2 \to L_2} \leqslant \alpha_{0,0} \| H - H_N(H) \|_{L_2 \to L_2}^2 \leqslant cN^{-4\mu}. \tag{15}$$

По определению $H_N(H)$ для любой $f \in L_2$ функция $g(x) = (H - H_N(H))\, Hf(x)$ ортогональна тригонометрическим многочленам порядка не выше $n = [(N+2)/8]$ ($[s]$ — целая часть числа s). Учитывая этот факт, из (6) при $m = [(N+2)/16]$ находим

$$\| H(H - H_N(H)) Hf \|_2 = \| (H - HV_m)(H - H_N(H)) Hf \|_2 =$$

$$= \left\| \int_0^{2\pi} \frac{\partial^\mu h(x,y)}{\partial y^\mu} [G(y) - V_m G(y)]\, dy \right\|_2 \leqslant \alpha_{0,\mu} \| G - V_m G \|_2, \tag{16}$$

где G — μ-й 2π-периодический интеграл от функции $g(x)$. Но тогда из (5) и теоремы 1 следует

$$\| G - V_m G \|_2 \leqslant cm^{-\mu} \| G^{(\mu)} \|_2 = cm^{-\mu} \| (H - H_N(H)) Hf \|_2 \leqslant \tag{17}$$
$$\leqslant cm^{-4\mu} \| Hf \|_{L_2^\mu} \leqslant cm^{-4\mu} (\alpha_{0,0} + \alpha_{\mu,0}) \| f \|_2 \leqslant cN^{-4\mu} \| f \|_2.$$

Так как функция $f \in L_2$ выбрана произвольно, то утверждение теоремы следует из леммы и неравенств (14) — (17).

Замечание 2. Простые, но довольно громоздкие вычисления, связанные с оценкой постоянных c в неравенствах (7), (8) при $\varkappa = \mu$, $\nu = 0$, $r = p = q = s = 2$, показывают, что условие (13) выполняется для $H_N = H_N(H)$ и любого оператора $H \in \mathscr{H}_2^\mu(\alpha; \beta, k)$ при $N > (18\alpha_{\mu,\mu} \times \times (1 + 2\pi) \beta^{-1})^{1/2\mu}$. Таким образом, в качестве N_0 в теореме 3 можно взять правую часть последнего неравенства.

Замечание 3. Пусть $\lambda_{i,N}^{+(-)}(H)$ — соответственно приближение i-го положительного или отрицательного собственного значения оператора $H \in \mathscr{H}_2^\mu(\alpha; \beta, k)$, найденное по методу Бубнова — Галеркина из уравнения $\lambda u = P_N H u$, где P_N — проектор на подпространство тригонометрических многочленов порядка $m = [(N-1)/2]$. Из [6] (теорема 3 и замечание 1) следует, что в этом случае

$$\sup_{H \in \mathscr{H}_2^\mu(\alpha;\beta,k)} | \lambda_i^{+(-)}(H) - \lambda_{i,N}^{+(-)}(H) | \asymp N^{-2\mu}.$$

Из последнего соотношения и теоремы 3 вытекает, что использование $H_N(H)$ для приближенного нахождения собственных значений операторов $H \in \mathscr{H}_2^\mu(\alpha; \beta, k)$ обеспечивает более высокую по порядку точность в сравнении с методом Бубнова — Галеркина.

1. *Бабенко К. И.* О некоторых задачах теории приближений и численного анализа // Успехи мат. наук.— 1985.— 40, № 1.— С. 3—27.
2. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу.— М. : Мир, 1979.— 587 с.
3. *Пич А.* Операторные идеалы.— М. : Мир, 1982.— 536 с.
4. *Темляков В. Н.* О приближении периодических функций многих переменных // Докл. АН СССР.— 1984.— 279, № 2.— С. 301—306.
5. *Heinrich S.* On the optimal error of degenerate kernel methods // Forchungsergebnisse.— Friedrich-Schiller-Universitat Jena.— 1984.— N 84/2.— 24 p.
6. *Вайникко Г. М.* Оценки погрешности метода Бубнова — Галеркина в проблеме собственных значений // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1965.— 5, № 4.— С. 587—607.
7. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М. : Наука, 1977.— 512 с.
8. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976.— 304 с.
9. *Переверзев С. В.* Оптимизация аппроксимационно-итеративных методов приближенного решения интегральных уравнений с дифференцируемыми ядрами // Сиб. мат. журн.— 1985.— 26, № 3.— С. 106—116.
10. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
11. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Оценки сингулярных чисел интегральных операторов // Успехи мат. наук.— 1977.— 32, № 1.— С. 17—84.
12. *Schäfer E.* Fehlerabschätzungen für Eigenvertnä — herungen nach der Ersatzkernmethode bei Integralgleichungen // Numer. Math.— 1979.— 32, N 3.— S. 281—290.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 12.06.85