УДК 517.9

А. Н. Шарковский, Ю. Л. Майстренко, Е. Ю. Романенко

Асимптотическая периодичность решений разностных уравнений с непрерывным временем

Ограниченные решения автономного дифференциального уравнения $dx/dt = F(x)$, $x \in R^n$, с липшицевой правой частью при $n \leqslant 2$ являются, как хорошо известно, периодическими (в том числе постоянными) или асимптотически периодическими для почти всех уравнений (например, для грубых систем). Только при $n \geqslant 3$ существование решений с более сложным, чем асимптотически периодическое, поведением не является исключением.

Иначе обстоит дело с решениями разностных уравнений вида

$$x(t+1) = f(x(t)) \tag{1}$$

с непрерывной и даже сколь угодно гладкой функцией f. Когда время t дискретно (принимает только целочисленные значения), то уже для $n = 1$ типично существование ограниченных решений, не являющихся периодическими или асимптотически периодическими. Такие решения существуют всякий раз, когда множество периодических точек одномерной динамической системы, задаваемой отображением

$$f: x \mapsto f(x), \tag{2}$$

незамкнуто [1] (и только в этом случае [2]), например когда отображение (2) имеет цикл периода, отличного от 2^i, $i \geqslant 0$ [1].

Ситуация существенно меняется, если рассматривать уравнение с непрерывным t. Разностные уравнения с непрерывным аргументом, часто появляющиеся при исследовании задач математической физики, обладают рядом свойств, приближающих их к уравнениям в частных производных (гиперболического типа). Их решения часто имеют сложную («фрактальную» [3]) внутреннюю структуру, позволяющую использовать их для описания таких явлений, как каскадный процесс образования вихрей, перемежаемость, автостохастичность. И все же при $n = 1$ такие решения при $t \to \infty$, как правило, стремятся к периодическим или почти периодическим (но разрывным!) функциям.

Прежде чем формулировать соответствующие теоремы, дадим некоторые пояснения, касающиеся ограничений на отображение f и начальные условия.

Будем рассматривать уравнение (1) при $n = 1$ в предположении, что

$$f \in C^0(I, I), \quad x \in C^0(R^+, I), \tag{3}$$

где I — некоторый замкнутый ограниченный интервал. Каждое решение уравнения (1) однозначно определяется своими значениями на начальном интервале $[0, 1)$. Функцию $\varphi(t) = x(t)|_{[0,1)}$ называют начальной функцией решения $x(t)$. Ввиду (3)

$$\varphi \in C^0([0, 1), I) \text{ и } \varphi(+1) = f(\varphi(-0)). \tag{4}$$

Никаких других ограничений на начальные функции уравнение (1) при условиях (3) не налагает.

Начальная функция, вообще говоря, может оказаться постоянной на каком-либо интервале из $[0, 1)$: $\varphi(t) \equiv x_0$ при $t \in [t', t'']$, $0 < t' < t'' < 1$. Тогда если траектория отображения f, проходящая через точку x_0, не является асимптотически периодической или асимптотически почти периодической, то и решение $x(t)$ уравнения (1) с начальной функцией $\varphi(t)$, очевидно, не является таковым.

Аналогичная ситуация имеет место и в случае, когда значения начальной функции попадают на так называемый ω-интервал.

Определение 1. *Интервал $\mathcal{J}$, отличный от точки, назовем ω-интервалом отображения f, если все точки этого интервала имеют одно и то же ω-предельное множество (для динамической системы, задаваемой f). При этом если ω-предельное множество отлично от цикла или замыкания почти периодической траектории, $\mathcal{J}$ будем называть нетривиальным ω-интервалом.*

Типичный пример ω-интервалов—компоненты областей притяжения притягивающих циклов отображения f. Наличие у f нетривиальных ω-интервалов — явление исключительное. Так, квадратичные и, как сравнительно недавно установлено [4], даже рациональные отображения не имеют нетривиальных ω-интервалов.

Чтобы исключить описанные выше случаи «нерегулярного» поведения решений, которые являются негрубыми (не сохраняются при малых возмущениях f и φ), наложим на f и φ заведомо завышенные, однако максимально просто формулируемые требования.

Теорема 1. *Если отображение f не имеет нетривиальных ω-интервалов, то каждое решение уравнения* (1) *с начальной функцией, не обращающейся в константу ни на каком интервале из* $[0, 1)$, *является асимптотически периодическим или асимптотически почти периодическим.*

Мы не будем детально останавливаться на доказательстве, приведем лишь некоторые соображения, проясняющие существо дела.

1. Из (1) непосредственно вытекает соотношение

$$x(t + n) = f^n(\varphi(t)), \quad t \in [0, 1), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

(через f^n обозначена n-я итерация f), которое, в частности, показывает, что асимптотическое поведение решений при $t \to \infty$ в конечном счете определяется предельными свойствами последовательности отображений $\{f^n\}$ интервала I в себя, порождаемой правой частью уравнения (1).

Элементы последовательности $\{f^n\}$ принадлежат пространству $C^0(I,I)$, которое не является компактным. Это приводит к необходимости рассматривать более широкое, но компактное пространство. Обозначим через $C^{\Delta}(X, Y)$ пространство полунепрерывных сверху функций g: $X \to Y$ с топологией, задаваемой метрикой $\Delta_U\{g', g''\} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta(\mathrm{gr}_U g', \mathrm{gr}_U g'')$, где $\Delta(A, B)$ — расстояние Хаусдорфа между множествами $A, B \subset Y$; $\mathrm{gr}_U g$ — график функции g на множестве $U \subset X$. Так определенное пространство C^{Δ}, очевидно, компактно.

При достаточно общих условиях в пространстве $C^{\Delta}(I, 2^I)$ удается построить последовательность отображений $\{f^n \circ f^{\Delta}\}$, которая обладает такими же свойствами, как и $\{f^n\}$ при $n \to \infty$, но имеет более простую, нежели $\{f^n\}$, структуру, а именно является периодической или почти периодической.

Центральным моментом при переходе от $\{f^n\}$ к предельной последовательности $\{f^n \circ f^{\Delta}\}$ является построение производящего отображения f^{Δ}. Определим $f^{\Delta} \in C^{\Delta}(I, 2^I)$ по правилу

$$f^{\Delta} = \lim_{n\to\infty} f^n, \tag{6}$$

где символ lim понимается как предел в C^{Δ}. Существование f^{Δ} эквивалентно сходимости последовательности множеств $\mathrm{gr}_I f^{n!}$: $\mathrm{gr}_I f^{\Delta} = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \mathrm{gr}_I f^{n!}$ (символ Lim обозначает топологический предел).

Утверждение 1 [5]. *Если отображение f не имеет нетривиальных ω-интервалов, то отображение f^{Δ}, определенное формулой* (6), *существует и при любом $x \in I$*

$$f^{\Delta}: x \mapsto \bigcap_{n>0} Q_{f^{n!}}(x), \tag{7}$$

где $Q_g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{j>0} \overline{\bigcup_{i>j} g^i(U_\varepsilon(x))}$ — область влияния (иначе, ω-пролонгация) точки x при отображении g, $U_\varepsilon(x)$ — ε-окрестность точки x.

Определение 2. *Совокупность $\{J_1, \ldots, J_n\}$ замкнутых нетривиальных интервалов из I называется циклом интервалов периода n отображения $f: I \to I$, если $f(J_k) = J_{k+1(\mathrm{mod}\, n)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и $\mathrm{int}\, J_{k'} \cap \mathrm{int}\, J_{k''} = \varnothing$, $k' \neq k''$.*

Следствие 1. *Если для каждой точки $x \in I$ область влияния $Q_f(x)$ представляет собой цикл или цикл интервалов, периоды которых ограничены в совокупности, то*

$$f^{\Delta} = \lim_{k\to\infty} f^{kN}, \quad f^{\Delta}: x \mapsto Q_{f^N}(x), \tag{8}$$

где N — наименьшее общее кратное периодов циклов и циклов интервалов — областей влияния точек из I. В частности, (8) *выполняется, когда f структурно устойчиво (в этом случае $N = 2m$, где m — наименьшее общее кратное периодов притягивающих циклов f).*

Следствие 2. *Если множество периодических точек* $\mathrm{Per}\, f$ *отображения f замкнуто, то производящее отображение f^{Δ} существует, так как для каждой точки x ω-предельное множество $\omega_f(x)$ есть цикл* [1].

Отметим, что множество $\mathrm{Per}\, f$ всегда замкнуто, если отображение $f: I \to I$ имеет только циклы с периодами 2^n, $n = 0, 1, \ldots, k$, $k < \infty$, и, следовательно, $\mathrm{Per}\, f = \mathrm{Fix}\, f^{2^k}$ Если же отображение f имеет циклы периодов, отличных от степеней двойки, то $\mathrm{Per}\, f \neq \overline{\mathrm{Per}\, f}$.

Условия теоремы 1 выполнены, если для каждой точки $x \in I$ $\omega_f(x)$ — цикл или замыкание почти периодической траектории. Можно было бы ожидать, что условия теоремы будут выполнены и в случае, когда у отображения замкнуто множество почти периодических точек $\mathrm{APer}\, f$. Однако этого недостаточно. Соответствующий пример C^0-отображения с замкнутым множеством $\mathrm{APer}\, f$ приведен в [6]. Весьма вероятной представляется гипотеза: в классе C^1-отображений замкнутости множества $\mathrm{APer}\, f$ достаточно для существования f^Δ.

В наиболее простых случаях, когда $\mathrm{Per}\, f = \mathrm{Fix}\, f^m$ для некоторого $m > 0$, $f^\Delta = (f^m)^\Delta$ и построение f^Δ не вызывает существенных затруднений. Так, для отображения $f: x \mapsto ax(1-x)$ интервала $[0, 1]$ в себя производящее отображение при $1 < a < 3$ (когда $\mathrm{Per}\, f = \mathrm{Fix}\, f$) имеет вид

$$f^\Delta = \begin{cases} 1 - 1/a \text{ при } x \in (0, 1), \\ [0, \min\{1 - 1/a, a/4\}] \text{ при } x = 0,\ x = 1. \end{cases}$$

Если же $\mathrm{Per}\, f \neq \mathrm{Fix}\, f^m$ ни для какого $m > 0$, то отображение f^Δ может быть очень сложным. Подробнее об этом речь пойдет ниже. Здесь лишь отметим, что согласно (6) на каждом из ω-интервалов f функция $f^\Delta(x)$ как отображение $I \to I$ однозначна и равна константе. Вне ω-интервалов и на их границе $f^\Delta(x)$ может быть как нетривиальным (замкнутым) интервалом, так и точкой. Множество точек многозначности $f^\Delta(x)$ как отображения $I \to I$ совпадает с так называемым разделителем отображения f — множеством $D(f)$ точек $x \in I$, траектории которых неустойчивы по Ляпунову.

Понятие разделителя тесно связано с популярным в последнее время понятием множества Жюлиа $\mathfrak{J}(f)$ [7], а именно, $\overline{D(f)} = \mathfrak{J}(f)$. Разделитель $D(f)$ для произвольных непрерывных отображений $f: I \to I$ есть всегда F_σ-множество. В типичных ситуациях множество $D(f)$ замкнуто и $D(f) = \mathfrak{J}(f)$.

Свойства последовательности $\{f^n \circ f^\Delta\}$ [8]: 1) последовательность $\{f^n \circ f^\Delta\}$ периодическая или почти периодическая; 2) $\Delta\{f^n \circ f^\Delta, f^n\} \to 0$ при $n \to \infty$; 3) $\{f^n \circ f^\Delta\} = \{f^n\}$, если и только если $f^2 = \mathrm{id}$, при этом последовательность $\{f^n \circ f^\Delta\}$ периодическая периода 2 (когда $f = \mathrm{id}$, то периода 1).

Для рассмотренного выше отображения $f: x \mapsto ax(1-x)$, $1 < a < 3$, последовательность $\{f^n \circ f^\Delta\}$ 1-периодическая, так как $f \circ f^\Delta = f^\Delta$. В общем случае последовательность $\{f^n \circ f^\Delta\}$ периодическая тогда и только тогда, когда f^Δ имеет вид (8), и при этом ее период равен N. Таким образом, периодичность предельной последовательности — типичное свойство, имеющее, в частности, место для структурно устойчивых отображений.

Заметим, что если отображения f и f^Δ не коммутируют (условия, обеспечивающие равенство $f \circ f^\Delta = f^\Delta \circ f$, приведены в [8]), то последовательность $\{f^\Delta \circ f^n\}$, вообще говоря, не обладает свойствами, аналогичными 1, 2.

2. Если свойства предельной последовательности $\{f^n \circ f^\Delta\}$ известны, чтобы описать асимптотическое поведение решений уравнения (1) при $t \to \infty$, остается воспользоваться формулой (5). При этом можно уточнить формулировку теоремы 1, если несколько сузить класс начальных функций, налагая на φ условия: для любой точки $x^* \in D(f)$ множество $\varphi^{-1}(D(f))$ конечно; для любого $t^* \in \varphi^{-1}(D(f))$ и любого $\delta > 0$ множество $\varphi(U_\delta(t^*))$ содержит окрестность точки $\varphi(t^*)$. Множество таких начальных функций обозначим через $\Phi(f)$ (на самом деле требования на φ могут быть несколько слабее [5]).

Будем говорить, что решение $x(t)$ уравнения (1) стремится при $t \to \infty$ к функции $p(t) \in C^\Delta(R^+, 2^I)$, если

$$\Delta_{[T,\infty)}\{x(t),\ p(t)\} \to 0 \text{ при } T \to \infty. \tag{9}$$

Решение $x(t)$ назовем асимптотически периодическим (асимптотически почти периодическим), если предельная функция $p(t)$ периодическая (почти периодическая).

Геометрический смысл формулы (9) следующий: с ростом t график решения $x(t)$ все более точно «отслеживает» график предельной функции $p(t)$.

Обозначим через $x_\varphi(t)$ решение уравнения (1) с начальной функцией $\varphi(t)$ и через I_φ минимальный инвариантный интервал (не обязательно замкнутый) отображения f, содержащий значения φ при $t \in [0, 1)$.

Следующая теорема уточняет теорему 1.

Теорема 2 [5]. *Если отображение f не имеет нетривиальных ω-интервалов, то каждое решение $x_\varphi(t)$, $\varphi \in \Phi(f)$, уравнения* (1) *стремится при $t \to \infty$ к функции класса $C^\Delta(R^+, 2^{I_\varphi})$*

$$p_\varphi(t) = f^n \circ f^\Delta \circ \varphi(t-n),\ t \in [n, n+1), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{10}$$

Если предельная последовательность $\{f^n \circ f^\Delta(x)\}$, $x \in I_\varphi$, периодическая (почти периодическая), то решение $x_\varphi(t)$ является асимптотически периодическим (асимптотически почти периодическим).

Предельные функции вида (10) можно рассматривать как обобщенные решения уравнения (1) класса $C^\Delta(R^+, 2^I)$ (если при каком-либо t значение $p(t)$ есть интервал, то равенство $p(t+1) = f(\rho(t))$ понимается в смысле равенства интервалов).

Поясним результат теоремы 2 на языке теории динамических систем. Уравнение (1) порождает бесконечномерную динамическую систему $(C^0, \mathscr{F}^n, \mathbb{Z}^+)$, где $C^0 = C^0([0, 1), I)$ — фазовое пространство (пространство начальных функций), $\mathscr{F}: \varphi \to f \circ \varphi$ — действие, $\mathbb{Z}^+$ — полугруппа целых неотрицательных чисел.

Если $\mathscr{F}^n[\varphi]$ — траектория этой динамической системы, проходящая через точку $\varphi \in C^0$, то решение $x(t)$ с начальной функцией $\varphi(t)$ получается «склейкой» при каждом n правых концов $\mathscr{F}^n[\varphi](t)$ с левыми концами $\mathbb{Z}^{n+1}[\varphi](t): x(t+n) = \mathscr{F}^n[\varphi](t)$, $t \in [0, 1)$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Следовательно, поведение при $n \to \infty$ траекторий динамической системы $(C^0, \mathscr{F}^n, \mathbb{Z}^+)$ полностью определяет поведение решений уравнения (1) при $t \to \infty$.

Исходной системе $(C^0, \mathscr{F}^n, \mathbb{Z}^+)$ соответствует предельная динамическая система $(C^\Delta, \mathscr{F}^n_\Delta, \mathbb{Z}^+)$, где $C^\Delta = C^\Delta([0, 1), 2^I)$, $\mathscr{F}_\Delta: \varphi \mapsto f \circ f^\Delta \circ \varphi$. Рассмотрим траектории $\mathscr{F}^n[\varphi]$ и $\mathscr{F}^n_\Delta[\varphi]$. Если $\varphi \in \Phi(f)$, то $\mathscr{F}^n[\varphi]$ асимптотически стремятся к $\mathscr{F}^n_\Delta[\varphi]$ при $n \to \infty$. В результате в фазовом пространстве C^Δ подмножество

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{\varphi \in \Phi(f)} f^\Delta \circ \varphi \tag{11}$$

представляет собой аттрактор, притягивающий все траектории динамической системы $(C^0, \mathscr{F}^n, \mathbb{Z}^+)$, проходящие через элементы множества $\Phi(f)$.

Движения на аттракторе простые — периодические или почти периодические. В то же время сами элементы аттрактора как функции, действующие из $[0, 1)$ в I, могут быть устроены очень сложно, что и наделяет асимптотические к ним классические решения сложной «внутренней структурой».

3. «Сложность» предельной функции $p_\varphi(t)$, а следовательно, и решения $x_\varphi(t)$ в значительной мере характеризуют множество точек многозначности $p_\varphi(t)$ (как функции из R^+ в I_φ), которое обозначим $\mathscr{T}_\varphi$, и спектр скачков χ_φ (спектр асимптотических скачков $x_\varphi(t)$) — набор значений $p_\varphi(t)$ при $t \in \mathscr{T}_\varphi$. Из представления (10) следует, что определяющую роль при описании этих множеств играет производящее отображение f^Δ. Ввиду (7) и (10) справедливы следующие утверждения:

1. $\mathscr{T}_\varphi = \{t + n : t \in \varphi^{-1}\ D(f)),\ n \in \mathbb{Z}^+\}$.

2. На множестве $R^+ \setminus \mathscr{T}_\varphi$ функция $p_\varphi(t)$ как отображение из R^+ в I_φ однозначна и непрерывна, причем $p_\varphi(t) \equiv \mathrm{const}$ на каждом прообразе $\varphi^{-1}(\mathscr{J})$ ω-интервала $\mathscr{J}$ отображения f.

3. $\chi_\varphi = \bigcup_{n \geqslant 0} f^n(\chi f^\Delta|_{I_\varphi}) = \chi f^\Delta_{|I_\varphi}$, где $\chi f^\Delta|_{I_\varphi}$ — спектр скачков функции f^Δ на интервале I_φ; при этом элементы спектра (как замкнутые интервалы) попарно либо не пересекаются, либо содержатся один в другом.

4. Спектр скачков χ_φ является конечным, если предельная последовательность $\{f^n \circ f^\Delta(x)\}$ при $x \in I_\varphi$ периодическая, и счетным, если $\{f^n \circ f^\Delta(x)\}$ при $x \in I_\varphi$ почти периодическая. Таким образом, в типичных случаях множество χ_φ, как и множество значений $p_\varphi(t)$ при $t \in R^+ \setminus \mathcal{T}_\varphi$, конечно.

Решения $x_\varphi(t)$ уравнения (1) поддаются естественной классификации в зависимости от структуры множества точек неоднозначности предельных функций на начальном интервале $[0, 1)$, т. е. множества $\varphi^{-1}(D(f))$.

Если $\varphi^{-1}(D(f)) = \varnothing$, то $f^\Delta|_{I_\varphi}$ как отображение $I_\varphi \to I_\varphi$ является однозначным и тогда I_φ не содержит точек разделителя $D(f)$. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда множество $\operatorname{Per} f|_{I_\varphi}$ связно. Когда f имеет на I_φ циклы периодов >2, множество $\operatorname{Per} f|_{I_\varphi}$ заведомо несвязно.

Теорема 3. *Решение $x_\varphi(t)$, $\varphi \in \Phi(f)$, уравнения* (1) *равномерно непрерывно на всей полуоси R^+ тогда и только тогда, когда множество $\operatorname{Per} f|_{I_\varphi}$ связно. При этом $x_\varphi(t)$ равномерно стремится к C^0-решению $p_\varphi(t)$ уравнения* (1).

Тривиальный пример к теореме 3 — уравнения вида (1), правая часть которых задает отображение, не имеющее периодических точек, за исключением единственной неподвижной (притягивающей) точки; тогда все решения асимптотически постоянные. Из теоремы 3 следует, что уравнение (1) имеет равномерно непрерывные (отличные от стационарных) решения лишь в исключительных случаях. Для него оказываются типичными непрерывные ограниченные решения, не обладающие свойством равномерной непрерывности на всей полуоси. Наличие таких решений (будем называть их асимптотически разрывными) принципиально отличает разностные уравнения с непрерывным аргументом от обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Если множество $\operatorname{Per} f$ не содержит связных компонент, отличных от точки, то все решения $x_\varphi(t)$ уравнения (1), отличные от асимптотически постоянных, являются асимптотически разрывными (для них $\varphi^{-1}(D(f)) = \varnothing$). Такие решения описывают гладкие незатухающие при $t \to \infty$ колебания, гладкость которых задается гладкостью правой части f и начальной функции φ и не теряется с ростом t. Характер колебаний $x_\varphi(t)$ существенно зависит от мощности множества $\varphi^{-1}(D(f))$.

Назовем $x_\varphi(t)$ решением релаксационного типа, если $\varphi^{-1}(D(f))$ конечно и не пусто, и решением турбулентного типа, если $\varphi^{-1}(D(f))$ бесконечно.

При $\varphi \in \Phi(f)$ мощность множества $\varphi^{-1}(D(f))$ «мажорируется» мощностью разделителя $D(f)$ и, следовательно, в решениях с начальными функциями из $\Phi(f)$ находят отражение именно те свойства, которые «навязываются» самим уравнением, а не привносятся «извне» за счет «сложности» начальных функций. Можно предложить простые критерии существования у уравнения (1) решений того или иного типа.

Если отображение f не имеет циклов периодов >2 и множество $\operatorname{Per} f$ конечно, то все решения уравнения (1), отличные от стационарных, относятся к релаксационному типу. Для таких решений спектр асимптотических скачков и частота колебаний на любом интервале $[T, T+1]$ конечны.

Если же отображение f имеет циклы периодов >2, то уравнение (1) с необходимостью имеет решения турбулентного типа; частота колебаний таких решений на любом интервале $[T, T+1]$ неограниченно увеличивается с ростом T, а спектр асимптотических скачков может быть как конечным, так и счетным в зависимости от того, периодическая или почти периодическая при $x \in I_\varphi$ предельная последовательность $\{f^n \circ f^\Delta(x)\}$.

Если отображение f имеет циклы периодов $\neq 2^n$, $n = 0, 1, \ldots$, то среди решений уравнения (1) есть решения $x_\varphi(t)$ турбулентного типа такие, что множество $\varphi^1(D(f))$ несчетно. Эти решения обладают свойством автомодельности (самоподобием графиков), что позволяет использовать их для моделирования процессов образования структур уменьшающихся масштабов.

Когда множество $\varphi^{-1}(D(f))$ несчетно, график функции $p_\varphi(t)$, предельной для решения $x_\varphi(t)$, может оказаться фрактальным множеством [3]. При достаточно общих условиях, в частности, когда спектр χ_φ конечен, $\dim_H \mathrm{gr}_{[0,1)} p_\varphi(t) = 1 + \dim_H \varphi^{-1}(D(f))$, где $\dim_H(\cdot)$—размерность Хаусдорфа—Безиковича соответствующего множества. Поэтому если $\dim_H \varphi^{-1}(D(f)) > 0$, то размерность графика $p_\varphi(t)$ больше 1 или даже равна 2 (последнее заведомо так, если $\varphi^{-1}(D(f))$ содержит интервал).

Типичным и наиболее изученным представителем нелинейных разностных уравнений является уравнение

$$x(t+1) = ax(t)(1-x(t)), \qquad 0 \leqslant a \leqslant 4, \; x \in C^0(R^+, [0, 1]). \tag{12}$$

Его решения обладают всеми свойствами, присущими разностным уравнениям. «Простота» нелинейности приводит лишь к определенному единообразию в поведении всех решений. Уравнению (12) соответствует квадратичное отображение

$$f_a : x \mapsto ax(1-x), \tag{13}$$

динамика которого известна (см., например, [9]). Это позволяет достаточно полно описать асимптотические свойства решений и их бифуркации при изменении параметра a. Так, все решения x_φ уравнения (12) при $a \in [0, 3]$ и $I_\varphi \subset (0, 1)$ асимптотически постоянны (стремятся к $1 - 1/a$), при $a \in (3, 1 + \sqrt{6})$ и $\varphi \in \Phi(f_a)$ являются решениями релаксационного типа. При $a \in (1 + \sqrt{6}, 4]$ все непрерывные решения — решения турбулентного типа (за исключением двух постоянных (и неустойчивых) решений $x(t) = 0$ и $x(t) = 1 - 1/a$). Более того, при $a > a^* \approx 3{,}569$ (a^* — значение параметра a, при котором отображение f_a имеет циклы периодов 2^i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, и только их) множество точек разрыва у p_φ — несчетное множество даже для $\varphi \in \Phi(f_a)$. При $a > a^*$ $\dim_H \mathrm{gr}\, p_\varphi > 1$ и, например, при $a = 4$ $\dim_H \mathrm{gr}\, p_\varphi = 2$ для любого решения x_φ, отличного от постоянного. В последнем случае можно говорить лишь о вероятности, с которой при больших t решение принимает те или иные значения из $[0, 1]$.

Обозначим через A множество значений параметра a, при которых уравнение (12) имеет (асимптотически) периодические решения, отличные от постоянных. Тогда при $a \in A$ каждое решение x_φ уравнения (12), если $\varphi \in \Phi(f_a)$, асимптотически периодическое. Множество $A^* = [0, 4] \setminus A$ несчетное и принадлежит интервалу $[a^*, 4)$; при $a \in A^*$ каждое решение уравнения (12), для которого $\varphi \in \Phi(f_a)$, асимптотически почти периодическое и не является, за исключением постоянного решения $x(t) = 1 - 1/a$, асимптотически периодическим.

1. *Шарковский А. Н.* О Циклах и структуре непрерывного отображения // Укр. мат. журн.— 1965.— 17, № 3.— С. 365—368.
2. *Федоренко В. В., Шарковский А. Н.* Непрерывные отображения интервала с замкнутым множеством периодических точек // Исследование дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980.— С. 137.
3. *Мандельброт Б.* Фракталы и турбулентность : аттракторы и разброс // Странные аттракторы.— М.: Мир, 1981.— С. 47—57.
4. *Sullivan D.* Iteration des fonctions analytigres complexes // C. R. Acab. Sci. Paris.— 1982. —**294**, N 9.— P. 301—304.
5. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения.— Киев : Наук думка, 1986.— 276 с.
6. *Верейкина М. Б., Шарковский А. Н.* Возвращаемость в одномерных динамических системах // Приближенные и качественные исследования дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983.— С. 35—46.
7. *Julia G.* Memoire sur L'iteration des fonctions rationelles // J. math. pures et appl.— 1918.— N 4.— P. 47—245.
8. *Романенко Е. Ю., Шарковский А. Н.* Асимптотические свойства полугруппы отображений интервала // Динамические системы и дифференциально—разностные уравнения.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1986.— С. 75—89.
9. *Шарковский А. Н.* Разностные уравнения и динамика численности популяций.— Киев, 1982.— 22 с.— (Препринт / Ин-т математики АН УССР; 82.18).

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 07.08.86