УДК 517.9

С. А. Беликов

Об усреднении систем, содержащих сильно осциллирующие функции фазовых переменных

В данной статье предлагается метод усреднения, позволяющий, в частности, находить асимптотические решения некоторых систем в стандартной форме Боголюбова, для которых не выполняются условия теоремы КБМ (Крылова — Боголюбова — Митропольского) [1]. Один пример такой системы (а именно, $dy/dt = \varepsilon f(\varepsilon t, y) \sin ty$, $y \in R^1$) рассмотрен в работе [2] с использованием описанного в ней метода инфинитезимального стробоскопа [3] (применениям стандартного стробоскопического метода посвящен обзор [4]). Используя инфинитезимальный стробоскоп и другие методы нестандартного анализа [5], в настоящей работе получены результаты об асимптотическом поведении при $\varepsilon \to 0$ решений системы дифференциальных уравнений

$$dy/d\tau = F(\tau, y, \varepsilon^{-1}\varphi(\tau, y)),\ \ y(\tau_0) = y_0, \tag{1}$$

где

$$y = (y^1, \dots, y^n) \in R^n;\ \ \varphi : R^1 \times R^n \to R^m;\ \ F : R^1 \times R^n \times R^m \to R^n$$

на конечном интервале времени τ (если τ рассматривать как медленное время $\tau = \varepsilon t$, то получим асимптотическое поведение на интервале, пропорциональном ε^{-1} быстрого времени t, как это делается, например, в теореме КБМ).

Усреднением (или усредненной системой) системы (1) в области $\mathcal{D} \in R^1 \times R^n$ будем называть систему

$$d\xi/d\tau = F_0(\tau, \xi),\quad \xi(\tau_0) = y_0, \tag{2}$$

не содержащую параметра ε и такую, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \| y_\varepsilon(\tau) - \xi(\tau) \| = 0$, если $(\tau, \xi(\tau)) \in \mathcal{D}$, где $y_\varepsilon(\cdot)$ и $\xi(\cdot)$ — решения системы (1) и (2) соответственно. Способ получения усредненных систем обосновывает следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Пусть в замкнутой ограниченной области $\mathcal{D} \in R^1 \times R^n$ $((\tau, y) \in \mathcal{D})$ выполняются следующие условия:*

а) функция $F(\tau, y, s)$ равномерно непрерывна по $s \in R^m$ при $(\tau, y) \in \mathcal{D}$, непрерывна по (τ, y) равномерно относительно $s \in R^m$ и ограничена в $\mathcal{D} \times R^m$;

б) функция $F(\tau, y, s)$ дважды непрерывно дифференцируема в $\mathcal{D}$;

в) уравнение

$$dY/dT = F(\tau, y, \varepsilon^{-1}\varphi(\tau, y) + S[\varphi'_\tau|_{(\tau, y)} T + \varphi'_y|_{(\tau, y)} Y]),\quad Y(0) = 0, \tag{3}$$

при фиксированных $(\tau, y) \in \mathcal{D}$ и достаточно больших ε^{-1} и S имеет решение $Y = Y_{\tau y \varepsilon S}(T)$, которое при $\varepsilon \to 0$, $S \to \infty$, $\sqrt{\varepsilon} S \to 0$ равномерно по $(\tau, y) \in \mathcal{D}$ сходится к функции $Y = Y_{\tau y}(T)$ на любом замкнутом конечном интервале времени T, не содержащем 0.

Тогда $Y_{\tau y}(T) = Y_{\tau y}(1)\, T$ и система (2) с $F_0(\tau, y) = Y_{\tau y}(1)$ является усреднением системы (1) в любой замкнутой области $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D} \setminus \partial\mathcal{D}$.

П р и м е р 1. Пусть в области $\mathcal{D}$ $\varphi(\tau, y) \equiv \tau$. Тогда решение системы (3) имеет вид $Y = \int\limits_0^T F(\tau, y, \varepsilon^{-1}\tau + ST)\, dT = \frac{1}{ST} \int\limits_{\varepsilon^{-1}\tau}^{\varepsilon^{-1}\tau + ST} F(\tau, y, \eta)\, d\eta T$. Если равномерно по $(\tau, y) \in \mathcal{D}$ и $t \in R^1$ существует предел $\lim\limits_{A\to\infty} \frac{1}{A} \int\limits_t^{t+A} F(\tau, y, \eta)\, d\eta = \overline{F(\tau, y, \cdot)}$, то при $S \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$: $Y \to \overline{F(\tau, y, \cdot)}\, T$ и согласно теореме 1 $F_0(\tau, \xi) = \overline{F(\tau, \xi, \cdot)}$. Этот результат совпадает с одним из вариантов теоремы КБМ [1].

С помощью теоремы 1 можно получить явный вид усреднения системы

$$\frac{d^{k_i}y^i}{d\tau^{k_i}} = f^i(\tau, Jy, \varepsilon^{-1}\varphi^i(\tau, Jy^i)), \qquad i = 1, \dots, N, \tag{4}$$

где $y^i \in R^1$, $y=(y^1, \dots, y^N) \in R^N$, $Jy^i = (y^i, \partial y^i/\partial\tau, \dots, \partial^{k_i-1}y^i/\partial\tau^{k_i-1}) = (y_1^i, \dots$ $\dots, y_{k_i}^i)$, $Jy = (Jy^1, \dots, Jy^N) = (y_1^1, \dots, y_{k_1}^1, \dots, y_1^N, \dots, y_{k_N}^N)$, $\varphi^i : R^1 \times R^{k_i} \to R^1$, $f^i : R^1 \times \prod\limits_{i=1}^{n} R^{k_i} \times R^1 \to R^1$; (4) представляет собой систему N дифференциальных уравнений порядков $k_1, \dots, k_N$ общего вида, в которой функции φ^i зависят только от времени и фазовых переменных i-го уравнения. Запишем ее в виде системы первого порядка

$$\begin{aligned} dy_l^i/d\tau &= y_{l+1}^i, \qquad l = 1, \dots k_i - 1, \\ dy_{k_i}^i/d\tau &= f^i(\tau, Jy,\ \varepsilon^{-1}\varphi^i(\tau, Jy^i)), \qquad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{5}$$

Для простоты изложения будем считать, что выполнено следующее условие:

г) функции $f^i(\tau, Jy, \eta)$ — периодические по η с периодами $P^i(\tau, Jy)$, ограниченными в области $\mathcal{D}$, $i = 1, \dots, N$.

Теорема 2. *Пусть в замкнутой ограниченной области* $\mathcal{D} \subset R^1 \times \times \prod\limits_{i=1}^{N} R^{k_i}$ *правая часть системы* (5) *удовлетворяет условиям а), б), г) и следующим*:

1) *при* $i = 1, \dots, N_1 \leqslant N$ *в области* $\mathcal{D}$ $\partial\varphi^i/\partial y_{k_i}^i \equiv 0$ *и функция*

$$\nu^i(\tau, Jy^i) = \frac{\partial\varphi^i}{\partial\tau}(\tau, Jy^i) + \sum_{l=1}^{k_i-1} \frac{\partial\varphi^i}{\partial y_l^i}(\tau, Jy^i)\, y_{l+1}^i$$

не обращается в нуль;

2) *при* $i = N_1 + 1, \dots, N_2 \leqslant N$ *в области* $\mathcal{D}$ $\partial\varphi^i/\partial y_{k_i}^i \neq 0$ *и функция*

$$\Phi^i(\tau, Jy, \eta) = \nu^i(\tau, Jy^i) + \frac{\partial\varphi^i}{\partial y_{k_i}^i}(\tau, Jy^i)\, f^i(\tau, Jy, \eta) \tag{6}$$

не обращается в нуль при $(\tau, y) \in \mathcal{D}$ *и* $\eta \in R^1$;

3) *при* $i = N_2 + 1, \dots, N$ *в области* $\mathcal{D}$ $\partial\varphi^i/\partial y_{k_i}^i \neq 0$ *и функция* $\Phi^i(\tau, Jy, \eta)$ *имеет нули при каждом фиксированном* $(\tau, Jy) \in \mathcal{D}$.

Тогда система

$$\frac{d^{k_i}\xi^i}{d\tau^{k_i}} = \frac{1}{P^i(\tau, J\xi^i)} \int\limits_0^{P^i(\tau, J\xi^i)} f^i(\tau, J\xi^i,\ \operatorname{sign} \nu^i\eta)\, d\eta, \qquad i = 1, \dots, N_1;$$

$$\frac{d^{k_i}\xi^i}{d\tau^{k_i}} = \left[\frac{\partial\varphi^i}{\partial y_{k_i}^i}(\tau, J\xi^i)\right]^{-1} \left\{\left[\frac{1}{P^i(\tau, J\xi^i)} \int\limits_0^{P^i(\tau, J\xi^i)} \frac{d\eta}{\Phi^i(\tau, J\xi, \eta)}\right]^{-1} - \nu^i(\tau, J\xi^i)\right\},$$

$$i = N_1 + 1, \dots, N_2;$$

$$\frac{d^{k_i}\xi^i}{d\tau^{k_i}} = -\left[\frac{\partial\varphi^i}{\partial y_{k_i}^i}(\tau, J\xi^i)\right]^{-1} \nu^i(\tau, J\xi^i), \qquad i = N_2 + 1, \dots, N$$

является усреднением системы (4) *в любой замкнутой области* $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D} \setminus \partial\mathcal{D}$ *расширенного фазового пространства.*

Замечания. 1. Обычно для системы вида (4) любую компактную область расширенного фазового пространства можно разбить на подобласти, внутри каждой из которых после перенумерации переменных и уравнений будут выполнены условия 1—3 при некоторых N_1 и N_2.

2. Часто возникает необходимость ослабить условие непрерывности функции $f^i(\tau, y, \eta)$ по η. Если эта функция периодична по η с непрерывным в $\mathcal{D}$ периодом $P^i(\tau, Jy)$, то допустимо, чтобы на интервале длины $P^i(\tau, Jy)$ она имела конечное число разрывов первого рода и на линиях разрыва (задаваемых уравнением $\varphi^i(\tau, Jy^i) = \varepsilon\eta_k^i(\tau, Jy)$, k — номер линии разрыва) выполнялись условия стыковки решений.

Пример 2. Рассмотрим уравнение маятника, на который действует сильно осциллирующий момент $d^2x/d\tau^2 + x = \operatorname{sign}\sin(\varepsilon^{-1}(\tau + dx/d\tau))$.

Построим усреднение системы первого порядка

$$\begin{cases} dx/d\tau = y + \alpha\psi(\varepsilon^{-1}\tau), \\ dy/d\tau = -x + \operatorname{sign}\sin(\varepsilon^{-1}(\tau + y)) \end{cases}$$

с периодической функцией ψ, которая эквивалентна предыдущему уравнению при $\alpha = 0$. Здесь первое уравнение удовлетворяет условию 1, а $\Phi^2(\tau, x, y, \eta) = 1 - x + \operatorname{sign}\sin\eta$. Эта функция не обращается в нуль, если $|x - 1| > 1$, и обращается в нуль, если $|x - 1| \leqslant 1$. Из теоремы 2 и замечания 2 следует, что усредненная система имеет вид

$$\begin{cases} dx/d\tau = y, \\ dy/d\tau = \begin{cases} -x - (1-x)^{-1}, & \text{если } |x - 1| > 1, \\ -1, & \text{если } |x - 1| \leqslant 1. \end{cases} \end{cases}$$

Эта система имеет первый интеграл

$$H(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - 2\ln|x - 1|, & \text{если } |x - 1| > 1, \\ y^2 + 2x, & \text{если } |x - 1| \leqslant 1, \end{cases}$$

линии уровня которого замкнуты и имеет особую точку $(x = (1 - \sqrt{5})/2, y = 0)$. Остальные ее решения — периодические. Таким образом, наличие сильно осциллирующего момента указанного вида приводит к смещению положения равновесия маятника.

Пример 3. Рассмотрим систему

$$dy^i/d\tau = f^i(\tau, y) F(\tau, y, \varepsilon^{-1}\varphi(\tau, y)), \quad y^i(0) = y_0^i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

правая часть которой удовлетворяет условиям а) и б). Здесь $y = (y^1, \ldots, y^n)$; f^i, F, φ — скалярные функции, f^1 не обращается в нуль в рассматриваемой области, $F(\tau, y, \eta)$ — периодическая функция η с периодом 2π. Эту систему нельзя представить в виде (4) при $n \geqslant 2$. Поэтому воспользуемся непосредственно теоремой 1. Для этого изучим решение системы уравнений $dY^i/dT = f^i F\left(\tau, y, \alpha + S\left[\varphi_\tau' T + \sum_{k=1}^{n} \varphi_{y_k}' Y^k\right]\right)$, $Y^i(0) = 0$, где $\alpha = \varepsilon^{-1}\varphi$; f^i, φ, φ_τ', φ_{y_k}' — значения соответствующих функций в точке (τ, y). Эта система имеет $(n-1)$ первых интегралов, определяемых равенствами $f^1 Y^i = f^i Y^1$, $i = 2, \ldots, n$. Подставив выражения для Y^i в уравнение для Y^1, положив $Z = \varphi_\tau' T + [f^1]^{-1}\Phi Y^1$, где $\Phi = \sum_{k=1}^{n} f^k \varphi_{y^k}'$, при $\Phi \neq 0$, получим уравнение для Z $dZ/dT = \varphi_\tau' + \Phi F(\tau, y, \alpha + SZ)$, $Z(0) = 0$.

Если правая часть этого уравнения не обращается в нуль, то легко показать, что

$$Z(T) \to \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\eta}{\varphi_\tau' + \Phi F(\tau, y, \eta)}\right]^{-1} T \text{ при } \varepsilon \to 0, \ S \to \infty.$$

В противном случае уравнение имеет особые точки и $Z(T)$ изменяется в интервале, длина которого не превышает периода правой части, т. е. $|Z(T)| \leqslant 2\pi S^{-1}$, откуда $Z(T) \to 0$. Тогда, воспользовавшись теоремой 1, после простых вычислений получим усреднение исходной системы

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\begin{cases} -\dfrac{f^i(\tau,\xi)\,\varphi'_\tau(\tau,\xi)}{\Phi(\tau,\xi)}, \text{ если } \min\limits_{\eta\in[0,2\pi]}\Phi(\tau,\xi)\,F(\tau,\xi,\eta)\leqslant-\varphi'_\tau(\tau,\xi)\leqslant \\ \leqslant\max\limits_{\eta\in[0,2\pi]}\Phi(\tau,\xi)\,F(\tau,\xi,\eta), \\ \dfrac{f^i(\tau,\xi)}{\Phi(\tau,\xi)}\left\{\left[\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{d\eta}{\varphi'_\tau(\tau,\xi)+\Phi(\tau,\xi)\,F(\tau,\xi,\eta)}\right]^{-1}-\varphi'_\tau(\tau,\xi)\right\}- \\ \text{в противном случае,}\end{cases}$$

где $\Phi(\tau,\xi)=\sum\limits_{k=1}^{n} f^k(\tau,\xi)\,\varphi'_{y^k}(\tau,\xi)$.

Доказательство теоремы 1. Будем рассматривать задачу (1) в нестандартном смысле (подробно описанном, например, в § 1 работы [6]) при бесконечно малом ε. Все условия теоремы и ее утверждения допускают естественную нестандартную формулировку. Например, условие *в*) означает, что существует стандартная непрерывная функция $Y_{\tau y}(T)$, которая при любых бесконечно малом ε и бесконечно большом S таких, что $\sqrt{\varepsilon}S$ бесконечно мало, является тенью внутренней функции $Y_{\tau y\varepsilon S}(T)$ на конечном интервале времени T. Утверждение теоремы означает, что стандартная функция $\xi(\tau)$, удовлетворяющая уравнению (2), является тенью внутренней функции $y_\varepsilon(\tau)$, удовлетворяющей уравнению (1). Будем подразумевать, что ко всем рассматриваемым стандартным объектам (множествам, функциям и т. д.) применен функтор $*$ и писать $\mathcal{D}$, f, ... вместо $^*\mathcal{D}$, $^*f$, ... [5, 6].

Пусть $y_\varepsilon(\tau)=(y^1(\tau),\ldots,y^n(\tau))$ — решение уравнения (1) в области $\mathcal{D}'\subset{}^*R^{n+1}$ при фиксированном $\varepsilon\sim 0$ ($\sim$ означает бесконечную близость).

К системе (1) применим метод инфинитезимального стробоскопа, т. е. построим последовательность $\{\tau_k\}$, тень которой содержит проекцию области $\mathcal{D}$ на ось времени τ, такую, что $\tau_{k+1}\sim\tau_k$; последовательность $\{(\tau_k,\,y_k)\}$, где $y_k=y_\varepsilon(\tau_k)$ такова, что на рассматриваемом конечном интервале $(y_{k+1}-y_k)/(\tau_{k+1}-\tau_k)\sim F_0(\tau_k,y_k)$ для некоторой непрерывной в $\mathcal{D}$ стандартной функции F_0. Из существования такой последовательности следует [3], что $y_\varepsilon(\tau)$ в области $\mathcal{D}'$ имеет тень $\xi(\tau)$, удовлетворяющую уравнению (2).

Для построения τ_{k+1}, исходя из τ_k (τ_0 задано) и определения функции F_0, рассматриваем инфинитезимальную замену переменных в окрестности точки (τ_k,y_k): $T=\dfrac{\tau-\tau_k}{\varepsilon S}$, $Y(T)=\dfrac{y(\tau_k+\varepsilon ST)-y_k}{\varepsilon S}$, где S — бесконечно большое число такое, что $\sqrt{\varepsilon}S\sim 0$.

Из уравнения (1), используя разложение функции φ по формуле Тейлора, получаем $dY/dT=F\left(\tau_k+\varepsilon ST,\ y_k+\varepsilon SY,\ \varepsilon^{-1}\varphi_k+S(\varphi'_{\tau k}T+\varphi'_{yk}Y)+(\sqrt{\varepsilon}S)^2\left[\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial(\tau,y)}\Big|_{(\tau_k+\theta\varepsilon ST,\,y_k+\theta\varepsilon SY)}\right](T,Y)\right)$, $Y(0)=0$, где $0<\theta<1$, $\varphi_k=\varphi(\tau_k,y_k)$, $\varphi'_{\tau k}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau}\Big|_{(\tau_k,y_k)}$, $\varphi'_{yk}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{(\tau_k,y_k)}$.

Учитывая условия а) — в) и лемму о короткой тени [7, 8], получаем, что на ограниченном интервале времени T решение этого уравнения бесконечно близко к решению $Y_{\tau_k y_k\varepsilon S}(\cdot)$ уравнения $dY_{\tau_k y_k\varepsilon S}/dT=F(\tau_k,y_k,\varepsilon^{-1}\varphi_k+S(\varphi'_{\tau k}T+\varphi'_{yk}Y_{\tau_k y_k\varepsilon S}))$, $Y_{\tau_k y_k\varepsilon S}(0)=0$, и $Y_{\tau_k y_k\varepsilon S}(T)\sim Y_{\tau_k y_k}(T)$ при конечных T.

Пусть α — конечное положительное не бесконечно малое число и $Z(R)=\alpha^{-1}Y_{\tau_k y_k\varepsilon S}(T)$, $R=\alpha^{-1}T$. Тогда $dZ/dR=F(\tau_k,\,y_k,\ \varepsilon^{-1}\varphi_k+\alpha S(\varphi'_{\tau k}R+\varphi'_{\tau k}Z))$, $Z(0)=0$. Так как $(\alpha S)^{-1}\sim 0$ и $\sqrt{\varepsilon}\alpha S\sim 0$, в силу условия *в*) имеем $Z(\cdot)\sim Y_{\tau_k y_k}(\cdot)$ или $Y_{\tau_k y_k}(\alpha R)\sim Y_{\tau_k y_k\varepsilon S}(\alpha R)=\alpha Z(R)\sim\alpha Y_{\tau_k y_k}(R)$.

Поскольку $Y_{\tau_k y_k}(\cdot)$ — стандартная функция, то при $R=1$ получаем $Y_{\tau_k y_k}(\alpha) = F_0(\tau_k, y_k)\alpha$, где $F_0(\tau_k, y_k) = Y_{\tau_k y_k}(1)$ и $Y(1) \sim F_0(\tau_k, y_k)$.

Полагая $\tau_{k+1} = \tau_k + \varepsilon S$, находим $\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1} - \tau_k} = Y(1) \sim F_0(\tau_k, y_k)$, где $F_0(\tau_k, y_k)$ — стандартная непрерывная функция. Это следует из условия в). Таким образом, требуемая последовательность построена и теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Запишем уравнение (3), соответствующее системе (5)

$$\frac{dY_l^i}{dT} = y_{l+1}^i, \quad Y_l^i(0) = 0, \qquad l = 1, \ldots, k_i - 1,$$

$$\frac{dY_{k_i}^i}{dT} = f^i\left(\tau, Jy, \alpha^i + S\left[\varphi_\tau^{i\prime} T + \sum_{j=1}^{k_i} \varphi_j^{i\prime} Y_j^i\right]\right), \; Y_{k_i}^i(0) = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{7}$$

где $\alpha^i = \varepsilon^{-1}\varphi^i(\tau, Jy^i)$, $\varphi_\tau^{i\prime} = \frac{\partial \varphi^i}{\partial \tau}(\tau, Jy^i)$, $\varphi_j^{i\prime} = \frac{\partial \varphi^i}{\partial y_j^i}(\tau, Jy^i)$. Система (7) представляет собой N независимых дифференциальных уравнений относительно функций Y_l^i, $l = 1, \ldots, k_i$, $i = 1, \ldots, N$. Рассмотрим i-е уравнение этой системы. Решая его, имеем $Y_l^i(T) = y_{l+1}^i T$, $l = 1, \ldots, k_i - 1$, $i = 1, \ldots, N$.

Подставляя эти выражения в уравнение для $Y_{k_i}^i$, получаем $\frac{dY_{k_i}^i}{dT} = f^i(\tau, Jy, \alpha^i + S[\nu^i T + \varphi_{k_i}^{i\prime} Y_{k_i}^i])$, $Y_{k_i}^i(0) = 0$. При $i = 1, \ldots, N_1$ имеем

$$Y_{k_i}^i(T) = \int_0^T f^i(\tau, Jy, \alpha^i + S\nu^i T)\, dT =$$

$$= \frac{1}{S|\nu^i|T} \int_0^{S|\nu^i|T} f^i(\tau, Jy, \alpha^i + \operatorname{sign}\nu^i\eta)\, d\eta T \to \frac{1}{P^i(\tau, Jy^i)} \int_0^{P^i(\tau, Jy^i)} f(\tau, Jy,$$

$$\operatorname{sign}\nu^i\eta)\, d\eta T, \quad \varepsilon \to 0, \; S \to \infty.$$

Пусть $i \in \{N_1 + 1, \ldots, N\}$. Тогда $Z = \nu^i T + \varphi_{k_i}^{i\prime} Y_{k_i}^i$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dZ}{dT} = \Phi^i(\tau, Jy, \alpha^i + SZ), \; Z(0) = 0. \tag{8}$$

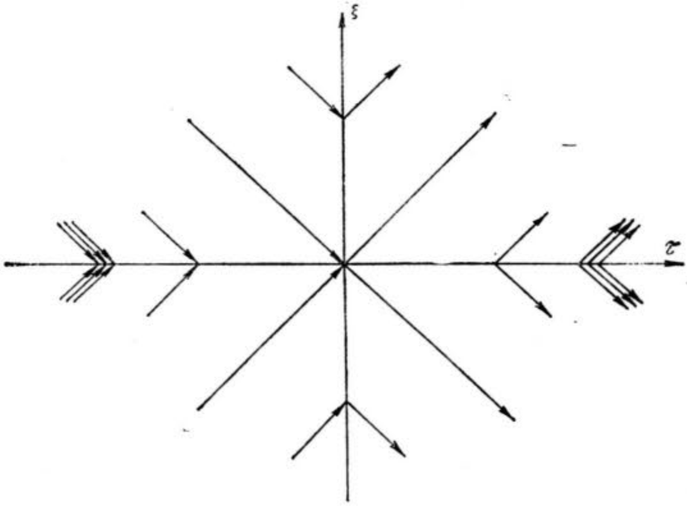
При $i \in \{N_1 + 1, \ldots, N_2\}$ имеем

$$T = \int_0^{Z(T)} [\Phi^i(\tau, Jy, \alpha^i + SZ)]^{-1}\, dZ = \frac{1}{SZ(T)} \int_{\alpha^i}^{\alpha^i + SZ(T)} \frac{d\eta}{\Phi^i(\tau, Jy, \eta)}\, Z(T) \to$$

$$\to \frac{1}{P^i(\tau, Jy^i)} \int_0^{P^i(\tau, Jy^i)} \frac{d\eta}{\Phi^i(\tau, Jy, \eta)}\, Z(T), \qquad \varepsilon \to 0, \; S \to \infty.$$

Тогда $Y_{k_i}^i(1) = [\varphi_{k_i}^{i\prime}]^{-1}(Z(1) - \nu^i)$ стремится к выражению, указанному в условии теоремы.

При $i \in \{N_2 + 1, \ldots, N\}$ уравнение (8) имеет особые точки и $Z(T)$ меняется в интервале, длина которого не превышает периода правой части, т. е. $|Z(T)| \leqslant S^{-1}P^i(\tau, Jy^i)$. В силу ограниченности $P^i(\tau, Jy^i)$ в области $\mathcal{D}$ получаем, что $Z(T) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $S \to \infty$. Тогда $Y^i_{k_i}(1) \to$ $\to -[\varphi^{i'}_{k_i})^{-1} \nu^i$. Таким образом, показано, что система (4) удовлетворяет условию в) и получено выражение для $F_0(\tau, y) = Y_{\tau y}(1)$, совпадающее с правой частью системы, указанной в теореме 2. Применение теоремы 1 завершает доказательство.



В заключение приведем пример, показывающий, что в расширенном фазовом пространстве системы (1), как и в фазовом пространстве сингулярно возмущенной системы, можно наблюдать театр теней [6].

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$dy/d\tau = \cos(\varepsilon^{-1}(|\tau| - |y|)) \operatorname{sign} \tau, \quad y \in R^1.$$

Применяя теорему 2, получаем, что в любой ограниченной замкнутой области, непересекающейся с прямыми $\tau = 0$ и $y = 0$, решение усредненного уравнения имеет вид $|\tau| - |\xi| = \text{const}$. Таким образом, на плоскости (τ, y) появляются воронки и души (см. рисунок). Естественно полупрямую $(\xi = 0, \tau < 0)$ назвать притягивающей, а полупрямую $(\xi = 0, \tau > 0)$ — отталкивающей и рассмотреть вопрос о существовании уток, т. е. решений, тени которых переходят с притягивающей полупрямой на отталкивающую. В данном примере из инвариантности уравнения относительно замены τ на $-\tau$ следует, что траектория, вошедшая в ореол притягивающей полупрямой в ореоле $\tau = -\tau_0$, выйдет из ореола отталкивающей полупрямой в ореоле $\tau = \tau_0$. Таким образом, на плоскости (τ, y) имеются тоннели.

Применение теоремы 2 к уравнению $dy/d\tau = \cos(\varepsilon^{-1}(|\tau| - |y|))$, $y \in R^1$ в ограниченной замкнутой области, не пересекающейся с прямыми $\tau = 0$ и $y = 0$, дает тот же результат, однако глобальный фазовый портрет на плоскости (τ, y) выглядит иначе. Изображенная на рисунке воронка продолжается при $\tau > 0$ узким пучком траекторий, расположенных в ореоле прямой $y = \tau$. Узкий пучок траекторий, расположенных при $\tau < 0$ в ореоле прямой $y = \tau$, при $\tau > 0$ образует изображенный на рисунке душ. Уток эта система не имеет.

1. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1971.— 440 с.
2. *Sari T.* Sur la theorie asymplotique des oscilations non stationnaires // Soc. Math. France. Asterisque.— 1983.— **109-110**.— P. 141—158.
3. *Callot I. L.* Stroboscopie infinitesimale.— IRMA, Strasbourg (a paraître): 1984.— 180 s.
4. *Федоренко Р. П.* Вывод и обоснование уравнений в медленном времени (стробоскопический метод) // Журн. вычислит. математики и мат. физики.— 1974.— **14**, № 5.— С. 1171—1211.
5. *Девис М.* Прикладной нестандартный анализ.— М. : Мир, 1980.— 240 с.
6. *Звонкин А. К., Щубин М. А.* Нестандартный анализ и сингулярное возмущение обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук.— 1984.— **39**, № 2.— С. 77—127.
7. *Diener F.* Methode du plan d'observability; Developpements en ε-ombres.— Strasbourg, 1981.— 120 s.
8. *Картье П.* Сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений и нестандартный анализ // Успехи мат. наук.— 1984.— **39**, № 2. —С. 57—76.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Получено 04.02.87