УДК 517.9;539,1.01

В. С. Владимиров, Ю. А. Митропольский,
О. С. Парасюк, Д. Я. Петрина, А. М. Самойленко

Исследования Н. Н. Боголюбова в области математики и теоретической физики

Научное творчество выдающегося советского математика, механика и физика-теоретика Николая Николаевича Боголюбова существенно влияет на развитие современной математики, механики и теоретической физики. Его работы открыли новые направления в этих областях науки и привели к созданию многих школ как у нас, так и за рубежом.

Приведем обзор некоторых его результатов.

В своей первой научной работе, написанной в 1924 году, Н. Н. Боголюбов рассмотрел поведение решений линейных дифференциальных уравнений на бесконечности. Она послужила началом цикла работ по вариационному исчислению и теории дифференциальных уравнений, в которых были разработаны прямые методы нахождения экстремума соответствующих функционалов независимо от регулярности или квазирегулярности.

Одна из оригинальных работ этого цикла «О некоторых новых методах вариационного исчисления» на Международном конгрессе, посвященном проблемам вариационного исчисления, была удостоена премии Болонской академии наук (премия А. Мерлани). Работы этого цикла уже тогда создали молодому математику широкую известность.

Глубокие и тонкие исследования проведены Н. Н. Боголюбовым в области теории почти периодических функций. Здесь построена фактически новая теория равномерных почти периодических функций. Н. Н. Боголюбов показал, что основные теоремы этой теории (например, теорема о равномерном приближении непрерывной почти периодической функции тригонометрическими суммами) являются результатами общей теоремы, относящейся к произвольным ограниченным функциям. Согласно доказанной им теореме произвольная ограниченная функция в определенных линейных комбинациях ведет себя как тригонометрическая сумма и «в среднем» обладает свойством почти периодичности.

В цикле работ, посвященных почти периодическим функциям, принципиальное значение имеет чисто арифметическое доказательство следующей важной теоремы: если G — относительно плотное множество на действительной оси, то любым достаточно малым положительным ε, η можно сопоставить линейно независимые (действительные) числа $\omega_1, \ldots, \omega_s$ так, что если некоторое действительное τ удовлетворяет неравенствам $R(\tau\omega_1) \leqslant \varepsilon, \ldots, R(\tau\omega_s) \leqslant \varepsilon$, где $R(x)$ обозначает дробную часть числа x, то оно также должно удовлетворять неравенству $|\tau - \tau_1 - \tau_2 + \tau_3 + \tau_4| \leqslant \eta$, где τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 — некоторые точки множества G.

Из этой теоремы непосредственно вытекают теоремы об аппроксимации почти периодических функций тригонометрическими суммами.

Н. Н. Боголюбов получил важные результаты в области теории дифференциальных уравнений с граничными условиями. Эти результаты непосредственно связаны с применением разностного метода к вариационному исчислению. Основа работ этого цикла, имеющих прямое отношение к приближенным методам решения задач математической физики, — оценка погрешности при приближенном определении собственных чисел и собственных функций граничной задачи. Приближенное решение граничной задачи базируется здесь на так называемом принципе Рэлея в статистической механике, заключающемся в переходе от разностного уравнения к дифференциальному при переходе от механики дискретной системы к механике непрерывной системы. Для обоснования принципа Рэлея следует показать, что решения соответствующего разностного уравнения стремятся к решениям соответствующего дифференциального уравнения.

Так, в задаче об экстремуме функционала $\int f(x, y, y')\,dx$ показано, что при некоторых ограничениях, налагаемых на производные $f_{yy'}, f_{y'y'}, f_{yy}, f_{xy}$, уравнение Эйлера для искомого экстремума при заданных граничных условиях является предельным для соответствующих конечно-разностных уравнений при тех же граничных условиях.

Н. Н. Боголюбов применил аппроксимационный метод не только к решению задачи нахождения собственных чисел и собственных функций граничной задачи, но и к решению уравнений в частных производных.

В 1932 г. Н. Н. Боголюбов совместно со своим учителем академиком Н. М. Крыловым приступили к разработке совершенно нового направления математической физики — теории нелинейных колебаний, названной ими нелинейной механикой.

Здесь уместно заметить, что в 20-х годах в связи с быстрым развитием радио- и электротехники, самолетостроения и в связи с необходимостью учета колебательных процессов в машиностроении изучение нелинейных колебаний приобрело особую актуальность. Для их изучения было совершенно недостаточно применения как строгих, математически обоснованных методов, разработанных А. Пуанкаре и А. Ляпуновым, так и методов теории возмущений, разработанных астрономами.

Как известно, методы Ляпунова — Пуанкаре дают возможность исследовать периодические режимы, а метод теории возмущений применяли в астрономии для исследования исключительно консервативных систем, что налагало существенные ограничения на возможность применения существующих методов, в частности метода теории возмущений, к исследованию колебательных систем, поскольку последние, как правило,— системы неконсервативные.

Исследования в области нелинейной механики Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов развивают в основном в двух направлениях: создание методов асимптотического интегрирования нелинейных уравнений, описывающих нелинейные колебательные процессы, и математическое обоснование этих методов, сводящееся к исследованию общей теории динамических систем. Первое направление охватывает изучение дифференциальных уравнений с малым или большим параметром и получение приближенных формул для практического применения. Н. Н. Боголюбов совместно с Н. М. Крыловым после преодоления больших принципиальных трудностей распространили методы теории возмущений на общие неконсервативные системы и построили новые асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.

Новые асимптотические методы строго обоснованы и позволяют получить решение не только первого приближения (как, например, в методе Ван-дер-Поля), но и высших приближений. Методы применимы для изучения периодических и квазипериодических колебательных процессов, отличаются простотой и наглядностью расчетных схем.

Асимптотические методы нелинейной механики, разработанные Н. Н. Боголюбовым, сыграли огромную роль во всем развитии учения о нелинейных колебаниях в самом широком смысле. Поэтому остановимся более подробно на идее этих методов.

Идея асимптотических методов становится особенно ясной при рассмотрении, например, уравнения

$$d^2x/dt^2 + \omega^2 x = \varepsilon f(x, dx/dt, \varepsilon), \qquad (1)$$

описывающего колебательный процесс в системе с одной степенью свободы, близкой к гармоническому вибратору. При отсутствии нелинейности, т. е. при $\varepsilon = 0$, колебания, описываемые уравнением (1), чисто гармонические

$$x = a \cos\theta, \qquad (2)$$

с постоянной амплитудой и равномерно вращающимся фазовым углом ($da/dt = 0$, $d\Theta/dt = \omega$). Если $\varepsilon \neq 0$, то естественно ожидать появления обертонов, а также, при неустановившемся режиме, медленного систематического изменения амплитуды и частоты. Эти физические соображения математически выражаются следующим образом: решение уравнения (2) ищется в виде ряда по степеням малого параметра

$$x = a\cos\theta + \varepsilon u_1(a, \theta) + \varepsilon^2 u_2(d, \theta) + \dots, \tag{3}$$

где $u_1(a, \theta)$, $u_2(a, \theta)$, ... периодически зависят от угла θ; a и θ определяются из уравнений $da/dt = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots$, $d\theta/dt = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots$.

Формальное разложение (3) можно использовать в двух направлениях. С одной стороны, ограничиваясь некоторым числом n членов, получаем расчетную формулу для построения n-го приближения; с другой,— рассматривая эту формулу n-го приближения как некоторую замену переменных, можно привести точное уравнение (1) к форме, удобной для теоретических исследований и, таким образом, получить возможность как оценки погрешности данного приближения, так и установления ряда свойств точного решения.

Рассмотренная на простейшем примере основная идея асимптотических методов нелинейной механики была развита их авторами применительно к самым разнообразным случаям систем с малым, а также с большим параметрами, в том числе и к системам с бесконечно большим числом степеней свободы.

В разработке асимптотических методов особое внимание уделено построению простых эффективных приемов, позволяющих получить приближенные формулы, исходя из элементарных соображений. Здесь в первую очередь следует указать, например, весьма эффективный принцип эквивалентной линеаризации и символические методы.

Асимптотические методы параллельно с разработкой применялись их авторами для решения многих актуальных задач, связанных с объяснением и открытием новых явлений, наблюдаемых в нелинейных колебательных системах. Так, были получены формулы второго приближения для определения частоты стационарных колебаний в электронных генераторах, позволяющие определить влияние обертонов на стабильность частоты, исследованы резонансы деления частоты, внутренние резонансы в системах со многими степенями свободы. Особое внимание уделено теории резонанса в нелинейных системах в связи с вопросами использования нелинейных элементов для борьбы с резонансом в машиностроении. С помощью асимптотических методов решены задачи о продольной устойчивости самолета, о колебаниях и устойчивости стержней и рамных конструкций, о синхронизации работы генераторов и др.

Созданная и разработанная Н. Н. Боголюбовым теория метода усреднения, строго математически обоснованная,— является важнейшим этапом развития нелинейной механики. В ней показано, что усреднение органически связано с существованием некоторой замены переменных, позволяющей исключить время t из правых частей рассматриваемых уравнений с произвольной степенью точности относительно малого параметра ε.

При этом, исходя из тонких физических соображений, Н. Н. Боголюбов указал, как строить не только систему первого приближения (усредненную систему), но и усредненные системы высших приближений, решения которых аппроксимируют решения исходной (точной) системы с произвольной наперед заданной точностью.

Рассматривается дифференциальное уравнение в векторной форме

$$dx/dt = \varepsilon X(t, x), \tag{4}$$

где ε — малый положительный параметр, t — время, x — точки n-мерного евклидова пространства E_n.

Уравнения вида (4), правая часть которых пропорциональна малому параметру ε, названы Н. Н. Боголюбовым уравнениями в стандартной форме.

Далее, при определенных ограничениях, налагаемых на правые части уравнений (4), заменой переменных

$$x = \xi + \varepsilon F_1(t, \xi) + \varepsilon^2 F_2(t, \xi) + \ldots + \varepsilon^m F_m(t, \xi) \tag{5}$$

уравнение (4) приводится к эквивалентному уравнению

$$d\xi/dt = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P_2(\xi) + \ldots + \varepsilon^m P_m(\xi) + \varepsilon^{m+1} R(t, \xi). \tag{6}$$

Пренебрегая в уравнении (6) слагаемым $\varepsilon^{m+1}R(t, \xi)$, Н. Н. Боголюбов получает «усредненное» уравнение m-го приближения $d\xi/dt = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P_2(\xi) + \ldots + \varepsilon^m P_m(\xi)$. При этом функции $F_1(t, \xi)$, $F_2(t, \xi), \ldots$ $\ldots, F_m(t, \xi)$, входящие в правую часть замены (5), находятся элементарно, функции $X_0(\xi), P_2(\xi), \ldots, P_m(\xi)$ определяются усреднением правой части уравнения (4) после подстановки в нее выражения (5).

Сформулированный и развитый Н. Н. Боголюбовым метод усреднения применительно к уравнениям в стандартной форме получил в его работах (см., например, «О некоторых статистических методах в математической физике») строгое математическое обоснование, сводящееся, в основном, к решению следующих проблем:

1) определение условий, при выполнении которых разность между решением точной системы уравнений

$$dx/dt = \varepsilon X(t, x) \tag{7}$$

и решением соответствующей ей усредненной системы

$$d\xi/dt = \varepsilon X_0(\xi), \tag{8}$$

где

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, \xi)\, dt = X_0(\xi) \tag{9}$$

для достаточно малых значений параметра ε, становится сколь угодно малой на сколь угодно большом, но конечном, интервале времени;

2) установление соответствия между различными свойствами решений точных (7) и усредненных (8) уравнений, зависящими от их поведения на бесконечном интервале времени, в частности установление соответствия между периодическими решениями точной и усредненной систем и установление свойств притяжения ими близких решений.

В решении первой проблемы для достаточно широкого класса дифференциальных уравнений в стандартной форме фундаментальное значение имеет классическая теорема Н. Н. Боголюбова, устанавливающая оценку разности $|x(t) - \xi(t)|$ на сколь угодно большом, однако конечном, интервале времени при достаточно общих условиях, налагаемых на правые части системы (7). При этом для правых частей системы (7) должно существовать только среднее (9).

Эта основная в методе усреднения теорема дала возможность существенно расширить область применения метода усреднения и в дальнейшем получила большое развитие и обобщение в работах многих советских и зарубежных математиков.

Решению второй проблемы Н. Н. Боголюбов посвятил несколько важных теорем. В этих теоремах рассматривается соответствие между периодическими решениями, вопрос о существовании и соответствии между почти периодическими решениями, а также выдвинута идея рассмотрения интегральных многообразий для нелинейных дифференциальных уравнений в стандартной форме, и в простейших случаях для уравнений в стандартной форме устанавливается соответствие между интегральными многообразиями для точной системы и соответствующей ей усредненной системы.

С помощью своего метода усреднения Н. Н. Боголюбов рассмотрел изящный пример — физический маятник, свободно вращающийся в вертикальной плоскости вокруг своей точки подвеса, и показал, что при высокой частоте колебаний точки подвеса неустойчивое верхнее положение равновесия маятника становится устойчивым и, кроме того, маятник может синхронно вращаться с угловой скоростью ω (ω — частота колебаний точки подвеса), выполняя работу по преодолению сопротивления, если только эта работа не превышает известную величину.

Следует отметить, что выдвинутая Н. Н. Боголюбовым идея рассмотрения интегральных многообразий — это новый подход в качественной теории дифференциальных уравнений. Известно, что индивидуальные решения дифференциальных уравнений, как правило, очень чувствительны к малым изменениям их правых частей. В теории интегральных многообразий мы имеем дело не с индивидуальными кривыми, а с интегральными многообразиями (некоторыми гиперповерхностями), обладающими по сравнению с индивидуальными решениями большей устойчивостью по отношению к малым изменениям в правых частях уравнений. Следовательно, рассматривая интегральные многообразия, можно доказать теоремы, справедливые для индивидуальных решений только при достаточно жестких условиях, налагаемых на правые части уравнений.

Доказанные Н. Н. Боголюбовым теоремы существования и устойчивости интегральных многообразий имеют большое значение для исследования индивидуальных решений, поскольку существование устойчивого многообразия позволяет вместо рассмотрения всего фазового пространства сконцентрировать внимание на решениях, лежащих на интегральном многообразии.

В цикле работ, посвященных исследованию интегральных многообразий, особо важным и получившим в дальнейшем большое развитие и широкое применение в механике и технике является предложенный Н. Н. Боголюбовым одночастотный метод — метод построения двухпараметрического решения, соответствующего одночастотному колебательному режиму в системах со многими степенями свободы.

Говоря о достижениях Н. Н. Боголюбова в области качественного исследования проблем нелинейной механики, нельзя не остановиться на теоремах, относящихся к исследованию стационарных колебательных процессов. Исследуя стационарные колебания, Н. Н. Боголюбов совместно с Н. М. Крыловым в 1934 г. предложили некоторый общий подход для изучения уравнений типа

$$\begin{aligned} da/dt &= \varepsilon f_1(a, \theta), \\ d\theta/dt &= \omega + \varepsilon f_2(a, \theta). \end{aligned} \tag{10}$$

Содержание этого метода сводится к построению замены переменных, позволяющей отделять «медленные» переменные a от «быстрых» переменных θ. Такая замена позволяет представлять решение системы (10) в виде асимптотического ряда, первый член которого совпадает с решением, получаемым по методу Ван-дер-Поля. Далее, применяя теорию Пуанкаре — Ляпунова, а также теорию Пуанкаре — Данжуа о траекториях на торе, Н. Н. Боголюбов исследовал для уравнений типа (10) характер точного стационарного решения вблизи приближенного решения при достаточно малом значении параметра ε и установил теоремы о существовании и устойчивости квазипериодических решений.

Следует заметить, что указанная теория Пуанкаре — Данжуа относится к одномерному случаю, когда исходная система дифференциальных уравнений сводится к уравнениям $d\varphi/dt = \nu + f(\varphi, \theta)$, $d\theta/dt = \omega$. Поэтому в ранних работах, посвященных изучению квазипериодических режимов, Н. Н. Боголюбов установил существование решений и исследовал устойчивость квазипериодического режима только для двух частот, т. е. когда исследование стационарного колебательного режима сводится к исследованию поведения кривой, лежащей на двухмерном тороидальном многообразии.

Случай же торов высшей размерности в рамках указанной теории Пуанкаре — Данжуа не удавалось изучить. В связи с этим доказательство фундаментальной теоремы о существовании квазипериодического режима для системы, характеризуемой уравнением $dx/dt = X(x, \varepsilon)$, где x — n-мерный вектор — большое достижение Н. Н. Боголюбова. Этот результат получен им в 1963 г. на основании объединения метода интегральных многообразий с методом ускоренной сходимости.

Основополагающие идеи и фундаментальные результаты, полученные в области нелинейной механики, составляют в настоящее время основу многих современных исследований по общей механике, механике сплошной среды, теории устойчивости, теории регулирования и стабилизации, математической экологии и других направлений науки и техники.

Подводя итог основным результатам, полученным Н. Н. Боголюбовым в области создания асимптотических методов нелинейной механики, следует особо подчеркнуть, что благодаря своему глубокому теоретическому содержанию и практической направленности эти методы получили широкую известность не только в нашей стране, но и за рубежом. Они обогатили советскую науку новыми достижениями как в области математики, так и в области приложений к механике, физике и технике. С полной уверенностью можно сказать, что во всем мире одним из наиболее эффективных методов расчета нелинейных колебательных процессов являются асимптотические методы нелинейной механики.

За исследования в области нелинейной механики и статистической физики, изложенные в монографиях «О некоторых статистических методах в математической физике» и «Проблемы динамической теории в статистической физике», Н. Н. Боголюбов в 1947 г. удостоен Государственной премии первой степени.

Во второй половине тридцатых годов интересы Н. Н. Боголюбова постепенно смещаются к теории динамических систем и статистической механике. К этому времени фон Нейман и Биркгоф доказали эргодические теоремы, связанные с эргодической гипотезой Больцмана о равенстве средних по времени и фазовому пространству. При доказательстве существенно использовалось предложение о существовании инвариантной меры у динамической системы. Для гамильтоновых систем такой мерой является объем фазового пространства. Вопрос о существовании инвариантной меры у произвольной динамической системы был тогда открытым. Н. Н. Боголюбов совместно с Н. М. Крыловым дали положительный ответ на этот вопрос, доказав фундаментальную теорему о существовании инвариантной меры у компактной динамической системы. Они ввели понятие эргодических множеств и показали, что инвариантную меру можно разложить на инвариантные меры, которые не разлагаются и сосредоточены на эргодических множествах. Эти результаты были перенесены и на стохастические системы и для них были доказаны эргодические теоремы. При этом были использованы тонкие свойства вполне непрерывных положительных операторов. Эти работы явились первыми значительными результатами по теории меры и функциональному анализу на Украине, их можно считать началом развития функционального анализа в республике.

Для динамических систем со случайными силами Н. Н. Боголюбов вывел уравнения Фоккера — Планка на основе теории возмущений без использования предположений о существовании вероятностей перехода с одного состояния в другое, как это делалось раньше. Здесь уже был использован подход, который Н. Н. Боголюбов с успехом использовал позже в статистической механике, например, при выводе уравнения Больцмана. Сущность этого подхода состоит в том, что основные уравнения статистической механики выводятся на основе минимального числа необходимых фундаментальных принципов, имеющих глубокий физический смысл, а добавочных чисто технических допущений не делается.

Первые работы Н. Н. Боголюбова по статистической механике естественно связаны с дальнейшим развитием асимптотических методов нелинейной механики и их приложением к бесконечным системам в классической статистической механике. Так, в монографии «О некоторых статистических методах в математической физике» Н. Н. Боголюбов рассмотрел задачу о влиянии случайной силы на гармонический осциллятор и показал, что в зависимости от выбора шкалы времени случайный процесс, описывающий состояние, можно рассматривать как динамический, как марковский и в общем случае как немарковский процесс. Здесь впервые четко введено представление об иерархии времен в статистической механике. В монографии рассматривалась также система, взаимодействующая с большой системой, находящейся в состоянии равновесия,— термостатом. Было показано, что если число частиц в термостате неограниченно возрастает, а время стремится к бесконечности, то состояние системы стремится к равновесному. Это был первый пример математически строгого обоснования общепринятой гипотезы о приближении к равновесию системы, связанной с термостатом.

Эти работы Н. Н. Боголюбова открыли новое направление на стыке дифференциальных уравнений и теории вероятностей — теорию стохастических дифференциальных уравнений и теперь общепризнаны как основополагающие в этой теории.

В монографии «Проблемы динамической теории в статистической физике» классическая статистическая механика сформулирована в терминах последовательностей функций распределения и уравнений для них, называемых теперь уравнениями Боголюбова. По существу было введено новое понятие состояния систем статистической механики как бесконечной последовательности функций распределения, а эволюция состояния описывалась уравнениями Боголюбова. Состояния бесконечных систем определялись из состояний конечных в результате процедуры термодинамического предела, впервые в мировой литературе было намечено обоснование термодинамического предела.

Исходя из своих уравнений для функций распределения и фундаментального принципа ослабления корреляций, Н. Н. Боголюбов вывел уравнения Больцмана, не прибегая к гипотезе «молекулярного хаоса», а также уравнения Власова и Ландау. Были четко сформулированы понятия об иерархии времени и связанные с этим различные стадии эволюции: хаотическая, кинетическая и гидродинамическая. Таким образом, впервые разработан последовательный метод строгого построения уравнений физической кинетики для широкого класса нейтральных и заряженных систем.

Эти работы Н. Н. Боголюбова придали классической статистической механике современный вид и являются по существу следующим после Максвелла, Больцмана и Гиббса новым — боголюбовским этапом в развитии классической статистической механики.

В монографии «Лекції з квантової статистики» Н. Н. Боголюбов вводит новое понятие состояния бесконечных систем квантовой статистической механики через бесконечную последовательность статистических операторов, эволюция состояния описывается уравнениями для статистических операторов — уравнениями Боголюбова. В монографии также разработан новый подход к приближенному вторичному квантованию и дано его применение к полярной теории металла, теории магнетизма.

В работе «К теории сверхтекучести» Н. Н. Боголюбов дал микроскопическое объяснение явлению сверхтекучести. До его работ была феменологическая теория Ландау, основанная на предположении о форме спектра элементарных возбуждений. Исходя из общего гамильтониана для Бозе систем и предполагая, что макроскопическое число частиц находится в основном состоянии с нулевым импульсом, а поэтому операторы рождения и уничтожения частиц с нулевым импульсом —c— числа, получен определенный аппроксимирующий гамильтониан — квадратичная форма от операторов рождения и уничтожения. Обычная теория возмущений оказалась неприменимой к нему из-за сильного взаимодействия частиц с противоположными импульсами. Поэтому гамильтониан был диагонализован с помощью канонических преобразований (u — v — преобразований Боголюбова) и точно вне рамок теории возмущений был найден спектр элементарных возбуждений.

Разлагая полевые операторы на c-числовую и операторную часть, Н. Н. Боголюбов фактически ввел в квантовую теорию метод спонтанного нарушения симметрий для систем с вырожденным основным состоянием. Этот прием был открыт заново в квантовой теории поля спустя десятилетия.

В 1957 г. Н. Н. Боголюбов создал строгую микроскопическую теорию сверхпроводимости (явление сверхпроводимости открыто в 1911 г. и долго не поддавалось объяснению). Бардин, Купер, Шриффер предложили лишь упрощенную модель, в которой взаимодействуют только электроны с противоположными импульсами и спинами, и определили основное состояние, его энергию и спектр элементарных возбуждений.

Одновременно полную теорию сверхпроводимости построил Н. Н. Боголюбов на основе модели взаимодействующих электронов и фононов. Обобщив свой метод канонических преобразований на ферми-системы и выдвинув принцип компенсации опасных диаграмм, он определил основное состояние, состоящее из спаренных электронов с противоположными импульсами и спинами, его энергию и энергию элементарных возбуждений. Было показано, что явление сверхпроводимости состоит в спаривании электронов и фазовом переходе из нормального состояния со свободными электронами в сверхпроводящее с конденсатом пар.

Таким образом Н. Н. Боголюбов создал строгую теорию сверхтекучести и сверхпроводимости и показал, что в физической основе этих двух фундаментальных явлений природы лежит процесс конденсации Базе-частиц и соответственно пар фермионов.

В 1957 г. за эти работы Н. Н. Боголюбову присуждена премия имени М. В. Ломоносова. В 1958 г. ему присуждена Ленинская премия за разработку новых методов в квантовой теории поля и статистической физике, приведших в частности к обоснованию теории сверхтекучести и сверхпроводимости.

Задача объяснения явления сверхпроводимости требовала решения очень трудных математических проблем, связанных с обоснованием применяемых приближений. В связи с этим Н. Н. Боголюбов рассмотрел редуцированный гамильтониан, в котором учитывалось взаимодействие одних электронов и провел для него полное математическое исследование при нулевой температуре. При этом он заложил основы нового мощного метода аппроксимирующего гамильтониана, который позволяет линеаризовать нелинейные квантовые уравнения движения, а всю нелинейность свести к уравнениям самосогласования для обычных функций, в которые переходят определенные операторные выражения. Этот метод был распространен на ненулевые температуры и широкий класс систем и в настоящее время представляет собой один из наиболее мощных методов решения нелинейных уравнений для квантовых полей.

Исследуя явления сверхтекучести и сверхпроводимости, Н. Н. Боголюбов ввел новое понятие квазисредних для систем с вырожденным основным состоянием и доказал теорему «об особенности типа $1/q^2$», из которой вытекает существование дальнодействия у систем со спонтанно нарушенной симметрией. Квазисредние стали основой теории фазовых переходов.

Н. Н. Боголюбов впервые поставил задачу обоснования термодинамического предела для равновесных состояний и свел ее к задаче функционального анализа о существовании решения операторного уравнения для функций распределения и его предельных свойств. Вначале рассматривались системы с отталкиванием. Позже эта задача была полностью решена для общих систем с устойчивым короткодействующим взаимодействием в рамках канонического ансамбля. Метод обоснования термодинамического предела, предложенный Н. Н. Боголюбовым в 1949 г., в шестидесятые годы открыт заново и применен в рамках большого канонического ансамбля.

Работы Н. Н. Боголюбова в классической и квантовой статистической механике создали основы нового раздела в математической физике — современную математическую физику бесконечных систем. Характерной чертой последней является само понятие состояния. В классической математической физике состояние системы описывается конечным числом функций, определяемых конечным числом дифференциальных уравнений в частных производных. В отличие от этого в современной математической физике бесконечных систем состояние задается бесконечной последовательностью функций от бесконечного числа аргументов, удовлетворяющих операторным уравнениям. Наиболее развитым разделом современной математической физики является классическая и квантовая статистическая механика, и пионерские работы здесь выполнены Н. Н. Боголюбовым.

В конце сороковых и в начале пятидесятых годов в творчестве Н. Н. Боголюбова наступил новый этап, связанный с квантовой теорией поля. Квантовая теория поля в это время имела значительные успехи, связанные с квантовой электродинамикой, где с большой точностью были объяснены все экспериментальные данные. Вместе с тем в ней возникли серьезные затруднения, связанные с расходимостью отдельных членов теории возмущений.

Н. Н. Боголюбов создал свой кардинальный подход к проблемам квантовой теории поля. В основе его лежит матрица рассеяния, строящаяся на основе нескольких постулатов или аксиом: причинности, релятивистской инвариантности, унитарности, спектральности и соответствия. Он построил реализацию своих аксиом по теории возмущений с определенным произволом — квазилокальными операторами, которые можно подобрать так, чтобы скомпенсировать расходимости вкладов от диаграмм. Было установлено, что причиной возникновения расходимостей являются специальные обобщенные функции квантовой теории поля, для которых операция умножения не определена. При соответствующем определении умножения этих обобщенных функций с помощью так называемой R-операции расходимости устраняются в любом порядке по теории возмущений. В развитие теории устранения расходимостей внесли свой вклад такие выдающиеся ученые как Фейнман, Швингер, Дайсон, Салам и др. Но последовательная, математически строгая теория была построена Боголюбовым. Эти результаты вошли в золотой фонд теоретической физики.

В 1956 г. Н. Н. Боголюбов доказал, что из предложенных им аксиом следует, что амплитуды рассеяния могут быть голоморфно продолжены в комплексную плоскость, и дал строгое доказательство дисперсионных соотношений, играющих важную роль в теории рассеяния Для этого им была открыта новая область в теории функций многих комплексных переменных — знаменитая теорема об «острие клина», которая представляет собой новый принцип голоморфного продолжения функций многих комплексных переменных.

Фактически в квантовой теории поля, как и в статистической механике, Н. Н. Боголюбов создал новое понятие состояния с помощью бесконечной последовательности амплитуд рассеяния или коэффициентных функций и функций Грина. Современные исследования по конструктивной квантовой теории поля базируются на уравнениях для этих последовательностей и существенно используют методы, созданные Н. Н. Боголюбовым в статистической механике для обоснования термодинамического предела.

На основе этого общего подхода были исследованы проблемы масштабной инвариантности и автомодельности при высоких энергиях.

В 1964—1966 гг. Н. Н. Боголюбов выполнил фундаментальные работы по теории симметрий и динамических кварковых моделей, в которых было предложено новое квантовое число для кварков — «цвет». Это понятие позволило решить известную проблему статистики кварков, привело к построению квантовой хромодинамики и играет в ней важную роль.

Анализ процедуры перенормировок, связанный с построением матрицы рассеяния, не содержащей расходимостей, привел Н. Н. Боголюбова к выводу о существовании мультипликативной группы конечных перенормировок — так называемой ренормализационной группы. Используя дифференциальные уравнения этой группы и дополняя их результатами теории возмущений, он получил улучшенные формулы теории возмущений. За эти работы в 1984 г. Н. Н. Боголюбов был удостоен Государственной премии. В этом же году за выдающиеся работы в области математики и теоретической физики Президиум АН СССР присудил ему золотую медаль им. М. В. Ломоносова.

Перечисленные нами направления далеко не исчерпывают все поле научной деятельности Н. Н. Боголюбова.