УДК 517.9

В. Гр. Самойленко, А. К. Прикарпатский,
И. В. Микитюк

Абелевы интегралы, интегрируемые динамические системы типа Неймана — Рософатиуса и представление Лакса

При исследовании многих вполне интегрируемых гамильтоновых динамических систем [1—3] были обнаружены важные алгебраические и геометрические структуры, объединяющие их естественным образом. В этом отношении особенно интересными оказались конечномерные динамические системы осцилляторного типа [4—6], обобщающие классическую гамильтонову систему Неймана, эквивалентную уравнениям для геодезического потока на многомерном эллипсоиде. При этом во всех упомянутых выше случаях геометрическая структура динамических систем проявляется в виде алгебро-геометрического описания специальных ассоциированных алгебраических кривых и их многообразий Якоби. С другой стороны, алгебраические кривые в неявном виде также появляются при изучении на основе представления Лакса большого множества гамильтоновых потоков, линеаризующихся на многообразиях Якоби соответствующих спектральных задач [1—3]. В данной работе рассматриваются некоторые аспекты алгебро-геометрических структур, возникающих при исследовании интегрируемости динамических систем типа Неймана—Росохатиуса, задающие гамильтоновы потоки на N-мерной сфере $\mathbf{S}^N$, $\mathbb{Z}_+ \ni N < \infty$.

Рассмотрим на ко-касательном расслоении к N-мерной сфере $\mathbf{S}^N$, $\mathbb{Z}_+ \ni N < \infty$, следующую гамильтонову систему:

$$dy_j/dt + \omega_j^2 x_j = p(x)\, x_j \omega_j + \alpha_j^2 x_j^{-3}, \quad dx_j/dt = y_j, \tag{1}$$

где $p(x) = 2\sum_{j=1}^{N+1} \omega_j x_j^2 - \alpha_0$, $j = \overline{1, N+1}$, $M_\varphi = \Big\{\varphi_1 = \sum_{j=1}^{N+1} x_j^2 = 1,\ \varphi_2 = \sum_{j=1}^{N+1} x_j y_j = 0\Big\} = T^*(\mathbf{S}^N) \hookrightarrow \mathbb{R}^{2N+2}$, $t \in \mathbb{R}^1$ — эволюционная переменная, $\omega_j \neq \omega_k \in \mathbb{R}^1$ при $j \neq k = \overline{1, N+1}$ — частоты свободных колебаний, $\{\alpha_j \neq \alpha_k \in \mathbb{R}^1$ при $j \neq k = \overline{0, N+1}\}$ — набор независимых числовых параметров. Так как $\det\{\varphi_j, \varphi_k\}_\Omega \neq 0$ на подмногообразии M_Φ, где $\{.,.\}_\Omega$ — скобка Пуассона, соответствующая канонической симплектической структуре $\Omega = \sum_{j=1}^{N+1} dy_j \wedge dx_j$ на $\mathbb{R}^{2N+2}$, то для системы (1) справедлива [2] следующая гамильтонова форма записи:

$$dx_j/dt = \{H_0, x_j\}_{\Omega_\varphi}, \quad dy_j/dt = \{H_0, y_j\}_{\Omega_\varphi}, \tag{2}$$

где $\Omega_\varphi = \Omega|_{M_\varphi}$ — ограничение 2-формы $\Omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2N+2})$ на невырожденное подмногообразие $M_\Phi \hookrightarrow \mathbb{R}^{2N+2}$,

$$H_0 = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N+1} y_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N+1} \omega_j^2 x_j^2 - \frac{1}{8} p^2(x) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N+1} \alpha_j^2 x_j^{-2} \in \mathcal{D}(M_\varphi) \tag{3}$$

— функция Гамильтона для системы (1), ограниченная на подмногообразие M_Φ. При этом ясно, что симплектическая структура $\Omega_\varphi \in \Lambda^2(M_\varphi)$ является на M_φ невырожденной и замкнутой. Наша задача — доказать полную интегрируемость по Лиувиллю [7] динамической системы (2) на M_Φ, а также описать в явном виде все алгебро-геометрические структуры, возникающие при исследовании этой системы.

Рассмотрим множество функций $\{F_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2N+2}),\ j = \overline{1, N+1}\}$, где

$$F_j = x_j^2\left[\omega_j - \frac{1}{2}(p(x) - \alpha_0)\right] + \sum_{\substack{k,j=1 \\ k\neq j}}^{N+1}\left[\frac{(y_j x_k - y_k x_j)^2 + x_j^2\alpha_k^2 x_k^{-2} + x_k^2 \alpha_j^2 x_j^{-2}}{\omega_j - \omega_k}\right]. \tag{4}$$

Имееет место теорема.

Теорема 1. *Множество функций* (4) *на гладко вложенном* [2] *подмногообразии* $M_\Phi \hookrightarrow \mathrm{R}^{2N+2}$ *является полной инволютивной системой законов сохранения для динамической системы* (1).

Замечание 1. В работах [2, 5] рассматривалась гамильтонова система типа Неймана — Росохатиуса на $T^*\mathbf{S}^N = M_\varphi \hookrightarrow \mathbb{R}^{2N+2}$, отличная от системы (1) и имеющая вид

$$dy_j/dt + \omega_j^2 x_j = -2\alpha_0 x_j \omega_j^{-1}\Big(\sum_{j=1}^{N+1} x_j^2 \omega_j^{-1}\Big)^{-2}, \quad dx_j/dt = y_j, \tag{5}$$

где $\alpha_0 \in \mathbb{R}^1$ — произвольное число, $\omega_j \in \mathbb{R}^1_+$, $j = \overline{1, N+1}$. Несмотря на формальную («внешнюю») близость систем (1) и (5) они являются математически существенно различными динамическими системами.

Замечание 2. Из выражения (4) легко получить, что гамильтониан (3) на M_Φ имеет представление вида

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N+1} \omega_j F_j + \frac{1}{8} \alpha_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_j^2, \tag{6}$$

причем $\sum_{j=1}^{N+1} F_j = 1$, т. е. на M_φ законы сохранения (4) функционально зависимы. Число функционально независимых законов сохранения равно N, как и требуется по теореме Лиувилля [2, 3, 7] в случае полной интегрируемости.

Для доказательства теоремы 1, следуя работам [2, 3, 5], рассмотрим следующую производящую функцию $\tilde{Q}(\lambda)$, $\lambda \in C^1$:

$$\tilde{Q}(\lambda) = 1 + \sum_{j=1}^{N+1} \frac{F_j}{\lambda - \omega_j} = -4 \frac{\tilde{Q}_-(\lambda)}{Q_+(\lambda)}, \tag{7}$$

где $Q_+(\lambda) = \prod_{j=1}^{N+1} (\lambda - \omega_j)$, $\tilde{Q}_-(\lambda) = -\frac{1}{2}\lambda^{N+1} + \alpha_0\lambda^N + \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{q}_j \lambda^j$, $\{\tilde{q}_j = \tilde{q}_j\{F\},\ j = \overline{0, N-1}\}$ — набор функционально независимых функций на $M_\varphi \subset_\to \mathbb{R}^{2N+2}$.

Введем эллипсоидальные координаты [3] $\{\mu_j \in \mathbb{R}^1,\ j = \overline{1, N}\}$ на сфере $\mathbf{S}^N$ с помощью равенства

$$\sum_{j=1}^{N+1} \frac{x_j^2}{\lambda - \omega_j} = \frac{P(\lambda; x)}{Q_+(\lambda)}, \tag{8}$$

где $\forall \lambda \in \mathbb{C}^1$ $P(\lambda; x) = \prod_{j=1}^{N} (\lambda - \mu_j)$.

Из (8) немедленно следует, что $\sum_{j=1}^{N+1} x_j^2 = 1$ — уравнение N-мерной сферы $\mathbf{S}^N$. Если дополнительно ввести сопряженные координаты $\left\{\eta_j = \frac{1}{2} \times \sum_{k=1}^{N+1} \frac{x_k y_k}{\mu_j - \omega_k},\ j = \overline{1, N}\right\}$, то можно убедиться, что на подмногообразии $M_\varphi = T^*(\mathbf{S}^N)$ набор переменных $\{(\mu_j, \eta_j) \in \mathbb{R}^2\ j = \overline{1, N}\}$ является каноническим, т. е. симплектическая 2-форма $\Omega|_{M_\Phi} = \sum_{j=1}^{N} d\eta_j \wedge d\mu_j \in \Lambda^2(M_\varphi)$. Из (8) также находим, что для всех $j = \overline{1, N}$ справедливы равенства

$$\eta_j = -\frac{1}{4} P'(\mu_j; x) \quad \frac{d\mu_j}{dt} Q_+^{-1}(\mu_j).$$

Рассмотрим теперь функцию Гамильтона (3) в эллипсоидальных переменных:

$$H_0 = -2 \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_+(\mu_j)}{P'(\mu_j; x)} \eta_j^2 + 2 \sum_{j=1}^{N} Q_-(\mu_j)/P'(\mu_j; x) - 2 \sum_{j=1}^{N} Q_0(\mu_j)/ /[Q_+(\mu_j) P'(\mu_j; x)]. \tag{9}$$

Здесь $Q_-(\lambda) = -\frac{1}{2}\lambda^{N+1} + \alpha_0\lambda^N + \sum_{j=0}^{N-1} q_j\lambda^j$, $Q_0(\lambda) = \sum_{j=0}^{2N} a_j\lambda^j$ — полином степени $2N$, однозначно определяемый из следующего тождества для всех $\lambda \in \mathbb{C}^1$:

$$\sum_{j=1}^{N+1} \frac{\alpha_j^2}{(\lambda - \omega_j)^2} = 4\,\frac{Q_0(\lambda)}{Q_+^2(\lambda)}, \tag{10}$$

причем $a_{2N} = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N+1}\alpha_j^2$, $q_{N-1} = -2H_0 - \sum_{j=1}^{N+1}(\alpha_j^2 + \omega_j^2)$.

Отметим теперь, что выражение (9) имеет свойство разделения переменных Гамильтона—Якоби [2, 7], т. е. на орбитах гамильтоновой системы (2) для всех $j = \overline{1, N}$

$$\eta_j = \sqrt{Q_-(\mu_j)\,Q_+(\mu_j) - Q_0(\mu_j)}/Q_+(\mu_j). \tag{11}$$

Пусть $G(\mu, q)$ — производящая функция канонического преобразования $\Omega|_{M_\Phi} = \sum_{j=1}^{N} d\eta_j \wedge d\mu_j \to \sum_{j=0}^{N-1} dq_j \wedge d\xi_j$, где $\xi_j \in \mathbb{R}^1$, $j = \overline{0, N-1}$, — глобальные «угловые» переменные на подмногообразии $M_\Phi \subset_\to \mathbb{R}^{2N+2}$:

$$G(\mu, q) = \sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\mu_j(t_0)}^{\mu_j(t)} d\lambda\,\sqrt{Q(\lambda)}/Q_+(\lambda) \equiv \sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\mu_j(t_0)}^{\mu_j(t)} d\mu_j\eta_j. \tag{12}$$

Здесь $Q(\lambda) = Q_-(\lambda)\,Q_+(\lambda) - Q_0(\lambda)$, $\mu_j(t_0) \in \mathbb{R}^1$, $j = \overline{1, N}$, — начальные точки на M_φ при $t = t_0 \in \mathbb{R}^1$. Для переменных $\xi_j \in \mathbb{R}^1$. $j = \overline{0, N-1}$, согласно (12) получаем

$$\xi_j = \frac{\partial G(\mu, q)}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}\int\limits_{\mu_j(t_0)}^{\mu_j(t)} d\lambda\lambda^j/\sqrt{Q(\lambda)}, \tag{13}$$

т. е. явное выражение в квадратурах с помощью абелевых интегралов.

В силу уравнений Гамильтона (2) отсюда непосредственно имеем $\xi_j(t) = \xi_j(t_0) + (t_0 - t)\,\delta_{j,N-1}$ $\forall j = \overline{0, N-1}$, т. е. в переменных $\{(q_j, \xi_j) \in \mathbb{R}^2,\ j = \overline{0, N-1}\}$ динамическая система (1) согласно теореме Лиувилля проинтегрирована явно в гиперэллиптических квадратурах (13). Кроме того, из (13) следует, что подмногообразие $M_\varphi \subset_\to \mathbb{R}^{2N+2}$ гладко диффеоморфно действительной части многообразия Якоби $\mathfrak{J}(\Gamma)$ для гиперэллиптической римановой поверхности Γ функций $z = \sqrt{Q(\lambda)}$, $(\lambda, z) \in \Gamma$. Тем самым отсюда следует явная разрешимость исходной динамической системы (1) с помощью многомерных тэта-функций Римана на гиперэллиптической кривой Γ алгебраического рода N.

Покажем теперь, что введенные ранее функции $F_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2N+2})$, $j = \overline{1, N+1}$, являются законами сохранения для динамической системы (1), находящимися в инволюции. Очевидно, для этой цели достаточно показать, что введенные выше полиномы $Q_-(\lambda)$ и $\tilde{Q}_-(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}^1$, совпадают. Для этого представим при каждом $j = \overline{1, N}$ выражение (11) в виде

$$\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{N+1}\frac{x_k y_k}{\omega_j - \omega_k}\right)^2 = \eta_j^2 = \frac{Q_-(\mu_j)\,Q_+(\mu_j) - Q_0(\mu_j)}{Q_+^2(\mu_j)}, \tag{14}$$

а также в виде

$$\eta_j^2 = -\frac{1}{4}\tilde{Q}(\mu_j) + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N+1}\frac{\alpha_j^2}{(\mu_j - \omega_k)^2}. \tag{15}$$

Для доказательства формулы (15), следуя работе [8], достаточно проверить, что правая часть в (15) совпадает при всех $j = \overline{1, N}$ с левой частью в формуле (14). Используя для этой цели явные соотношения для функций (4) и выражения (8) при $\lambda = \mu_j$, $j = \overline{1, N}$, легко устанавливаем справедливость формулы (15). В качестве следствия получаем, что $\tilde{Q}_-(\lambda) \equiv Q_-(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}^1$, т. е. величины $\tilde{q}_j\{F\} = q_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2N+2})$, $j = \overline{0, N-1}$, образуют полную систему инволютивных законов сохранения для динамической системы типа Немана — Рософхатиуса (1). В силу линейной зависимости функций $\tilde{q}_j\{F\}$, $j = \overline{0, N-1}$, от исходных функций $F_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2N+2})$, $j = \overline{1, N+1}$, теорема 1 таким образом доказана.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Динамическая осцилляторная система типа Неймана—Рософхатиуса* (1) *является на кокасательном расслоении* $M_\varphi = T^*(\mathbf{S}^N)$ *над сферой* $\mathbf{S}^N$ *вполне интегрируемым по Лиувиллю гамильтоновым потоком, полная система инволютивных законов сохранения* $\{F_j \in \mathcal{D}(M_\varphi), j = \overline{1, N+1}\}$ *задается выражением* (4). *При этом орбиты динамической системы* (1) *изоморфны действительной части комплексного абелевого тора* $\mathfrak{p}(\Gamma)$ *гиперэллиптической римановой поверхности* Γ *рода* $N = \dim \mathbf{S}^N$.

Замечание 3. Рассмотрим следующее двухпараметрическое семейство функций вида (4), где для $j = 1, N+1$

$$F_j^{(\varepsilon,\nu)} = \varepsilon x_j^2\left[\omega_j - \frac{1}{2}(p(x) - \alpha_0)\right] + \sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{N+1} \frac{(y_j x_k - y_k x_j)^2}{\omega_j - \omega_k} +$$

$$+ \nu \sum_{\substack{k,j=1\\ k\neq j}}^{N+1} \frac{x_j^2 x_k^{-2}\alpha_k^2 + x_k^2 x_j^{-2}\alpha_j^2}{\omega_j - \omega_k}, \quad \nu, \varepsilon \in \mathbb{R}^1. \tag{16}$$

Можно показать, что множество функций (16) является полной инволютивной системой законов сохранения при всех ν, $\varepsilon \in \mathbb{R}^1$ динамической системы Гамильтона (2) с

$$H_0^{(\varepsilon,\nu)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N+1} y_j^2 + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^{N+1} \omega_j^2 x_j^2 - \frac{\varepsilon}{8} p^2(x) + \frac{\nu}{2}\sum_{j=1}^{N+1} \alpha_j^2 x_j^{-2}. \tag{17}$$

При $\nu = 0$, $\varepsilon \neq 0$ получаем динамическую систему осцилляторного типа Неймана—Боголюбова (мл.) [2, 5], а при $\nu \neq 0$, $\varepsilon = 0$ — классическую динамическую систему Рософхатиуса [9], являющуюся, как известно, вполне интегрируемой по Лиувиллю.

Замечание 4. Рассмотрим трехпараметрическое семейство функций $\{F_j^{(\varepsilon,\nu,\varkappa)} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2N+2}),\ j = \overline{1, N+1}\}$ вида

$$F_j^{(\varepsilon,\nu,\varkappa)} = \varkappa x_j^2 - \varepsilon x_j^2 \omega_j^{-1}\left(\sum_{j=1}^{N+1} x_j^2 \omega_j^{-1}\right)^{-1} +$$

$$+ \sum_{\substack{k,j=1\\ k\neq j}}^{N+1} \frac{(y_j x_k - y_k x_j)^2}{\omega_j - \omega_k} + \nu \sum_{\substack{k,j=1\\ k\neq 1}}^{N+1} \frac{x_j^2 x_k^{-2}\alpha_k^2 + x_k^2 x_j^{-2}\alpha_j^2}{\omega_j - \omega_k}, \tag{18}$$

где ε, ν, $\varkappa \in \mathbb{R}^1$.

Можно показать, что для всех ε, ν, $\varkappa \in \mathbb{R}^1$ функции (18) ($j = \overline{1, N+1}$) образуют полную систему инволютивных законов сохранения для динамической системы (2) на $T^*(\mathbf{S}^N)$ с функцией Гамильтона

$$H_0^{(\varepsilon,\nu,\varkappa)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N+1} y_j^2 + \frac{\varkappa}{2}\sum_{j=1}^{N+1} \omega_j x_j^2 + \frac{\nu}{2}\sum_{j=1}^{N+1} \alpha_j^2 x_j^{-2} - \frac{\varepsilon}{2}\left(\sum_{j=1}^{N+1} x_j^2 \omega_j^{-1}\right)^{-1}, \tag{19}$$

где, по определению, $\omega_j \neq \omega_k \neq 0$ при $j \neq k = \overline{1, N+1}$. В силу результатов работ [2, 5, 10] динамическую систему (2) с функцией Гамильтона (19) при $\varepsilon, \nu, \varkappa \neq 0$ будем называть модифицированной осцилляторной динамической системой Неймана — Росохатиуса.

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 3. *Динамическая система осцилляторного типа Неймана—Росохатиуса* (1) *обладает стандартным представлением типа Лакса на* M_φ $dL/dt = [L, A]$, *где матрица* $L = L(x, y)$ *зависит от спектральных параметров* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^1$, $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ *и имеет вид*

$$L(x, y; \lambda, \mu) = \| L_{ij} \|, \quad i, j = \overline{1, N+1},$$

$$L_{ij} = \omega_i \delta_{ij} + \left[4\lambda^2 \sum_{k=1}^{N+1} \omega_k x_k^2 - 4\lambda^2\mu^2\alpha_0 \mp (\pm)\, 8i\lambda^3\mu \sum_{k=1}^{N+1} \alpha_k \right] x_i x_j \pm$$

$$\pm\, 2\lambda\mu (x_i y_j - x_j y_j) - 2\lambda^2 (\omega_i + \omega_j) x_i x_j \pm (\mp)\, 2i\lambda\mu (\alpha_i x_j / x_i + \alpha_j x_i / x_j),$$

где знаки $\mp (\pm)$ *характеризуют два неэквивалентных представления Лакса при* $\lambda \to -\lambda$, $\mu \to +\mu$ ($\lambda \to +\lambda$, $\mu \to -\mu$).

Для доказательства теоремы воспользуемся методом работ [3, 9] и рассмотрим возмущение L ранга 2 оператора $W = \operatorname{diag}(\omega_1, \ldots, \omega_{N+1})$:$L = W + u \otimes \xi + v \otimes \eta$, где $u, \xi, v, \eta \in \mathbb{R}^{N+1}$, $u \otimes \xi = \| u_i \xi_j \|$, матрица $v \otimes \eta$ определена аналогично.

Тогда [3, 6, 8] $\det(z - L)/\det(z - W) = 1 - \sum_{j=1}^{N+1} G_j/(z - \omega_j)$, где $G_j = u_j \xi_j + v_j \eta_j + \sum_{\substack{k, j=1 \\ k \neq j}}^{N} (v_j u_k - v_k u_j)(\xi_j \eta_k - \xi_k \eta_j)/(\omega_j - \omega_k)$, т. е. имеем явную формулу для спектра. Задача состоит в том, чтобы подобрать вектор-функции u, ξ, v, η (зависящие от $(x, y) \in M_\varphi$) так, чтобы $G_j = \psi F_j$ на M_φ, $\psi \in \mathbb{C}^1$, $j = \overline{1, N+1}$.

Если $\xi = v = x$, $u = ax + by + cWx + d\tilde{x}$, где $\eta = \beta y + \gamma W x + \delta \tilde{x}$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{N+1}$, $\tilde{x} = (\alpha_1/x_1, \ldots, \alpha_{N+1}/x_{N+1})$, $a, b, c, d, \beta, \gamma, \delta$ — коэффициенты, то функции $G_j|_{M_\varphi}$, $F_j|_{M_\varphi}$ пропорциональны при вычислении следующих условий: $b + \beta = 0$, $\delta = d$, $c = \gamma$, $b^2 = -(2 + c)c$, $d^2 = (2 + c)c$, $a = \left[\alpha_0 (2 + c) c + 2cd \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_j \right] - 2c \sum_{j=1}^{N+1} \omega_j x_j^2$. Отметим, что при этих вычислениях существенно использованы уравнения связи $\sum_{j=1}^{N+1} x_j y_j = 0$, $\sum_{j=1}^{N+1} x_j^2 = 1$.

Положив $\lambda = \sqrt{-c/2}$, $\mu = \sqrt{(c+2)/2}$, получим искомое выражение для оператора L. Спектр матрицы $L = L(x, y; \lambda, \mu)$ под действием гамильтонова потока на M_φ с гамильтонианом $H_0(x, y)$ сохраняется для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^1$, $\lambda^2 + \mu^2 = 1$. Поэтому существует матрица A, зависящая от спектральных параметров λ, μ, для которой система (1) эквивалентна уравнению $\frac{\partial}{\partial t} L = [L, A]$ на M_φ. Теорема доказана. Эта теорема является обобщением результатов работы [5].

1. *Теория* солитонов: метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.— М. : Наука, 1980.— 324 с.
2. *Интегрируемые* динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты / Ю. А. Митропольский, Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко.— Киев : Наук. думка, 1987.— 296 с.
3. *Мозер Ю.* Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем // Успехи мат. наук.— 1981.— **36**, № 5.— С. 109—151.
4. *Богоявленский О. И.* Интегрируемые случаи динамики твердого тела и интегрируемые системы на сферах // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1985.— **49**, № 5.— С. 899—915.

5. *Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* О динамических системах типа Неймана и их полной интегрируемости // Докл. АН СССР.— 1985.— **258**, № 4.— С. 853—858.
6. *Микитюк И. В., Прикарпатский А. К.* Представление Лакса для динамических систем осцилляторного типа на сферах // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1987.— № 4.— С. 13—16.
7. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики.— М. : Наука, 1984.— 431 с.
8. *Gagnon L., Harnad J., Winternitz P.* Abelian integrals and the reduction method for an integrable Hamiltonian system // J. Math. Phys.— 1985.— **26**, N 7.— P. 1605—1612.
9. *Moser J.* The geometry of quadrics and spectral theory.— Proc. Chern Symposium.— Berkely, 1981.
10. *Прикарпатский А. К., Самойленко В. Гр.* Динамические системы типа Каупа и типа Неймана: полная интегрируемость и точные решения.— Киев, 1986.— 16 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.56).

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 03.12.87