УДК 519.2

Г. М. Фельдман

К характеризации гауссовского распределения на группах равнораспределенностью одночлена и линейной статистики

Как доказал Ю. В. Линник, на вещественной прямой справедлива следующая характеристизция гауссовского распределения, обобщающая известную характеризацию Пойа.

Теорема А [1, с. 619]. *Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_s$, $s \geqslant 2$ — *независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением* μ. *Если* *линейные формы* ξ_1 *и* $a_1\xi_1 + \ldots + a_s\xi_s$ $(a_1^2 + \ldots + a_s^2 = 1)$ *одинаково распределены, то* μ — *гауссовское распределение.*

В настоящей работе полностью описаны те локально компактные абелевы группы, на которые может быть перенесена эта характеризация гауссовского распределения.

Пусть X — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа, $Y = X^*$ — ее группа характеров, (x, y) — значение характера $y \in Y$ на элементе $x \in X$. Если G — подгруппа в X, то через $A(Y, G)$ обозначим ее аннулятор $A(Y, G) = \{y \in Y : (x, y) = 1$ для всех $x \in G\}$.

Свертка двух распределений μ и ν, характеристическая функция распределения $\bar{\mu}$ и распределение μ определяются обычным образом:

$$(\mu * \nu)(E) = \int\limits_X \mu(E - x)\, d\nu(x),\ \ \hat{\mu}(y) = \int\limits_X (x, y)\, d\mu(x),\ \ \bar{\mu}(E) = \mu(-E).$$

Обозначим через $D(X)$ множество вырожденных распределений E_x, $x \in X$, на группе X, через $I(X)$ — множество всех сдвигов распределений Хаара m_K компактных подгрупп K группы X. Носитель распределения μ обозначим через $\sigma(\mu)$. Обозначим через R, Z, T и $Z(p)$ соответственно группы вещественных чисел, целых чисел, группу вращений окружности и группу корней степени p из единицы.

Определение [2]. *Распределение* μ *на группе* X *называется гауссовским, если его характеристическая функция представима в виде*

$$\hat{\mu}(y) = (x, y) \exp\{-\varphi(y)\}, \tag{1}$$

где $x \in X$, *а* $\varphi(y)$ — *непрерывная неотрицательная функция на* Y, *удовлетворяющая уравнению* $\varphi(y_1 + y_2) + \varphi(y_1 - y_2) = 2[\varphi(y_1) + \varphi(y_2)]$.

Гауссовское распределение μ называется симметричным, если в (1) $x = 0$. Множество гауссовских и симметричных гауссовских распределений на группе X обозначим через $\Gamma(X)$ и $\Gamma^s(X)$. Как доказано в [2], если $\mu \in \Gamma^s(X)$, то $\sigma(\mu)$ совпадает с некоторой связной подгруппой группы X.

Пусть $n \in Z$. Рассмотрим гомоморфизм $f_n : X \to X$, определенной формулой $f_n(x) = nx$. Образ группы X при этом отображении обозначим через $X^{(n)}$.

Пусть $A = \{a_j\}_{j=0}^s$ — произвольное множество целых чисел. Обозначим через $\Gamma_A(X)$ класс распределений μ на группе X, обладающих следующим свойством: если ξ_j — независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ, то линейные формы $a_0\xi_1$ и $a_1\xi_1 + \ldots + a_s\xi_s$ одинаково распределены. Легко видеть, что распределение $\mu \in \Gamma_A(X)$ тогда и только тогда, когда характеристическая функция $\hat{\mu}(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{\mu}(a_0 y) = \prod_{j=1}^{s} \hat{\mu}(a_j y), \quad y \in Y. \tag{2}$$

Предложение 1. *Пусть* K — *компактная подгруппа группы* X, $A = \{a_j\}_{j=0}^s$, $s \geqslant 2$, — *множество целых чисел и числа* $\{a_1, \ldots, a_s\}$ *взаимно просты. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $m_K \in \Gamma_A(X)$;

2) *если* $a_0 y \in A(Y, K)$, *то* $y \in A(Y, K)$.

Доказательство. Заметим, что из взаимной простоты чисел a_j вытекает существование таких $b_j \in Z$, что $\sum_{j=1}^{s} b_j a_j = 1$. Отсюда

$$y = \sum_{j=1}^{s} b_j a_j y. \tag{3}$$

Заметим также, что характеристическая функция произвольного распределения m_K удовлетворяет условию $\hat{m}_K(y) = 1$ при $y \in A(Y, K)$, $\hat{m}_K(y) = 0$ при $y \bar{\in} A(Y, K)$.

1) $\Rightarrow$ 2). По условию характеристическая функция $\hat{m}_K(y)$ удовлетворяет уравнению (2) Пусть $a_0 y \in A(Y, K)$. Тогда $\hat{m}_K(a_0 y) = 1$, и из (2) следует $\hat{m}_K(a_j y) = 1$. Поэтому $a_j y \in A(Y, K)$, $j = 1, \ldots, s$. Учитывая (3), отсюда получаем $y \in A(Y, K)$.

2) $\Rightarrow$ 1). Проверим, что характеристическая функция $\hat{m}_K(y)$ удовлетворяет уравнению (2). Если $y \in A(Y, K)$, то $a_j y \in A(Y, K)$ и $\hat{m}_K(a_j y) = 1$, $j = 0, \ldots, s$. Следовательно, обе части равенства (2) обращаются в единицу. Если $y \bar{\in} A(Y, K)$, то в силу утверждения 2 $a_0 y \bar{\in} A(Y, K)$, и поэтоту $m_K \times (a_0 y) = 0$. Если бы при всех $j = 1, \ldots, s$ было выполнено $a_j y \in A(Y, K)$, то из (3) следовало бы, что $y \in A(Y, K)$. Полученное противоречие показывает, что по крайней мере для одного $j = j_0$ $a_{j_0} y \bar{\in} A(Y, K)$. Тогда $\hat{m}_K(a_{j_0} y) = 0$ иправая часть равенства (2) также обращается в нуль, Итак, характеристическая функция $\hat{m}_K(y)$ удовлетворяет уравнению (2), т. е. $m_K \in \Gamma_A(X)$.

Замечание 1. Нетрудно проверить, что условие 2 в предложении 1 равносильно равенству $K^{(a_0)} = K$.

Множество целых чисел $A = \{a_j\}_{j=1}^s$ назовем допустимым для группы X, если при всех j выполнено $X^{(a_j)} \neq \{0\}$. Если $\xi_1, \ldots, \xi_s$ — случайные величины со значениями в X, то условие допустимости множества A при рассмотрении линейной формы $a_1\xi_1 + \ldots + a_s\xi_s$ является групповым аналогом условия $a_j \neq 0$ при всех j в случае, когда $X = R$.

Обозначим через $\mathfrak{M}(X)$ совокупность допустимых для группы X множеств $A = \{a_j\}_{j=0}^s$, $s \geqslant 2$, взаимно простых целых чисел, удовлетворяющих условию

$$a_0^2 = a_1^2 = \ldots + a_s^2, \tag{4}$$

Пусть $A \in \mathfrak{M}(X)$. Из (4) и (2) следует, что $\Gamma^s(X) \subset \Gamma_A(X)$. Положим $I_A(X) = I(X) \cap \Gamma_A(X)$. Поскольку $\Gamma_A(X)$ — полугруппа, то

$$I_A(X) * \Gamma^s(X) \subset \Gamma_A(X). \tag{5}$$

Основня цель настоящей работы состоит в полном описании групп X, для которых

$$I_A(X) * \Gamma^s(X) = \Gamma_A(X) \tag{6}$$

при любом $A \in \mathfrak{M}(X)$. Отметим, что выполнение равенства (6) для группы X означает, что любое распределение $\mu \in \Gamma_A(X)$ инвариантно относительно некоторой компактной подгруппы K, для которой $K^{(a_0)} = K$, и при естественном гомоморфизме $X \to X/K$ μ индуцирует на фактор-группе X/K гауссовское распределение.

Теорема 1. *Для того чтобы на группе X имело место равенство* (6) *при любом $A \in \mathfrak{M}(X)$, необходимо и достаточно, чтобы группа X удовлетворяла одному из условий*:

I) *группа X топологически изоморфна группе $R^n + D$, где $n \geqslant 0$, а D — дискретная группа, не содержащая элементов конечного порядка*;

II) *группа X состоит из элементов конечного порядка p, где p — простое число* *.

Замечание 2. Отметим, что для групп X, удовлетворяющих условию I, выполнено $I(X) = D(X)$, и тогда, как легко видеть, $I_A(X) =$

Каждая такая гуппа X топологически изоморфна группе $Z(p)^{\mathfrak{N}} + Z(p)^{\mathfrak{M}^*}$, где $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ — кардинальные числа, группа $Z(p)^{\mathfrak{N}}$ рассматривается в обычной топологии, а группа $Z(p)^{\mathfrak{M}^*}$ — в дискретной [3, с. 528].

$= D(X)$, если $a_0 = a_1 + \ldots + a_s$, и $I_A(X) = \{E_0\}$, если $a_0 \neq a_1 + \ldots + a_s$. Поэтому для таких групп равенство (6) равносильно тому, что для любого $A \in \mathfrak{M}(X)$ либо $\Gamma^s(X) = \Gamma_A(X)$, либо $\Gamma(X) = \Gamma_A(X)$. Если же группа X удовлетворяет условию II, то X — вполне несвязная группа, и тогда, как отмечено выше, $\Gamma^s(X) = \{E_0\}$. Для таких групп равенство (6) равносильно тому, что для любого $A \in \mathfrak{M}(X)$ $I_A(X) = \Gamma_A(X)$.

Доказательству теоремы 1 предпошлем ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть X — дискретная группа, не содержащая элементов конечного порядка, $A = \{a_j\}_{j=0}^s$, $s \geqslant 2$,— произвольное множество целых чисел, удовлетворяющих условию* (4). *Тогда $\Gamma_A(X) \subset D(X)$.*

Доказательство. Пусть $\mu \in \Gamma_A(X)$. Из условия леммы вытекает, что Y — связная компактная группа. Имеются две возможности. 1. $Y \not\approx T$. В таком случае существует непрерывный мономорфизм $\psi : R \to Y$, образ которого $\psi(R)$ плотен в Y [3, с. 518]. Рассмотрим сужение характеристической функции $\hat{\mu}(y)$ на $\psi(R)$. Ясно, что $\hat{\mu}(\psi(t))$, $t \in R$,— это характеристическая функция на R, удовлетворяющая уравнению (2). По теореме А $\hat{\mu}(\psi(t)) = \exp\{-at^2 + ibt\}$, $a \geqslant 0$, $-\infty < b < \infty$.

Пусть V — произвольная окрестность нуля в Y. Так как ψ — мономорфизм и $\overline{\psi(R)} = Y$, то можно выбрать такую последовательность t_j, чтобы $t_j \to \infty$ и $\psi(t_j) \in V$ при всех j. Если $a > 0$, то $|\hat{\mu}(\psi(t_j))| = \exp\{-at_j^2\} \to 0$ при $t_j \to \infty$, что противоречит непрерывности функции $\hat{\mu}(y)$, ибо $\hat{\mu}(0) = 1$. Значит $a = 0$. Поэтому $|\hat{\mu}(\psi(t))| \equiv 1$, $t \in R$, а в силу плотности $\psi(R)$ в Y и $|\hat{\mu}(y)| \equiv 1$, $y \in Y$. Значит, $\hat{\mu}(y) = (x, y)$, $x \in X$, или $\mu \in D(X)$. В этом случае лемма доказана.

2. $Y \approx T$. Тогда $X \approx Z$. Не ограничивая общности будем считать, что $X = Z$, а μ можно тогда рассматривать, как распределение на R с 2π-периодической характеристической функцией $\hat{\mu}(y)$, удовлетворяющей уравнению (2). Из теоремы А вытекает $\hat{\mu}(y) = \exp\{-ay^2 + iby\}$, $a \geqslant 0$, $-\infty < b < \infty$, $y \in R$. Поскольку функция $\hat{\mu}(y)$ 2π-периодическая, то $a = 0$, $b \in Z$, т. е. $\mu \in D(Z)$. Лемма полностью доказана.

Лемма 2. *Пусть G — замкнутая подгруппа группы X, μ — распределение на G. Тогда, если $\mu \,\bar{\in}\, I(G) * \Gamma(G)$, то $\mu \,\bar{\in}\, I(X) * \Gamma(X)$.*

Доказательство этой леммы мы опускаем ввиду его простоты.

Лемма 3. *Пусть группа X такова, что $X^{(p)} \neq \{0\}$, и X содержит подгруппу G, $G \approx Z(p)$, где p — простое число. Тогда для некоторого $A \in \mathfrak{M}(X)$ включение* (5) *строгое.*

Доказательство. Так как группа G дискретна, то $\Gamma(G) = D(G)$. Поэтому класс $I(G) * \Gamma(G)$ состоит лишь из вырожденных распределений и распределения m_G. Пусть μ_0 — невырожденное симметричное распределение на G, $\mu \neq m_G$. Тогда $\mu \,\bar{\in}\, I(G) * \Gamma(G)$, и по лемме 2 $\mu \in I(X) * \Gamma(X)$.

Возможны 2 случая. 1. $p > 2$. Положим $a_0 = p^2 + 1/2$, $a_1 = p$, $a_2 = p^2 - 1/2$. Так как $p^2 + 1/2 = p(p + 1/2) - p - 1/2$, $p^2 - 1/2 = p(p-1)/2 + p - 1/2$, то, как легко видеть, характеристическая функция $\hat{\mu}_0(y)$ удовлетворяет уравнению (2) и поэтому $\mu_0 \in \Gamma_A(X)$, где $A = \{a_0, a_1, a_2\}$. Очевидно, что $A \in \mathfrak{M}(X)$.

2. $p = 2$. Положим $a_0 = 3$, $a_1 = a_2 = 2$, $a_3 = 1$. Тогда характеристическая функция $\hat{\mu}_0(y)$ удовлетворяет уравнению (2) и, следовательно, $\mu_0 \in \Gamma_A(X)$, где $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Очевидно, что $A \in \mathfrak{M}(X)$. Лемма доказана.

Как известно [3, с. 483], если K — замкнутая подгруппа в группе X, то имеет место топологический изоморфизм $(X/K)^* \approx A(Y, K)$. Поэтому характеристическую функцию произвольного распределения на фактор-группе X/K можно считать заданной на подгруппе $A(Y, K) \subset Y$.

Лемма 4. *Пусть $\{A = \{a_j\}_{j=0}^s$, $s \geqslant 2$, — множество целых чисел и числа $\{a_1, \ldots, a_s\}$ взаимно просты, K — компактная подгруппа группы X*

такая, что $K^{(a_0)} = K$, $\nu \in \Gamma_A(X/K)$. *Тогда функция*

$$f(y) = \begin{cases} \hat{\nu}(y), & \text{если } y \in A(Y, K), \\ 0, & \text{если } y \bar{\in} A(Y, K) \end{cases}$$

является характеристической функцией некоторого распределения $\mu \in \Gamma_A(X)$.

Доказательство. Так как группа K компактна, то подгруппа $A(Y, K)$ открыта в Y. Поэтому функция $f(y)$ непрерывна. Поскольку функция $\hat{\nu}(y)$ положительно определена, то положительно определенной будет и функция $f(y)$ [4, с. 330]. По теореме Бохнера—Хинчина существует такое распределение μ на группе X, что $\hat{\mu}(y) = f(y)$. Проверим, что $\mu \in \Gamma_A(X)$. Если $y \in A(Y, K)$, то функция $\hat{\mu}(y)$ удовлетворяет уравнению (2), ибо ему удовлетворяет функция $\hat{\nu}(y)$. Если $y \bar{\in} A(Y, K)$, то по предложению 1 $a_0 y \bar{\in} A(Y, K)$. Значит $f(a_0 y) = 0$. Проверка того, что хотя бы при одном $j = j_0$ $a_{j_0} y \bar{\in} A(Y, K)$ и поэтому $f(a_0 y) = 0$, совпадает с доказательством импликации 2) $\Rightarrow$ 1) предложения 1. Таким образом, функция $f(y)$ удовлетворяет уравнению (2), а значит $\mu \in \Gamma_A(X)$. Лемма доказана.

Пусть p — простое число. Обозначим через $Z(p^\infty)$ — рассматриваемую в дискретной топологии мультипликативную группу корней из единицы, степени которых являются степенями числа p. Группу характеров группы $Z(p^\infty)$ обозначим через Δ_p (о группе Δ_p см. [3], § 25).

Лемма 5. *Пусть* $X = \Delta_p$. *Тогда для некоторого множества* $A \in \mathfrak{M}(X)$ *включение* (5) *строгое.*

Доказательство. Так как группа Δ_p вполне несвязна, то $\Gamma(X) = D(X)$. Вложим группу $Z(p)$ в $Z(p^\infty) \approx \Delta_p^*$ и положим $K = A(X, Z(p))$. Очевидно, что группа K компактна. Имеют место топологические изоморфизмы $X/K \approx Z(p)$ и $(X/K)^* \approx Z(p)$. Если $p > 2$, то положим $a_0 = p^2 + 1/2$, $a_1 = p$, $a_2 = p^2 - 1/2$. Если же $p = 2$, то пусть $a_0 = 5$, $a_1 = 3$, $a_2 = 4$. Рассмотрим на группе $Z(p^\infty)$ функцию

$$f(y) = \begin{cases} \hat{\nu}(y), & \text{если } y \in Z(p), \\ 0, & \text{если } y \bar{\in} Z(p), \end{cases}$$

где ν — произвольное невырожденное симметричное распределение на группе $Z(p)$, $\nu \neq m_{Z(p)}$. Тогда, как легко видеть, характеристическая функция $\hat{\nu}(y)$ удовлетворяет уравнению $\hat{\nu}(a_0 y) = \hat{\nu}(a_1 y)\,\hat{\nu}(a_2 y)$, и, следовательно, $\nu \in \Gamma_A(X/K)$, $A = \{a_0, a_1, a_2\}$. Применив лемму 4, получим $f(y) = \hat{\mu}(y)$, где $\mu \in \Gamma_A(X)$. Поскольку группа X не содержит элементов конечного порядка, то $A \in \mathfrak{M}(X)$. По построению $\mu \bar{\in} I(X) * \Gamma(X)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Предположим вначале, что группа X содержит элемент x_0 конечного порядка p, где p — простое число. Пусть $M(x_0)$ — подгруппа в X, порожденная элементом x_0. Тогда $M(x_0) \approx Z(p)$, и из справедливости равенства (6) для любого $A \in \mathfrak{M}(X)$ по лемме 3 следует, что $X^{(p)} = \{0\}$, т. е. группа X удовлетворяет условию II.

Предположим теперь, что X — группа, не содержащая элементов конечного порядка. По структурной теореме каждая локально компактная абелева группа X топологически изоморфна группе $R^n + G$, где $n \geqslant 0$, а группа G содержит компактную открытую подгруппу K [3, с. 493]. В рассматриваемом случае K — компактная группа, не содержащая элементов конечного порядка. По структурной теореме для таких групп K топологически изоморфна группе $(\Sigma_a)^{\mathfrak{N}} \oplus_{p \in P} \Delta_p^{\mathfrak{N}_p}$, где Σ_a — группа характеров, рассматриваемой в дискретной топологии группы рациональных чисел, P — множество простых чисел, а $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}_p$ — кардинальные числа. Отметим также, что при любом простом p группа Δ_p топологически изоморфна некоторой подгруппе в Σ_a [3, с. 514]. Если $K \neq \{0\}$, то группа K и, следовательно, группа X содержит подгруппу $G_1 \approx \Delta_p$ при некотором простом p. По лемме 5 существует такое множество $A \in \mathfrak{M}(G_1) = \mathfrak{M}(X)$, что включение

$$I(G_1) * \Gamma(G_1) \subset \Gamma_A(G_1) \tag{7}$$

строгое. Из (7) и леммы 2 вытекает тогда, что включение (5) также строгое, вопреки предположению. Полученное противоречие показывает, что $K = \{0\}$, т. е. группа X удовлетворяет условию I.

Достаточность. Пусть группа X удовлетворяет условию I. Будем считать, что $X = R^n + D$. Пусть $A \in \mathfrak{M}(X)$ и $\mu \in \Gamma_A(X)$. Так как $\Gamma_A(X)$ — полугруппа, то $\nu = \hat{\mu} * \bar{\mu} \in \Gamma_A(X)$. Заметим теперь, что $\hat{\nu}(y) \geqslant 0$ и рассмотрим сужение характеристической функции $\hat{\nu}(y)$ на подгруппу $H = D^* \subset Y$. Это сужение является характеристической функцией некоторого распределения $\delta \in \Gamma_A(D)$. По лемме 1 $\delta = E_0$, а значит $\hat{\nu}(y) \equiv 1$ на H. Поэтому $\sigma(\nu) \subset A(X, H) = R^n$. Из теоремы A в таком случае легко следует, что $\nu \in \Gamma(R^n)$, а тогда, применяя теорему Крамера о разложении гауссовского распределения в R^n [5, с. 251], получаем $\mu \in \Gamma(X)$. Ссылка на замечание 2 доказывает теорему в этом случае.

Предположим теперь, что группа X удовлетворяет условию II. Пусть $A = \{a_j\}_{j=0}^{s} \in \mathfrak{M}(X)$ и $\mu \in \Gamma_A(X)$. Так как $\Gamma_A(X)$ — полугруппа, то $\nu = \mu * \bar{\mu} \in \Gamma_A(X)$. Положим $E = \{y \in Y : \hat{\nu}(y) = 1\}$. Тогда $\sigma(\nu) \subset A(X, E) = X_1$, и группа X_1 также состоит из элементов порядка p. Распределение ν на группе X_1 обладает свойством

$$0 \leqslant \hat{\nu}(h) < 1, \quad h \in Y_1 = X_1^*, \quad h \neq 0. \tag{8}$$

Характеристическая функция $\hat{\nu}(h)$ удовлетворяет уравнению (2). Из него вытекает равенство

$$\hat{\nu}(a_0^n h) = \prod_{p_1 + \ldots + p_s = n} [\hat{\nu}(a_1^{p_1} \ldots a_s^{p_s} h)]^{C_{p_1, \ldots, p_s}}, \quad h \in Y_1 \tag{9}$$

где $C_{p_1, \ldots, p_s} = (p_1 + \ldots + p_s)!/p_1! \ldots p_s!$. Так как множество A допустимо, то все a_j не делятся на p. Поскольку все элементы группы Y_1 также имеют порядок p, то при любом j непрерывный гомоморфизм $f_{a_j} : Y_1 \to Y_1$ ($f_{a_j}(h) = a_j h$) является топологическим изоморфизмом. Поэтому, в частности, Y_1 — группа с однозначным делением на a_0. Учитывая это, из (9) получаем

$$\hat{\nu}(h) = \prod_{p_1 + \ldots + p_s = n} [\hat{\nu}(a_1^{p_1} \ldots a_s^{p_s} h / a_0^n)]^{C_{p_1, \ldots, p_s}}, \quad h \in Y_1 \tag{10}$$

Зафиксируем $h \in Y_1$, $h \neq 0$ и рассмотрим $M(h)$ — подгруппу в Y_1, порожденную h. Очевидно, что $M(h) \approx Z(p)$. Заметим теперь, что при любых целых неотрицательных $p_1, \ldots, p_s$ имеем $a_1^{p_1} \ldots a_s^{p_s} h / a_0^n \in M(h)$, $a_1^{p_1} \ldots a_s^{p_s} h / a_0^n \neq 0$. Поэтому из (8) и (10) вытекает, что $\hat{\nu}(h) = 0$ при $h \neq 0$. Значит, подгруппа X_1 компактна и $\nu = m_{X_1}$. Поскольку $\hat{\nu}(y) = |\hat{\mu}(y)|^2$, то, очевидно, $\mu \in I_A(X)$, т. е. справедливо равенство (6). Теорема доказана.

Отметим в заключение, что эта работа стимулирована поставленной в [1] гл. (2) задачей построения теории равнораспределенности линейных форм на алгебраических сруктурах.

1. *Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р.* Характеризационные задачи математической статистики.— М. : Наука, 1972.— 656 с.
2. *Партасарати К. Р., Ранга Рао Р., Варадхан С. Р. С.* Распределения вероятностей на локально компактных абелевых группах // Математика: Сб. пер.— 1965.— 9, вып. 2.— С. 115—146.
3. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ: В 2-х т.— М. : Мир, 1975.— Т. 1.— 654 с.

4. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ: В 2-х т.— М. : Мир, 179.5— Т. 2.— 900 с.
5. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов.— М. : Наука, 1972.— 480 с.

Физ.-техн. ин-т низких температур АН УССР,
Харьков

Получено 21.01.87