УДК 519.21

В. В. Рязанцева

О сходимости тригонометрических случайных рядов в нормах пространства Орлича

1. N-функция Орлича. Пусть $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, — N-функция Орлича [1, с. 11], т. е. $u(x)$ — непрерывная, четная, выпуклая функция такая, что $\lim\limits_{x\to\infty} u(x)x^{-1} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0} u(x)x^{-1} = 0$. Например, $u(x) = e^{x^2} - 1$, $u(x) = e^{|x|} - |x| - 1$, $u(x) = ax^p$, $p > 1$, $a > 0$.

Будем говорить, что N-функция удовлетворяет условию E [2, с. 52], если существуют такие постоянные $C > 0$, $K > 0$, $x_0 > 0$, что при $x \geqslant x_0$ и $y \geqslant x_0$ выполняется неравенство

$$u(x)u(y) \leqslant Cu(Kxy). \tag{1}$$

Будем рассматривать случай, когда $x_0 = 0$. Этот класс функций обозначим E_0. В него входят, например, функции $u(x) = c|x|^\alpha$, $\alpha > 1$, $c > 0$ $u(x) = \dfrac{x^\alpha}{\ln(x + b_\alpha)}$, $\alpha > 1$, b_α — некоторая константа.

Согласно [1], будем говорить, что N-функция $u(x)$ подчинена N-функции $v(x)$, ($u(x) \prec v(x)$), если найдется такая постоянная c., $c > 0$, что при достаточно большом x $u(x) < v(cx)$. N-функции $u(x)$ и $v(x)$ эквивалентны ($u(x) \sim v(x)$), если $u(x) \prec v(x)$ и $v(x) \propto u(x)$.

2. Пространства Орлича и пространства $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$. Пусть $u(x)$ — некоторая N-функция Орлича. Обозначим через L_u пространство Орлича, порожденное функцией $u(x)$, т. е. пространство измеримых по Лебегу на $[0, 1]$ функций $f(t)$ таких, что для некоторой постоянной r_f $\int\limits_0^1 u\left(\dfrac{f(t)}{r_f}\right)dt < \infty$. Как и в работе [1], легко показать, что L_u — банахово пространство относительно нормы $\|f\|_u = \inf\left\{r : \int u\left(\dfrac{f(t)}{r}\right)dt < 2\right\}$.

Пусть $\{\Omega, \mathfrak{B}, P\}$ — стандартное вероятностное пространство, $\xi(t, \omega) = \xi(t)$, $t \in [0, 1]\}$, $\omega \in \Omega$,— случайный процесс. Если для почти всех ω траектории процесса $\xi(t, \omega)$ принадлежат L_u, то будем говорить, что с вероятностью единица процесс принадлежит L_u.

Обозначим через $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ пространство случайных величин субгауссовского типа, т. е. совокупность центрированных случайных величин $\{\xi(\omega)\}$, для каждой из которых найдется постоянная τ такая, что для всех $\lambda \in \mathrm{R}^1$ справедливо неравенство

$$M \exp \lambda\xi \leqslant \exp \varphi(\lambda\tau), \tag{2}$$

где $\varphi(\lambda)$ — N-функция Орлича такая, что $\varphi(\lambda) = C_\varphi\lambda^2$ при $|\lambda| \leqslant \lambda_\varphi$ ($\lambda_\varphi > 0$ и C_φ — некоторые постоянные) [3]. В работе [3] показано, что пространство $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ является банаховым относительно нормы $\sigma_\varphi(\xi) = \sup\limits_{\lambda\neq 0} |\lambda|^{-1}\varphi^{(-1)}(\ln M \exp \lambda\xi)$. Здесь и далее $\varphi^{(-1)}(x)$ — функция обратная к $\varphi(x)$ при $x > 0$.

Будем говорить, что случайный процесс $\xi(t, \omega)$ принадлежит $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$, если при фиксированном t случайная величина $\xi(t, \omega)$ принадлежит $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$.

Сформулируем нужное нам в дальнейшем свойство пространства $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ (по поводу доказательства см. [3]). Пусть ξ принадлежит $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$. Тогда справедливы неравенства

$$P\{\xi > x\} \leqslant \exp\{-\varphi^*(x/\sigma_\Phi(\xi))\}, \tag{3}$$

$$P\{\xi < -x\} \leqslant \exp\{-\varphi^*(x/\sigma_\Phi(\xi))\}, \tag{4}$$

где $x > 0$, а $\varphi^*(x)$ — функция, дополнительная к $\varphi(x)$ (т. е. $\varphi^*(x) = \sup\limits_{y \in \mathbb{R}^1} (xy - \varphi(y))$ — преобразование Юнга — Фенхеля функции $\varphi(x)$ [4]).

Пусть L_v — пространство Орлича, порожденное N-функцией $v(x) = \exp\varphi^*(x) - 1$.

3. Оценка скорости сходимости тригонометрических случайных рядов в нормах пространства Орлича. Будем рассматривать сходимость в норме пространства Орлича случайных рядов вида

$$R(t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\,\xi_k, \tag{5}$$

где $T_k(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,— тригонометрический полином степени k, ξ_k — случайные величины субгауссовского типа.

В настоящей статье устанавливаются условия, при которых случайные процессы $R(t)$ из $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$ с вероятностью единица принадлежат пространству Орлича L_u при некоторых u, и приводится оценка скорости сходимости по вероятности ряда (5) в норме $\|\cdot\|_u$ пространства L_u.

Введем следующие обозначения: $R_m^n(t) = \sum\limits_{k=m}^{n} T_k(t)\,\xi_k$, $R_m^\infty(t) = \sum\limits_{k=m}^{\infty} T_k(t)\,\xi_k$, $R_m^n(\bar{a}, t) = \sum\limits_{k=m}^{n} a_k T_k(t)\,\xi_k$, $m < n$, где $\bar{a} = \{a_k,\ k = \overline{0, \infty}\}$ — числовая последовательность.

В дальнейшем нам понадобится неравенство Бернштейна между нормами тригонометрических полиномов, заданных на интервале [0, 1] в различных пространствах Орлича, приведенное в [5]. Сформулируем его.

Лемма 1. *Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — такие N-функции, что функция $k(x) = u^{(-1)}(v(x))$ выпукла ($u^{(-1)}(v)$ — функция, обратная к функции $u(v)$, $v > 0$), $S_1^n(t)$ — тригонометрический полином степени n, заданный на* [0, 1]. *Тогда справедливо неравенство*

$$\| S_1^n(t) \|_v \leqslant 2\,\frac{u^{(-1)}(n)}{v^{(-1)}(n)}\,\| S_1^n(t) \|_u. \tag{6}$$

Прежде, чем сформулировать основную теорему, докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 2. *Пусть $\xi(t)$, $t \in [0, 1]$, — случайный процесс субгауссовского типа и $\sigma^2 = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} \sigma_\Phi^2(\xi(t))$. Предположим, что N-функция $\varphi^*(x)$ принадлежит классу E_0. Тогда с вероятностью единица $\xi(t)$ принадлежит L_v и справедлива оценка при* $x > \sigma\varphi^{*(-1)}\left(\dfrac{2C^2}{\varphi^*\left(\dfrac{1}{K^2}\right)}\right)$

$$P\{\|\xi(t)\|_v > x\} \leqslant 4\left[\frac{1}{C^2}\,\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)\varphi^*\left(\frac{x}{\sigma}\right) - 1\right] \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\ln 2}{C^2}\,\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)\varphi^*\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right\}. \tag{7}$$

Доказательство. При любых $p > 1$, используя неравенства Чебышева, Иенсена и неравенство $(e^x - 1)^p \leqslant e^{px} - 1$, находим

$$P\{\| \xi(t) \|_v > x\} = P\left\{\int_0^1 \left[\exp \varphi^*\left(\frac{\xi(t)}{x}\right) - 1\right] dt > 2\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^p} M \left\{\int_0^1 \left[\exp \varphi^*\left(\frac{\xi(t)}{x}\right) - 1\right]^p dt\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^p}\left[\int_0^1 M \exp\left\{p\varphi^*\left(\frac{\xi(t)}{x}\right)\right\} dt - 1\right]. \tag{8}$$

Обозначим через $F(z)$ функцию распределения случайной величины $\xi(t)$. Рассмотрим

$$M \exp\left\{p\varphi^*\left(\frac{\xi(t)}{x}\right)\right\} = -\int_0^\infty \exp\left\{p\varphi^*\left(\frac{z}{x}\right)\right\} d(1 - F(z)) +$$

$$+ \int_{-\infty}^0 \exp\left\{\rho\varphi^*\left(\frac{z}{x}\right)\right\} dF(z).$$

В силу условия E_0: $\varphi^*\left(\frac{z}{\sigma}\right) \geqslant \frac{1}{C^2} \varphi^*\left(\frac{z}{x}\right)\varphi^*\left(\frac{x}{\sigma}\right)\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)$. Поэтому, используя неравенства (3) и (4), получаем

$$\exp\left\{p\varphi^*\left(\frac{z}{x}\right)\right\}(1 - F(z)) \leqslant \exp\left\{p\varphi^*\left(\frac{z}{x}\right)\right\} \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{z}{\sigma}\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{z}{x}\right)\left(\frac{1}{C^2}\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)\varphi^*\left(\frac{x}{\sigma}\right) - p\right)\right\}.$$

Если выбрать $\frac{1}{C^2}\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)\varphi^*\left(\frac{x}{\sigma}\right) - p > 0$, то интегрируя по частям, имеем

$$-\int_0^\infty \exp\left\{p\varphi^*\left(\frac{z}{x}\right)\right\} d(1 - F(z)) = -\exp\left\{p\varphi^*\left(\frac{z}{x}\right)\right\}(1 - F(z))\Big|_0^\infty +$$

$$+ p\int_0^\infty \exp\left\{p\varphi^*\left(\frac{z}{x}\right)\right\}(1 - F(z))\, d\varphi^*\left(\frac{z}{x}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 1 - F(0) + \frac{p}{\frac{1}{C^2}\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)\varphi^*\left(\frac{x}{\sigma}\right) - p}.$$

Аналогично

$$\int_{-\infty}^0 \exp\left\{p\varphi^*\left(\frac{z}{x}\right)\right\} dF(z) \leqslant F(0) + \frac{p}{\frac{1}{C^2}\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)\varphi^*\left(\frac{x}{\sigma}\right) - p}.$$

Следовательно,

$$M \exp\left\{p\varphi^*\left(\frac{\xi(t)}{x}\right)\right\} \leqslant 1 + \frac{2p}{\frac{1}{C^2}\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)\varphi^*\left(\frac{x}{\sigma}\right) - p}.$$

Подставляя это выражение в (8), получаем

$$P\{\|\xi(t)\|_v > x\} \leqslant \frac{1}{2^p}\left[\int_0^1\left(1+\frac{2p}{\frac{1}{C^2}\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)\varphi^*\left(\frac{x}{\sigma}\right)-p}\right)dt-1\right]=$$

$$=2^{1-p}\frac{p}{\frac{1}{C^2}\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)\varphi^*\left(\frac{x}{\sigma}\right)-p}.$$

Выбирая $p=\frac{1}{C^2}\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)\varphi^*\left(\frac{x}{\sigma}\right)-1$, получаем утверждение (7). Так как должно выполняться неравенство $p=\frac{1}{C^2}\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)\varphi^*\left(\frac{x}{\sigma}\right)-1>1$, то оценка (7) справедлива при $x>\sigma\ \varphi^{*(-1)}\left(\frac{2C^2}{\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)}\right)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *При выполнении условий леммы 2 справедливо неравенство*

$$M\exp\left\{\varphi^*\left(\frac{\|\xi(t)\|_v}{\sigma}\right)s\right\}\leqslant D(s), \tag{9}$$

$$D(s)=1+s\exp\{\varphi^*(x_1)s\}\left[\varphi^*(x_1)+\frac{4C^2}{\ln 2\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)-sC^2}\left(\frac{1}{C^2}\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\varphi^*(x_1)+\frac{C^2}{\ln 2\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)-sC^2}\right)-1\right)\exp\left\{-\varphi^*(x_1)\frac{\ln 2}{C^2}\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)\right\}\right]$$

при $x_1=\varphi^{*(-1)}\left(\frac{2C^2}{\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)}\right)$, $0<s<\frac{\ln 2}{C^2}\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)$.

Доказательство. Обозначим через $F(z)$ функцию распределения $\frac{\|\xi(t)\|_v}{\sigma}$. Пусть $x_1=\varphi^{*(-1)}\left(\frac{2C^2}{\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)}\right)$. По лемме 2 при $x>x_1$

$$1-F(x)=P\{\|\xi(t)\|_v>\sigma x\}\leqslant 4\left[\frac{1}{C^2}\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)\varphi^*(x)-1\right]\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\ln 2}{C^2}\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)\varphi^*(x)\right\}.$$

Используя это неравенство, находим

$$M\exp\left\{\varphi^*\left(\frac{\|\xi(t)\|_v}{\sigma}\right)s\right\}=-\exp\{\varphi^*(x)s\}(1-F(x))\,\Big|_0^\infty+$$

$$+s\int_0^\infty\exp\{\varphi^*(x)s\}(1-F(x))\,d\varphi^*(x)\leqslant 1+s\left[\int_0^{x_1}\exp\{(\varphi^*(x)s\}(1-F(x))\times\right.$$

$$\left.\times d\varphi^*(x)+\int_{x_1}^\infty\exp\{\varphi^*(x)s\}(1-F(x))\,d\varphi^*(x)\right].$$

В силу того, что

$$\int_0^{x_1}\exp\{\varphi^*(x)s\}(1-F(x))\,d\varphi^*(x)\leqslant\varphi^*(x_1)\exp\{\varphi^*(x_1)s\}$$

и

$$\int_{x_1}^{\infty} \exp\{\varphi^*(x)s\}(1-F(x))\,d\varphi^*(x) \leqslant \frac{4C^2}{\ln 2\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)-sC^2} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{C^2}\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)\left(\varphi^*(x_1)+\frac{C^2}{\ln 2\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)-sC^2}\right)-1\right] \times$$

$$\times \exp\left\{-\varphi^*(x_1)\left(\frac{\ln 2}{C^2}\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)-s\right)\right\},$$

получаем

$$M\exp\left\{\varphi^*\left(\frac{\|\xi(t)\|_v}{\sigma}\right)s\right\} \leqslant 1 + s\exp\{\varphi^*(x_1)s\} \times$$

$$\times \left[\varphi^*(x_1)+\frac{4C^2}{\ln 2\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)-sC^2}\left(\frac{1}{C^2}\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)\left(\varphi^*(x_1)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{C^2}{\ln 2\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)-sC^2}\right)-1\right)\exp\left\{-\varphi^*(x_1)\frac{\ln 2}{C^2}\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)\right\}\right].$$

Лемма доказана.

Теорема. *Пусть* $R(t)$ — *случайный процесс из* $\mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$, *представимый в виде ряда* (5). *Пусть* N-*функция* $\varphi(x)$ *такова, что дополнительная к ней функция* $\varphi^*(x)$ *удовлетворяет условию* E_0. *Если существует* N-*функция* $\tilde{u}(x)$ (*эквивалентная* $u(x)$) *такая, что функция* $k(x) = v^{(-1)}(\tilde{u}(x)) = \varphi^{*(-1)}(\ln(\tilde{u}(x)+1))$ *выпукла, то для того, чтобы случайный процесс* $R(t)$ *принадлежал пространству* L_u, *достаточно, чтобы существовала такая монотонно неубывающая последовательность* $\bar{a} = \{a_k, k=\overline{0,\infty}]$, $a_k > 0$, $a_k \uparrow \infty$, $k \to \infty$, *для которой выполняются условия*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi^{*(-1)}(\ln(1+k))}{\tilde{u}^{(-1)}(k)}\tilde{\sigma}_0^k\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right) < \infty, \tag{10}$$

$$\frac{\varphi^{*(-1)}(\ln(1+k))}{\tilde{u}^{(-1)}(k)}\frac{\tilde{\sigma}_0^k}{a_k} \to 0, \quad k \to \infty, \tag{11}$$

где $(\tilde{\sigma}_m^k)^2 = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} \sigma_\varphi^2(R_m^k(\bar{a},t))$.

При этом ряд (5) *сходится по вероятности в норме пространства* L_u *и справедлива оценка: при* $x > x_1 = \varphi^{*(-1)}\left(\frac{2C^2}{\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)}\right)$

$$P\{\|R_m^\infty(t)\|_{\tilde{u}} > r(m)x\} \leqslant \inf_{0<s<\frac{\ln 2}{C^2}\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)} \{D(s)\exp(-\varphi^*(x)s)\}, \tag{12}$$

где

$$r(m) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\varphi^{*(-1)}(\ln(1+k))}{\tilde{u}^{(-1)}(k)}\sigma_m^k\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right),$$

$$D(s) = 1 + s\exp\{\varphi^*(x_1)s\}\left[\varphi^*(x_1)+\frac{4C^2}{\ln 2\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)-sC^2}\times\right.$$

$$\times\left(\frac{1}{C^2}\,\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)\left(\varphi^*(x_1)+\frac{C^2}{\ln 2\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)-sC^2}\right)-1\right)\times$$

$$\left.\times\exp\left\{-\varphi^*(x_1)\,\frac{\ln 2}{C^2}\,\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right)\right\}\right],\quad 0<s<\frac{\ln 2}{C^2}\,\varphi^*\left(\frac{1}{K^2}\right).$$

Доказательство. Пусть $\bar{a}=\{a_k,\ k=\overline{0,\infty}\}$ — числовая последовательность, $\tilde{u}(x)$ — N-функция, для которых выполняются условия теоремы. При $l<k$

$$R_m^n(t)=\sum_{l=m}^{n-1}R_l^k(\bar{a},t)\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)+\frac{R_l^n(\bar{a},t)}{a_n}+\frac{R_l^{m-1}(\bar{a},t)}{a_m}.\tag{13}$$

В силу леммы 1 $\|R_m^n(t)\|_{\tilde{u}}\leqslant 2\,\dfrac{v^{(-1)}(n)}{\tilde{u}^{(-1)}(n)}\,\|R_m^n(t)\|_v$. Обозначив

$$b_k=2\,\frac{v^{(-1)}(k)}{\tilde{u}^{(-1)}(k)}=2\,\frac{\varphi^{*(-1)}(\ln(1+k))}{\tilde{u}^{(-1)}(k)},\tag{14}$$

из (13) и (14) будем иметь

$$\|R_m^n(t)\|_{\tilde{u}}\leqslant\sum_{k=m}^{n-1}b_k\|R_l^k(\bar{a},t)\|_v\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)+$$

$$+\frac{b_n}{a_n}\|R_l^n(\bar{a},t)\|_v+\frac{b_{m-1}}{a_m}\|R_l^{m-1}(\bar{a},t)\|_v.\tag{15}$$

Обозначив

$$r(l,m,n)=\sum_{k=m}^{n-1}b_k\tilde{\sigma}_l^k\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)+\frac{b_n\tilde{\sigma}_l^n}{a_n}+\frac{b_{m-1}\tilde{\sigma}_l^{m-1}}{a_m},$$

из (15), леммы 3 с учетом выпуклости N-функции $\varphi^*(x)$ получим

$$M\exp\left\{\varphi^*\left(\frac{\|R_m^n(t)\|_{\tilde{v}}}{r(l,m,n)}\right)s\right\}\leqslant M\exp\left\{\varphi^*\left(\sum_{k=m}^{n-1}\frac{\|R_l^k(\bar{a},t)\|_v}{\tilde{\sigma}_l^k}\times\right.\right.$$

$$\times\frac{b_k\tilde{\sigma}_l^k\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)}{r(l,m,n)}+\frac{\|R_l^n(\bar{a},t)\|_v}{\tilde{\sigma}_l^n}\,\frac{b_n\tilde{\sigma}_l^n}{r(l,m,n)\,a_n}+\frac{\|R_l^{m-1}(\bar{a},t)\|_v}{\tilde{\sigma}_l^{m-1}}\times$$

$$\left.\left.\times\frac{b_{m-1}\tilde{\sigma}_l^{m-1}}{r(l,m,n)\,a_m}\right)s\right\}\leqslant\sum_{k=m}^{n-1}\frac{b_k\tilde{\sigma}_l^k\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)}{r(l,m,n)}\times$$

$$\times M\exp\left\{\varphi^*\frac{\|R_l^k(\bar{a},t)\|_v}{\tilde{\sigma}_l^k}\right)s\right\}+\frac{b_n\tilde{\sigma}_l^n}{r(l,m,n)\,a_n}\,M\exp\left\{\varphi^*\left(\frac{\|R_l^n(\bar{a},t)\|_v}{\tilde{\sigma}_l^n}\right)s\right\}+$$

$$+\frac{b_{m-1}\tilde{\sigma}_l^{m-1}}{r(l,m,n)\,a_n}\,M\exp\left\{\varphi^*\left(\frac{\|R_l^{m-1}(\bar{a},t)\|_v}{\tilde{\sigma}_l^{m-1}}\right)s\right\}\leqslant D(s).$$

Отсюда для $x > x_1 = \varphi^{*(-1)}\left(\dfrac{2C^2}{\varphi^*\left(\dfrac{1}{K^2}\right)}\right)$, используя неравенство Чебышева, получаем $P\{\| R_m^n(t)\|_{\tilde{u}} > r(l, m, n)\, x\} \leqslant D(s)\exp\{-\varphi^*(x)\, s\}$.

Полагая в последнем неравенстве $l = 0$, $m = 0$, устремляя $n \to \infty$ и учитывая эквивалентность функций $u(x)$ и $\tilde{u}(x)$, получаем утверждение теоремы о принадлежности $R(t)$ пространству L_u, а полагая $l = 0$ и устремляя $m \to \infty$, находим сходимость ряда (5) по вероятности в норме $\|\cdot\|_u$ Если в этом же неравенстве положить $l = m$ и устремить $n \to \infty$, то получим неравенство (12). Теорема доказана.

Замечание. Подобный результат можно получить для разложений случайных процессов по целым функциям экспоненциального типа, ограниченным на вещественной оси, т. е. для случайных рядов вида $R(t) = c(t)\sum_{k=0}^{\infty} f_{\nu_k}(t)\,\xi_k$, где $\xi_k \in \mathrm{sub}_\varphi(\Omega)$, $c(t)$ — целая функция экспоненциального типа ε, ограниченная на вещественной оси, $f_{\nu_k}(t)$ — целые функции экспоненциального типа ν_k, ограниченные на вещественной оси.

Для рядов вида $R(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{\nu_k}(t)\,\xi_k$ (без веса $c(t)$) подобный результат можно получить в пространстве Орлича, рассматриваемом на любом конечном интервале ($L_u[-a, a]$).

1. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича.— М.: Физматгиз, 1958.— 271 с.
2. *Козаченко Ю. В.* О равномерной сходимости стохастических интегралов в норме пространства Орлича // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1983.— Вып. 29.— С.52—64.
3. *Козаченко Ю. В., Островский Е. И.* Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1985.— Вып. 32.— С. 42—53.
4. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач.— М. : Наука, 1974.— 475 с.
5. *Зелепугина И. Н.* О скорости сходимости разложений случайных процессов и полей: Автореф. дис. ... канд. физ-мат. наук.— Киев, 1985.— 20 с.
6. *Ферник К.* Регулярность траекторий гауссовских случайных функций // Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения.— М. : Мир, 1978.— С. 58—83.

Киев. ун-т Получено 07.07.87