УДК 517.9

А. Г. Руткас

Возмущения косоэрмитовых пучков и вырожденная задача Коши

В гильбертовом пространстве X рассматривается задача Коши

$$Adx/dt + Bx(t) = f(t), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где A, B — замкнутые линейные операторы со значениями в другом пространстве Y, причем A может вырождаться. Предполагается, что линеалы $D = D_A \cap D_B$, $D_* = D_{A^*} \cap D_{B^*}$ всюду плотны в пространствах X, Y соответственно, а пучок $\mu A^* + b^*$ косоэрмитов с точностью до конечномерного или компактного возмущения (п. 1). Такие уравнения описывают эволюцию бесконечных электрических цепей и электродинамических систем с конечным числом внешних волновых каналов [1, 2]. Спектральный анализ пучков ограниченных операторов рассматриваемого класса, его приложения к исследованию задачи Коши и соответствующих физических систем изложены в работах [2, 3]. Обзор других результатов по абстрактной задаче Коши (1) приведен в [4, 5].

1. По определению точка λ регулярна для пучка $\lambda A + B$, $\lambda \in \rho(A, B)$, если существует всюду определенный на Y ограниченный оператор $(\lambda A + B)^{-1}$ с областью значений D ($\subset X$). Пучок $\mu A^* + B^*$ *кососимметричен*, если билинейная форма

$$\psi(y, v) = (A^* y, B^* v) + (B^* y, A^* v), \quad y, v \in D_*, \tag{2}$$

равна нулю тождественно, и *квазикососимметричен*, если форма (2) продолжается на $Y \oplus Y$ до вполне непрерывной по Гильберту формы $\overline{\psi}(y, v)$ (непрерывной относительно слабой сходимости переменных y, v).

Теорема 1. *Пусть существует пара регулярных точек*

$$\nu \in \rho(A, B), \quad \overline{\nu} \in \rho(A^*, B^*), \quad \operatorname{Re}\nu > 0. \tag{3}$$

В случае кососимметричности (квазикососимметричности) пучка $\mu A^* + B^*$ все точки полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$ регулярны (нормальны) для пучков $\lambda A + B$, $\mu A^* + B^*$. Если еще и в левой полуплоскости существует регулярная точка пучка $\lambda A + B$, то вся полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda < 0$ состоит из регулярных (нормальных) точек пучков $\lambda A + B$, $\mu A^* + B^*$.*

Доказательство. Преобразование типа Кэли в пространстве X

$$T = (B + \nu A)^{-1}(B - \overline{\nu} A), \quad D_T = D \doteq D_A \cap D_B \tag{4}$$

имеет сопряженный оператор вида $T^* = (B - \overline{\nu} A)^* (B^* + \overline{\nu} A^*)^{-1}$. Поскольку $B^* - \nu A^*$ определен на D_*, то T^* определен всюду на X и потому ограничен, так что ограничен и оператор $\overline{T} = T^{**} \supset T$. Полагая в (2) $y = (B^* + \overline{\nu} A^*)^{-1} x$, $v = (B^* + \nu \overline{A}^*)^{-1} h$, получаем, что форма $\Omega(x, h) = ((E - \overline{T} T^*) x, h)$ либо равна нулю, либо вполне непрерывна по Гильберту на $X \oplus X$. В первом случае отображение $T^* : X \to X$ изометрично и внешность единичного круга $|\zeta| > 1$ состоит из регулярных точек операторов T^*, $\overline{T}$. Во втором случае в пространстве X существует изометрия V и вполне непрерывный оператор K такие, что в виде $V + K$ представляется либо T^*, либо $\overline{T}$. При $|\zeta| > 1$ точка ζ является нормальной для операторов $\overline{T}$, T^* [6] (лемма 5.2). Теперь утверждения теоремы о регулярности (нормальности) для пучков $\lambda A + B$, $\lambda A^* + B^*$ точек из полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$ вытекают из соотношения (5) и сопряженного к нему равенства

$$\lambda A + B = \frac{\nu - \lambda}{\nu + \overline{\nu}}(B + \nu A)(T - \zeta E), \quad \zeta = \frac{\lambda + \overline{\nu}}{\lambda - \nu}. \tag{5}$$

Если $\exists \lambda_0 \in \rho(A, B)$, $\operatorname{Re}\lambda_0 < 0$, то найдется точка $\nu = \nu_1$, для которой выполнено (3) и $(-\overline{\nu}) \in \rho(A, B)$. Запишем соотношения (4), (5) для этой точки $\nu = \nu_1$. Оператор $T^{-1} = (B - \overline{\nu} A)^{-1}(B + \nu A)$ определен на D, сопряженный $T^{-1^*} = (B + \nu A)^* (B - \nu A)^{-1^*}$ определен всюду на X, замкнут, а потому ограничен. Следовательно, круг $|\zeta| < 1$ состоит из регулярных (нормальных) точек операторов $\overline{T}$, T^* и полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda < 0$ — из регулярных (нормальных) точек пучков $\lambda A + B$, $\mu A^* + B^*$. Теорема доказана.

---

* Точка λ нормальна, если она либо регулярна, либо является изолированным собственным числом пучка конечной алгебраической кратности.

О п р е д е л е н и е. *Если существуют регулярная точка $\lambda_0 \in \rho(A, B)$ в левой полуплоскости и пара регулярных точек* (3) *в правой полуплоскости, то пучок $\mu A^* + B^*$ назовем косоэрмитовым в случае тождественного обращения в нуль формы $\psi(y, v)$* (2) *и соответственно квазикосоэрмитовым в случае вполне непрерывности $\psi(y, v)$ по Гильберту. Если оператор (A или B) ограничен, то $\nu \in \rho(A, B) \Leftrightarrow \bar{\nu} \in \rho(A^*, B^*)$.*

2. Оценки резольвенты $R_\lambda = (\lambda A + B)^{-1} A$ в полуплоскостях $\operatorname{Re}\lambda > a$ играют существенную роль при анализе задачи Коши (1) методом преобразования Лапласа [2, 4, 5].

П р е д л о ж е н и е 1. *Для резольвенты пучка $\lambda A + B$, сопряженный к которому косоэрмитов, справедлива оценка*

$$\| R_\lambda \| = \| \lambda A + B)^{-1} A \| \leqslant |\operatorname{Re}\lambda|^{-1}, \quad \operatorname{Re}\lambda \neq 0 \tag{6}$$

где ограниченный оператор R_λ определен на D_A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\bar{\lambda} = \mu$, $x = (B^* + \mu A^*) y$ $(\forall y \in D_*)$, $V_\mu x = A^* y$. Неравенство $\| x \| \geqslant \| \operatorname{Re}\lambda \| \| A^* y \|$ следует из оценок $\| (B^* + \mu A^*) y \| \| A^* y \| \geqslant |(\mu A^* y + B^* y, A^* y)| \geqslant |\operatorname{Re}(\mu A^* y, A^* y) + \operatorname{Re}(B^* y, A^* y)| = |\operatorname{Re}\mu| \| A^* y \|^2$. Поэтому $\| V_\mu \| = \| V_\mu^* \| \leqslant |\operatorname{Re}\lambda|^{-1}$, откуда с учетом $V_\mu^* \supset (B + \lambda A)^{-1} A$ вытекает (6).

Для квазикосоэрмитового пучка не всегда можно указать полуплоскость, подходящую для оценок резольвенты и свободную от собственных чисел. Укажем класс возмущений косоэрмитового пучка, сохраняющих оценку типа (6) в правой и левой полуплоскостях вне некоторой вертикальной полосы.

П р е д л о ж е н и е 2. *Если пучок $\mu A^* + B^*$ косоэрмитов и отображение $C : X \to D_A$ непрерывно $(C \in [X, X])$, то возмущение $\tilde{B} = B + AC$ оператора B определяет пучок $\lambda A + \tilde{B}$, спектр которого лежит в полосе $|\operatorname{Re}\lambda| < \| C \| q^{-1}$ при любом $q < 1$, а вне этой полосы резольвента имеет оценку*

$$\| \tilde{R}_\lambda \| = \| (\tilde{B} + \lambda A)^{-1} A \| \leqslant \frac{(1 - q)^{-1}}{|\operatorname{Re}\lambda|}, \quad |\operatorname{Re}\lambda| \geqslant \frac{\| C \|}{q}. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство $\tilde{R}_\lambda f = x$ эквивалентно следующим:

$$Af = (B + \lambda A) x + ACx, \quad (E + R_\lambda C) x = R_\lambda f. \tag{8}$$

В силу (6) в полуплоскостях $|\operatorname{Re}\lambda| \geqslant \| C \| q^{-1}$ справедливо $\| R_\lambda C \| \leqslant q < 1$, откуда $\| x \| \leqslant \| (E + R_\lambda C)^{-1} \| \| R_\lambda f \| \leqslant \dfrac{(1 - q)^{-1}}{|\operatorname{Re}\lambda|} \| f \|$.

3. Для класса уравнений (1), неразрешенных относительно производной, случай ограниченности операторных коэффициентов A, B является важнейшим (в отличие от класса уравнений $x' = Tx + f$). Действительно, если выполнено (3), то умножение на $\gamma = (\nu A + B)^{-1}$ превращает уравнение (1) с неограниченными операторами в уравнение $A_0 x' + B_0 x = \gamma f(t)$ с ограниченными плотно заданными операторами $A_0 = \gamma A$, $B_0 = \gamma B$ в пространстве X. Продолжив операторы по непрерывности до $\hat{A} = \bar{A_0}$, $\hat{B} = \bar{B_0} \in [X]$, получим искомую редуцированную задачу Коши

$$\hat{A} x' + \hat{B} x = \hat{f}(t), \quad x(0) = x_0. \tag{9}$$

Свойство косоэрмитовости (квазикосоэрмитовости) пучка $\mu A^* + B^*$ при переходе к редуцированному пучку $\mu \hat{A}^* + \hat{B}^*$ сохраняется.

Итак, в пп. 3, 4 коэффициентные операторы уравнения (1) считаются *ограниченными* $(A, B \in [X, Y])$. Пусть пучок $\mu A^* + B^*$ косоэрмитов, тогда $AB^* + BA^* = 0$. Выполним ортогональное разложение пространств X, Y и соответствующее разбиение операторов на блоки:

$$X = X_1 \oplus X_2, \quad Y = Y_1 \oplus Y_2, \quad X_1 = \operatorname{Ker} A, \quad Y_1 = \operatorname{Ker} A^*, \tag{10}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & B_{12} \\ B_{21} & B_2 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Введем ортопроекторы $P_k : X \to X_k$, $Q_k : Y \to Y_k$ и обозначим $x_k = P_k x$, $f_k = Q_k f$, $k = 1, 2$. Благодаря косоэрмитовости $B_{12} = 0$,

$$B + \lambda A = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ B_{21} & B_2 + \lambda A_2 \end{bmatrix}, \quad A_2 B_2^* + B_2 A_2^* = 0. \tag{12}$$

Следовательно, $\exists B_1^{-1} \in [Y_1, X_1]$, $\rho(A, B) = \rho(A_2, B_2)$, а пучок $\mu A_2^* + B_2^*$ со значениями из $[Y_2, X_2]$ косоэрмитов. В силу (12) линеал $L = A_2^*(Y_2)$ входит в область определения оператора $\mathfrak{A} = -iA_2^{-1}B_2$, оператор $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}/L$ имеет вид $\mathfrak{B} = iB_2^* A_2^{*-1}$ и $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{A}$. Далее $(\mathfrak{B} + i\mu E)^{-1} = -iA_2^*(B_2^* + \mu A_2^*)^{-1}$, так что индексы дефекта оператора $\mathfrak{B}$ равны нулю и $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ — самосопряженный оператор (в X_2). Задача (1) эквивалентна системе

$$\begin{gathered} B_1 x_1(t) = f_1(t), \quad x_1(0) = P_1 x_0, \\ A_2 x_2'(t) + B_2 x_2(t) = f_2(t) - B_{21} x_1(t), \quad x_2(0) = P_2 x_0. \end{gathered} \tag{13}$$

Условие $P_1 x_0 = B_1^{-1} Q_1 f(0)$ согласования начальных данных необходимо для разрешимости задачи (1) при $f \in C[0, \infty)$. Первая компонента решения вычисляется по формуле $x_1(t) = B_1^{-1} Q_1 f(t)$. В уравнении для второй компоненты

$$A_2 x_2'(t) + B_2 x_2(t) = g(t), \quad x_2(0) = P_2 x_0 \tag{14}$$

оператор A_2 невырожден, $g(t) = (Q_2 - B_{21} B_1^{-1} Q_1) f(t)$. Если выполнено условие $g(t) \in A(X) (= A_2(X_2))$ $(\forall t \geqslant 0)$, то задача (14) эквивалентна задаче Коши (15) для неоднородного уравнения *Шредингера* (абстрактного):

$$x_2'(t) + i\mathfrak{A} x_2(t) = A_2^{-1} g(t), \quad x_2(0) = P_2 x_0. \tag{15}$$

Получена следующая теорема.

Теорема 2. *Предположим, пучок $\mu A^* + B^*$ операторов из $[Y, X]$ косоэрмитов, и в терминах операторных блоков* (11) *функция $Q_1 f(t)$ дифференцируема*, а функция $\varphi(t) = A_2^{-1}(Q_2 - B_{21} B_1^{-1} Q_1) f(t)$ либо непрерывно дифференцируема, либо $A_2^{-1} B_2 \varphi(t) \in C[0, \infty)$. Тогда задача Коши* (1) *имеет классическое решение $x(t)$ при всяком начальном векторе x_0, для которого $P_1 x_0 = B_1^{-1} Q_1 f(0)$, $P_2 x_0 \in A^*(Y)$. Решение $x = x_1 \oplus x_2$ допускает представление*

$$B_1^{-1} Q_1 f(t) \oplus \left[\exp(-i\mathfrak{A}t) P_2 x_0 + \int_0^t \exp[i\mathfrak{A}(s - t)] \varphi(s)\, ds\right].$$

Для однородной задачи (1) с косоэрмитовым пучком $\mu A^* + B^*$ начальное многообразие обобщенных решений совпадает с подпространством $X_2 = (\mathrm{Ker}\, A)$, классических решений — с плотным в X_2 линеалом $A^*(Y)$. При этом норма решения при эволюции сохраняется: $\|x(t)\| \equiv \|x_0\|$ Заметим, что одна лишь оценка (6) для резольвенты в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ гарантирует диссипативность задачи. $\|x(t)\| \leqslant \|x_0\|$ [2, 5].

4. Пуст теперь пучок $\mu A^* + B^*$ *квазикосоэрмитов*. Не уменьшая общности, считаем, что $\pm 1 \in \rho(A, B)$. В силу теоремы 1 для собственного числа λ_i ($\mathrm{Re}\,\lambda_j \neq 0$) корневое подпространство пучка $\lambda A + B$ есть прямая сумма конечного числа подпространств X_j:

$$X_j = \text{л. о. } \{h_k^j\}_{k=1}^{N_j}, \quad (\lambda_j A + B) h_k^j = -A h_{k-1}^j, \quad h_0^j = 0, \tag{16}$$

---

*Для уравнения $\frac{d}{dt}(Ax) + Bx = f(t)$ достаточно непрерывности $Q_1 f(t)$.

где $\{h_k^j\}$ — цепочка из собственного и присоединенных векторов. Пучок $\lambda A + B$ приводится парой конечномерных подпространств (X_j, Y_j) [2,5], где $Y_j \doteq (B + A) X_j =$ л. о. $\{g_k^j \doteq A h_k^j\}_{k=1}^{N_j}$.

Введем спектральные проекторы [5] $P_j : X \to X_j$, $Q_j : Y \to Y_j$;

$$P_з = \oint\limits_{|\lambda-\lambda_j|=\varepsilon} (\lambda A + B)^{-1} A d\lambda, \quad Q_j = \oint A (\lambda A + B)^{-1} d\lambda.$$

Обозначим $f_j = Q_j f$, $x_0^j = P_j x_0$, $x_j = P_j x$. Поскольку $AP_j = Q_j A$, $BP_j = Q_j B$, то корректно рассматривать индуцированные конечномерные операторы A_j, $B_j \in [X_j, Y_j]$. Сужение

$$A_j dx_j/dt + B_j x_j = f_j(t) = \sum_{m=1}^{N_j} \gamma_m^j(t) g_m^j \tag{17}$$

уравнения (1) на подпространства X_j, Y_j имеет решение

$$x_j(t) = \sum_{k=1}^{N_j} \left[C_k^j \sum_{m=1}^{k} \frac{t^{k-m}}{(k-m)!} h_m^j + \sum_{m=1}^{k} \Gamma_{km}^j(t) h_m^j \right] e^{\lambda_j t}. \tag{18}$$

Здесь скаляры C_k^j суть компоненты начального вектора x_0^j в базисе $\{h_k^j\}_k \in \operatorname{bas} X_j$, функция $\Gamma_{km}^j(t)$ — первообразная порядка $(k - m + 1)$ от функции $\gamma_k^j(t) e^{-\lambda_j t}$ с нормировкой $\Gamma_{km}^j(0) = 0$. Пара подпространств $X_{\rm I} =$ л. з. о. $\{X_j\}$, $Y_{\rm I} =$ л. з. о. $\{Y_j\}$ инвариантна* относительно пучка $\lambda A + B$ [3, 5] и пучок имеет блочно-треугольный вид в ортогональных разложениях пространств $X = X_{\rm I} \oplus X_{\rm II}$, $Y = Y_{\rm I} \oplus Y_{\rm II}$. Соответственно этому уравнение (1) эквивалентно системе

$$A_{\rm I} dx_{\rm I}/dt + B_{\rm I} x_{\rm I} + A_{12} dx_{\rm II}/dt + B_{12} x_{\rm II} = f_1, \quad x_{\rm I}(0) = P_{\rm I} x_0, \tag{19}$$

$$A_{\rm II} dx_{\rm II}/dt + B_{\rm II} x_{\rm II} = f_{\rm II}(t), \quad x_{\rm II}(0) = P_{\rm II} x_0, \tag{20}$$

где $P_{\rm I}$ ($P_{\rm II}$) — ортопроектор в X на подпространство $X_{\rm I}$ ($X_{\rm II}$).

Спектр пучка $\lambda A_{\rm II} + B_{\rm II}$ со значениями из $[X_{\rm II}, Y_{\rm II}]$ расположен на мнимой оси, причем $\sigma(A, B) = \sigma(A_{\rm I}, B_{\rm I}) \cup \sigma(A_{\rm II}, B_{\rm II})$, а пучок $\mu A_{\rm II}^* + B_{\rm II}^*$ квазикосоэрмитов. Задача Коши (20) допускает исследование методами классического и локального преобразований Лапласа [5]. Практически важен частный случай, когда отклонение от косоэрмитовости в исходной задаче исчерпывается отщеплением всех корневых подпространств X_j ($\operatorname{Re} \lambda_j \neq 0$), так что «остаточный» пучок $\mu A_{\rm II}^* + B_{\rm II}^*$ косоэрмитов. Тогда задача (20) имеет единственное решение $x_{\rm II}(t)$ в условиях, определяемых теоремой 2. Подставляя это решение $x_{\rm II}$ в уравнение (19), получаем задачу Коши в пространствах $X_{\rm I}$, $Y_{\rm I}$:

$$A_{\rm I} dx_{\rm I}/dt + B_{\rm I} x_{\rm I} = \varphi(t), \quad x_{\rm I}(0) = P_1 x_0. \tag{21}$$

Пучок $\lambda A_{\rm I} + B_{\rm I}$ со значениями в $[X_{\rm I}, Y_{\rm I}]$ имеет дискретный спектр $\overline{\{\lambda_j\}}$ и полную систему собственных и присоединенных векторов $\{h_k^j\}$. Если система векторов $\{h_k^j\}$ образует базис своей линейной замкнутой оболочки $X_{\rm I}$, то решение уравнения (21) представляется рядом $x_{\rm I}(t) = \sum\limits_j x_j(t)$ из решений x_j конечномерных уравнений (17), в которых правые части f_j заменены функциями $\varphi_j = Q_j \varphi(t)$. Независимо от базисности незамкнутая линейная оболочка собственных и присоединенных векторов $\mathcal{L} =$ л. о. $\{h_k^j\} =$ л. о $\{X_j\}_j$ служит плотной оценкой начального многообразия однородной задачи (21), а также неоднородной — при условии $\varphi(t) \in \mathcal{L}$.

---

* $AX_{\rm I} \subset Y_{\rm I}$, $BX_{\rm I} \subset Y_{\rm I}$.

5. На уравнения (1) с неограниченными операторами A, B без оговорок переносятся построения п. 4, так как спектральные проекторы P_j, Q_j остаются конечномерными. В косоэрмитовом случае аналог теоремы 2 п. 3 для неограниченных операторов получается при дополнительном условии $\overline{A^* (D_*)} = \overline{A^* (D_{A^*})}$. Здесь оператор $Q_2 - B_{21}B_1^{-1} Q_1$ ограничен и задан всюду на Y. Однако преобразование $-iA_1^{-1}B_2$ лишь симметрично в X_2, хотя и имеет самосопряженное расширение $\mathfrak{A} = iB_2^*A^{*-1}$. Поэтому уравнение Шредингера (15) с таким оператором $\mathfrak{A}$ является естественным расширением уравнения (14) для компоненты решения $x_2(t)$, что и следует учитывать в формулировке теоремы 2.

Пример. Пусть однородный вдоль оси z волновод заполнен такой средой, что поперечная составляющая $\vec{P}\,(\vec{E})$ вектора поляризации в уравнениях Максвелла имеет вид $\vec{P} = a\vec{E} - \dfrac{\partial}{\partial z}\, b\, \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial z}$. Тогда амплитуды $I\,(t, z)$, $U\,(t, z)$]7] поля типа H (или E) удовлетворяют уравнениям обобщенной длинной линии [2, 8], которые не являются системой типа Ковалевской:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\sigma(z)\,\frac{\partial V}{\partial t}\right] + \frac{\partial I}{\partial z} + C(z)\,\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{I} = 0,$$
$$U = \Lambda(z)\,\partial\tilde{I}/\partial t, \quad V = -\,\partial U/\partial z, \quad \partial U/\partial z = -\,L(z)\,\partial I/\partial t. \tag{22}$$

Пусть в сечении $z=0$ волновод возбуждается падающей волной с амплитудой $\varphi^-(t)$, а в сечении $z = l$ поперечная составляющая магнитного поля равна нулю. Это эквивалентно граничным условиям. Интегрирование первого из уравнений (22) от z до l, а третьего и четвертого от 0 до z с учетом граничных условий переносит неоднородность из граничных условий в правую часть. Получается уравнение вида (1) относительно вектор-функции $x(t) = (I, \tilde{I}, V, U)$ со значениями из пространства $X = L_2^4\,[0, l] = Y$. Именно, $f = (0, 0, \sqrt{2}\,\varphi^-(t), 0))$

$$Ax = \left(\sigma V - \int_z^l CU dz;\; -\Lambda\tilde{I};\; \int_0^l CU dz;\; -LI\right);$$

$$Bx = \left(I - \int_z^l \tilde{I} dz;\;\; U;\; \int_0^l \tilde{I}\, dz + \int_0^z V dz + U;\; V\right).$$

При условии $0 < m \leqslant L,\ \Lambda,\ \sigma,\ C(z) \leqslant M < \infty$ в пространстве X вводится скалярное произведение

$$\int_0^l (LII^* + \Lambda\tilde{I}\,\tilde{I}^* + \sigma VV^* + CUU^*)dz.$$

Тогда $A, B \in [X]$, $\operatorname{rang}(AB^* + BA^*) = 1$ и на полуосях $\mathbb{R}_\pm$ имеются точки из $\rho\,(A, B)$. По теореме 1 все точки вне мнимой оси нормальны. Для формы (2) здесь $\psi\,(x, x) \geqslant 0$, поэтому в (4) $\| T \| \leqslant 1$ и по формуле (5) $\operatorname{Re} \acute{a} > 0 \Rightarrow \acute{a} \in \rho\,(A, B)$. При $\operatorname{Re} \acute{a} > 0$ применимо предложение 1 и вследствие оценки (6) однородная задача Коши диссипативна (и тем более равномерно корректна) на всем начальном многообразии $D_0 = \{x_0\}$, где она разрешима. Линеал $\mathcal{L} = [(B + 2A)^{-1}\,A]^3\,X \subset D_0$ дает плотную оценку $D_0 : \overline{\mathcal{L}} = \overline{D}_0$ [5]. Дальнейшие сведения о собственных числах и задаче Коши содержатся в [2, 8].

1. *Руткас А. Г.* Свойства функций рассеяния и прохождения волн в структурах с заданной геометрией // Докл. АН СССР.— 1976.— **230**, № 1.— С. 38—40.
2. *Руткас А. Г.* Системы рассеяния и передачи в электрических цепях (конечных и бесконечных).— Харьков, 1985.— 195 с.— Деп. в УкрНИИНТИ, № 2457, Ук-85Д.
3. *Руткас А. Г.* Характеристическая функция, универсальная и треугольные модели линейного пучка операторов.— Харьков, 1983.— 177 с. — Деп. в УкрНИИНТИ, № 883, Ук-85Д.
4. *Крейн С. Г., Хазан М. И.* Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве // Итоги науки и техники. Мат. анализ.— 1983.— **21**.— С. 130—264.
5. *Руткас А. Г.* Задача Коши для уравнения $Ax' + Bx(t) = f(t)$ // Дифференц. уравнения.— 1975.— **11**, № 11.— С. 1996—2010.
6. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.— М. : Наука, 1965.— 448 с.

7. *Третьяков О. А.* Метод модового базиса // Радиотехника и электроника.— 1986.— **31**, вып. 6.— С. 1074—1082.
8. *Руткас А. Г., Радбель Н. И.* О линейных операторных пучках и неканонических системах // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1973.— Вып. 17.— С. 3—14.

Харьк. ун-т

Получено 22.06.87