УДК 517.51

О. Н. Литвин

Восстановление функций по следам их нормальных производных на прямой в $\mathbf{R}^2$ с сохранением класса $\mathbf{C}^r(\mathbf{R}^2)$

В работах [1, 2] (следствие 1) сформулирована и доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $f(x, y) \in C^r(R^2)$, $r \geqslant n \geqslant 0$, $f^{(s,q)}(x, y) = \partial^{s+q} f(x, y)/\partial x^s \partial y^q$, $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ — *произвольные заданные действительные числа, не равные друг другу. Тогда оператор*

$$L_n f(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_{n0i} f(x + \beta_i y, 0) + \sum_{s=1}^{n} \sum_{i=0}^{n} \lambda_{nsi} \int_0^{x+\beta_i y} f^{(0,s)}(t, 0) \times \frac{[x + \beta_i y - t]^{s-1}}{(s-1)!} dt, \tag{1}$$

где λ_{nsi}, $0 \leqslant i, s \leqslant n$, — *числа, являющиеся решениями систем*

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_{nsi} \beta_i^p = \delta_{ps} = \begin{cases} 1, & p = s, \\ 0, & p \neq s, \end{cases} \quad 0 \leqslant p, s \leqslant n, \tag{2}$$

обладает следующими свойствами:

$$f(x, y) \in C^r(R^2) \Rightarrow L_n f(x, y) \in C^r(R^2), \tag{3}$$

$$\left. \frac{\partial^s L_n f(x, y)}{\partial y^s} \right|_{y=0} = \varphi_s(x) = f^{(0,s)}(x, 0) \in C^{r-s}(R), \quad 0 \leqslant s \leqslant n. \tag{4}$$

В данной работе получено новое интегральное представление для остатка приближения функции f с помощью операторов $L_n f$ и его оценка. Это интегральное представление явно зависит от дифференциального оператора, аннулирующегося на функциях вида $L_n f(x, y)$, что позволило сделать заключение (теорема 3) о существовании и единственности решения задачи Коши для соответствующего дифференциального уравнения $(n+1)$-го порядка с частными производными. Получаемое решение содержит в себе, как частный случай, формулу Тейлора и Даламбера, дающую решение задачи Коши для уравнения колебаний струны.

Лемма. *Решение систем* (2) *имеет вид*

$$\lambda_{nsi} = \Delta_{ni}^{-1} (-1)^{n-s} \sum_{\substack{0 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-s} \leqslant n \\ i_\nu \neq i, \quad \nu = \overline{1, n-s}}} \beta_{i_1}\beta_{i_2} \ldots \beta_{i_{n-s}}, \tag{5}$$

$$\Delta_{ni} = \prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq i}}^{n} (\beta_i - \beta_\nu).$$

В частности, $\lambda_{100} = \beta_1/(\beta_1 - \beta_0)$, $\lambda_{101} = -\beta_0/(\beta_1 - \beta_0)$, $\lambda_{110} = -\lambda_{111} = -1/(\beta_1 - \beta_0)$, $\lambda_{200} = \dfrac{\beta_1\beta_2}{(\beta_0 - \beta_1)(\beta_0 - \beta_2)}$, $\lambda_{201} = \dfrac{\beta_0\beta_2}{(\beta_1 - \beta_0)(\beta_1 - \beta_2)}$, $\lambda_{202} = \dfrac{\beta_0\beta_1}{(\beta_2 - \beta_0)(\beta_2 - \beta_1)}$, $\lambda_{210} = -\dfrac{\beta_1 + \beta_2}{(\beta_0 - \beta_1)(\beta_0 - \beta_2)}$, $\lambda_{211} = -\dfrac{\beta_0 + \beta_2}{(\beta_1 - \beta_0)(\beta_1 - \beta_2)}$, $\lambda_{212} = -\dfrac{\beta_0 + \beta_1}{(\beta_2 - \beta_0)(\beta_2 - \beta_1)}$, $\lambda_{220} = \dfrac{1}{(\beta_0 - \beta_1)(\beta_0 - \beta_2)}$, $\lambda_{221} = \dfrac{1}{(\beta_1 - \beta_0)(\beta_1 - \beta_2)}$, $\lambda_{222} = \dfrac{1}{(\beta_2 - \beta_0)(\beta_2 - \beta_1)}$.

Доказательство. Введем обозначения: $B = [\beta_i^p]_{i=\overline{0,n}}^{p=\overline{0,n}}$, $\Lambda = [\lambda_{nsi}]_{s=\overline{0,n}}^{i=\overline{0,n}}$. Представим системы (2) в виде матричного уравнения

$$\Lambda B = I, \tag{6}$$

имеющего единственное решение $\Lambda = B^{-1}$ в силу того, что $\det B \neq 0$, так как $\det B$ является детерминантом Вандермонда. С другой стороны, при решении интерполяционной задачи по $n+1$ узлам $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ для нахождения коэффициентов λ_{nsi}, $0 \leqslant s, i \leqslant n$, базисных интерполяционных полиномов Лагранжа $l_{ni}(x) = \sum_{s=0}^{n} \lambda_{nsi} x^s$, $l_{ni}(\beta_j) = \delta_{ij}$, $0 \leqslant i, j \leqslant n$, необходимо решить системы алгебраических уравнений $\sum_{s=0}^{n} \beta_j^s \lambda_{nsi} = \delta_{ij}$, $0 \leqslant i, j \leqslant n$, которые можно представить в виде матричного уравнения

$$B\Lambda = I, \quad \Lambda = B^{-1}. \tag{7}$$

Таким образом, системы (6) и (7) имеют одно решение. Но так как $l_{ni}(x) = \prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq i}}^{n} (x - \beta_\nu)/(\beta_i - \beta_\nu) = \Delta_{ni}^{-1} \prod_{\nu \neq i} (x - \beta_\nu)$, то решение системы (7) определяется формулами Виета [3]: $\Delta_{ni}\lambda_{nsi} = (-1)^{n-s} \sum_{\substack{0 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-s} \leqslant n \\ i_\nu \neq i, \nu = \overline{1, n-s}}} \beta_{i_1}\beta_{i_2} \ldots \beta_{i_{n-s}}$. Из полученных равенств следует доказательство леммы.

Теорема 2. *Пусть* $f(x, y) \in C^r(R^2)$, $r \geqslant n+1$. *Тогда остаток* $R_n f = (I - L_n) f$ *может быть представлен в виде*

$$R_n f(x, y) = \int_0^y \left[\sum_{i=0}^{n} \Delta_{ni}^{-1} \int_0^{x + \beta_i (y - z)} A_{n+1} f(t, z) \frac{[x + \beta_i (y - z) - t]^{n-1}}{(n-1)!} dt \right] dz, \tag{8}$$

$$A_{n+1} f(x, y) = \prod_{\nu=0}^{n} \left(-\beta_\nu \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) =$$

$$= \sum_{s=0}^{n+1} (-1)^{n+1-s} \sum_{0 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-s+1} \leqslant n} \prod_{\nu=1}^{n-s+1} \beta_{i_\nu} f^{(n+1-s,s)}(x, y).$$

Доказательство. Введем в рассмотрение следующую функцию:

$$\mathscr{L}_n f(x, y; z) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_{n0i} f(x + \beta_i (y - z), z) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} \sum_{i=0}^{n} \lambda_{nsi} \int_0^{x+\beta_i(y-z)} f^{(0,s)}(t, z) \frac{[x + \beta_i (y - z) - t]^{s-1}}{(s-1)!} dt.$$

Очевидно, $\mathscr{L}_n f(x, y; y) = f(x, y)$; $\mathscr{L}_n f(x, y; 0) = L_n f(x, y)$. Поэтому для остатка $R_n f(x, y)$ справедливо равенство

$$R_n f(x, y) = \int_0^y \frac{\partial \mathscr{L}_n f(x, y; z)}{\partial z} dz = \int_0^y \Big\{ \sum_{i=0}^{n} \Big[-\lambda_{n0i} \beta_i f^{(1,0)} +$$

$$+ (\lambda_{n0i} - \lambda_{n1i} \beta_i) f^{(0,1)} \Big] (x + \beta_i (y - z), z) +$$

$$+ \sum_{s=2}^{n} \sum_{i=0}^{n} (\lambda_{n,s-1,i} - \lambda_{nsi} \beta_i) \int_0^{x+\beta_i(y-z)} f^{(0,s)}(t, z) \frac{[x + \beta_i (y - z) - t]^{s-2}}{(s-2)!} dt +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} \lambda_{nni} \int_0^{x+\beta_i(y-z)} f^{(0,n+1)}(t, z) \frac{[x + \beta_i (y - z) - t]^{n-1}}{(n-1)!} dt \Big\} dz. \qquad (9)$$

Воспользуемся следующими тождествами, проверяемыми интегрированием по частям, с учетом равенств (2):

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_{n0i} \beta_i f^{(1,0)}(x + \beta_i (y - z), z) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_{n0i} \beta_i \int_0^{x+\beta_i(y-z)} f^{(n+1,0)}(t, z) \times$$

$$\times \frac{[x + \beta_i (y - z) - t]^{n-1}}{(n-1)!} dt,$$

$$\sum_{i=0}^{n} (\lambda_{n0i} - \lambda_{n1i} \beta_i) f^{(0,1)}(x + \beta_i (y - z), z) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (\lambda_{n0i} - \lambda_{n1i} \beta_i) \int_0^{x+\beta_i(y-z)} f^{(n,1)}(t, z) \frac{[x + \beta_i (y - z) - t]^{n-1}}{(n-1)!} dt,$$

$$\sum_{i=0}^{n} (\lambda_{n,s-1,i} - \lambda_{nsi} \beta_i) \int_0^{x+\beta_i(y-z)} f^{(0,s)}(t, z) \frac{[x + \beta_i (y - z) - t]^{s-2}}{(s-2)!} dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (\lambda_{n,s-1,i} - \lambda_{nsi} \beta_i) \int_0^{x+\beta_i(y-z)} f^{(n+1-s,s)}(t, z) \frac{[x + \beta_i (y - z) - t]^{n-1}}{(n-1)!} dt,$$

$$s = \overline{2, n}.$$

Подставляя эти выражения в равенство (9), получаем

$$R_n f(x, y) = \int_0^y \left\{ \sum_{i=0}^{n} \int_0^{x+\beta_i(y-z)} A_i f(t, r) \frac{[x + \beta_i(y-z) - t]^{n-1}}{(n-1)!} dt \right\} dz, \quad (10)$$

где $$A_i f(x, y) = \Big[-\lambda_{n0i}\beta_i f^{(n+1,0)} + \sum_{s=1}^{n} (\lambda_{n,s-1,i} - \lambda_{nsi}\beta_i) f^{(n+1-s,s)} + \lambda_{nni} \times$$
$$\times f^{(0,n+1)}\Big](x, y), \quad i = \overline{0, n}.$$

Так как из равенств (5) следуют равенства

$$-\lambda_{n0i}\beta_i = \Delta_{ni}^{-1}(-1)^{n+1} \prod_{\nu=0}^{n} \beta_\nu,$$

$$\lambda_{n,s-1,i} - \lambda_{nsi}\beta_i = \Delta_{ni}^{-1} \Big[(-1)^{n+1-s} \sum_{\substack{0 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-s+1} \leqslant n \\ i_\nu \neq i,\ \nu = \overline{1, n-s+1}}} \beta_{i_1}\beta_{i_2} \ldots \beta_{i_{n-s+1}} -$$

$$-(-1)^{n-s}\beta_i \sum_{\substack{0 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-s} \leqslant n \\ i_\nu \neq i,\ \nu = \overline{1, n-s}}} \beta_{i_1}\beta_{i_2} \ldots \beta_{i_{n-s}}\Big] =$$

$$= \Delta_{ni}^{-1}(-1)^{n+1-s} \sum_{0 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-s+1} \leqslant n} \prod_{\nu=1}^{n-s+1} \beta i_\nu, \quad s = \overline{1, n},$$

$$\lambda_{nni} = \Delta_{ni}^{-1} = \Delta_{ni}^{-1} \sum_{0 \leqslant i_1 < i_0 \leqslant n} \prod_{\nu=1}^{0} \beta_{i_\nu}, \quad i = \overline{0, n},$$

то все операторы $A_i f(x, y)$ можно представить следующим образом: $A_i f(x, y) = \Delta_{ni}^{-1} A_{n+1} f(x, y)$, $i = \overline{0, n}$, что позволяет равенство (10) представить в виде (8). Теорема 2 доказана.

Следствие. *Для всех $f(x, y) \in C^r(R^2)$, $r > n$, справедливо представление*

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \Delta_{ni}^{-1} \Big\{(-1)^n \prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq i}}^{n} \beta_\nu f(x + \beta_i y, 0) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} (-1)^{n-s} \sum_{\substack{0 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-s} \leqslant n \\ i_\nu \neq i,\ \nu = \overline{1, n-s}}} \prod_{\nu=1}^{n-s} \beta_{i_\nu} \int_0^{x+\beta_i y} f^{(0,s)}(t, 0) \frac{[x + \beta_i y - t]^{s-1}}{(s-1)!} dt\Big\} +$$

$$+ \int_0^y \Big\{\sum_{i=0}^{n} \Delta_{ni}^{-1} \int_0^{x+\beta_i(y-z)} \prod_{\nu=0}^{n} \left(-\beta_\nu \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right) f(t, z) \times$$

$$\times \frac{[x + \beta_i(y-z) - t]^{n-1}}{(n-1)!} dt\Big\} dz. \quad (11)$$

В частности, при $n = 1$

$$f(x, y) = \frac{1}{\beta_1 - \beta_0}\Big[\beta_1 f(x + \beta_0 y, 0) - \beta_0 f(x + \beta_1 y, 0) - \int_0^{x+\beta_0 y} f^{(0,1)}(t, 0)\, dt +$$

$$+ \int_0^{x+\beta_1 y} f^{(0,1)}(t, 0)\, dt\Big] + \frac{1}{\beta_1 - \beta_0} \int_0^{y} \Big\{-\int_0^{x+\beta_0(t-z)} A_2 f(t, z)\, dt +$$

$$+\int_{0}^{x+\beta_1(t-z)} A_2 f(t,z)\,dt\Bigg\}\,dz, \quad A_2=\beta_0\beta_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}-(\beta_0+\beta_1)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Если $-\beta_0=\beta_1=\beta>0$, *то последняя формула дает решение задачи Коши для уравнения колебаний струны в форме Даламбера.*

Из изложенного выше следует доказательство теоремы 3.

Теорема 3. *Решение задачи Коши*

$$A_{n+1}u(x,y)=g(x,y)\quad y>0,\quad g(x,y)\in C(R^2), u^{(0,s)}(x,0)=\varphi_s(x),$$
$$s=\overline{0,n},\quad \varphi_s(x)\in C^{n+1-s}(R),\quad s=\overline{0,n},$$

существует, единственно и имеет вид

$$u(x,y)=L_n u(x,y)+\int_0^y\left[\sum_{i=0}^{n}\Delta_{ni}^{-1}\int_0^{x+\beta_i(y-z)} g(t,z)\frac{(x+\beta_i(y-z)-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt\right]dz.$$

Замечание. Так как $A_{n+1}\Phi(x+\beta_i y)=0,\ i=\overline{0,n},\quad \forall\Phi\in C^{n+1}(R)$, то $A_{n+1}[L_n\ u\ (x,y)]=0$. Установим оценку для остатка (8). Пусть $a(z)\leqslant x$, $x+\beta_i(y-z)\leqslant b(z),\ \ i=\overline{0,n}$.

Теорема 4. *Если* $A_{n+1}f(t,z)\in C(D),\ \ D=\{a(z)\leqslant t\leqslant b(z), 0\leqslant z\leqslant y\}$, *то* $\exists\,(\theta,\varkappa)\in D: R_n f(x,y)=A_{n+1}f(\theta,\varkappa)\,y^{n+1}/(n+1)!,\ 0\leqslant y\leqslant h;\ |R_n f|(x,y)\leqslant \leqslant M_{n+1}h^{n+1}/(n+1)!,\ \ M_{n+1}=\max\limits_{(t,z)\in D}|A_{n+1}f(t,z)|=M_{n+1}(\beta_0,\ldots,\beta_n)$.

Доказательство. В силу (2) формулу (8) можно представить в виде

$$R_n f(x,y)=\int_0^y\left[\sum_{i=0}^{n}\Delta_{ni}^{-1}\int_x^{x+\beta_i(y-z)} A_{n+1}f(t,z)\frac{(x+\beta_i(y-z)-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt\right]dz.$$

Воспользуемся для каждого внутреннего интеграла теоремой о среднем (полагая $\theta_i=\theta_i(z)\in(x,x+\beta_i(y-z))$ или $\theta_i\in(x+\beta_i(y-z),x)$):

$$R_n f(x,y)=\int_0^y\left[\sum_{i=0}^{n}\Delta_{ni}^{-1}A_{n+1}f(\theta_i,z)\frac{\beta_i^n(y-z)^n}{n!}\right]dz.$$

Поскольку $A_{n+1}f(t,z)\in C(D)$ и $\beta_0^n\Delta_{n_0}^{-1}+\ldots+\beta_n^n\Delta_{nn}^{-1}=1$, то $\exists\theta(z)\in(a(z), b(z)):\sum\limits_{i=0}^{n}\beta_i^n\Delta_{ni}^{-1}A_{n+1}f(\theta_i,z)=A_{n+1}f(\theta(z),z)$, т. е.

$$R_n f(x,y)=\int_0^y A_{n+1}f(\theta(z),z)\frac{(y-z)^n}{n!}dz=A_{n+1}f(\theta(\varkappa),\varkappa)\frac{y^{n+1}}{(n+1)!},\ \varkappa\in(0,y).$$

Таким образом, первое утверждение теоремы доказано. Доказательство второго утверждения теоремы очевидно. Теорема 4 доказана.

Из теоремы 4 следует, что: 1) если $M_{n+1}<\max\limits_{(t,z)\in D}|f^{(0,n+1)}(t,z)|$, то $|R_n f(x,y)|$ будет меньше остатка формулы Тейлора по степеням y; 2) для уменьшения величины M_{n+1} можно распорядиться выбором постоянных β_i, подчинив их условию $M_{n+1}\to\min\limits_{\beta_i}$.

1. *Литвин О. Н.* Интерполяция функций и их нормальных производных на гладких линиях в R^m // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1984.— № 7.— С. 15—19.
2. *Литвин О. Н.* Интерполяция данных Коши на нескольких параллельных прямых в R^2

с сохранением класса дифференцируемости // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, № 4.— С. 509—513.
3. *Математическая* энциклопедия / Под ред. И. М. Виноградова : В 4-х т.— М. : Сов. энциклопедия, 1977.— Т. 1.— 1151 с.

Укр. заочн. политехн. ин-т, Харьков Получено 06.04.87