УДК 517.9

С. Б. Кириченко

Оптимальная импульсная коррекция

1. Введение. Различным постановкам задачи оптимальной импульсной коррекции посвящено много работ, поскольку эта задача имеет очень широкий круг приложений. Полное изложение общей теории дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и некоторых вопросов оптимального управления такими воздействиями дано в работе [1]. Однако, каждая из известных работ содержала решение той или иной задачи и использовала при этом ее специфические особенности.

2. Постановка задачи и обозначения. Движение объекта происходит на интервале времени $[t_0, T]$. Моменты $t_0 < \tau_0 < \ldots < \ldots < \tau_m < \tau_{m+1} = T$ выбраны на этом интервале и, вообще говоря, не фиксированы. На каждом из интервалов $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ траектория движения $x_i(t) \in R^{n_i}$ описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_i), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \quad \tau_{-1} = t_0, \quad i = -1, 0, \ldots, m, \tag{1}$$

причем в моменты τ_i, $i = 0, \ldots, m$, выполняются стыковочные соотношения

$$x_i(\tau_i) = A_i x_{i-1}(\tau_i) + B_i v_i. \tag{2}$$

Здесь A_i — $n_i \times n_{i-1}$-, B_i — $n_i \times r_i$-матрица. Наличие второго члена в правой части формулы (2) описывает подачу импульса в моменты τ_i за счет выбора вектора v_i из выпуклого множества $V_i \in R^{r_i}$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что функции f_i непрерывны по своим аргументам и непрерывно дифференцируемы по фазовым координатам. При этом, если это необходимо, решение системы (1) будем рассматривать на всем отрезке $[t_0, T]$. Обозначим через $x_i(t, \tau, y_i)$ решение системы (1), удовлетворяющее условию

$$x_i(\tau, \tau, y_i) = y_i \in R^{n_i}. \tag{3}$$

Матрица $\Phi_i(t, \tau)$, $\Phi_i(\tau, \tau) = I$ есть фундаментальная матрица линеаризованной системы

$$\frac{d}{dt}\Phi_i = \frac{\partial f_i(t, x_i(t, \tau, y_i))}{\partial x_i}\Phi_i. \tag{4}$$

Пусть теперь заданы $k+1$ непрерывно дифференцируемые функции $\varphi_j(\tau_0, \ldots, \tau_m, y_0, \ldots, y_m)$, $y_i \in R^{n_i}$. Основная задача, для которой будут сформулированы необходимые условия экстремума, состоит в следующем: необходимо выбрать моменты τ_i и векторы v_i так, чтобы выполнялись соотношения

$$\min \varphi_0(\tau_0, \ldots, \tau_m, x_0(\tau_0), \ldots, x_m(\tau_m)), \quad \varphi_j(\tau_0, \ldots, \tau_m, x_0(\tau_0), \ldots, x_m(\tau_m)) \leqslant 0,$$
$$j = 1, \ldots, k, \quad v_i \in V_i, \quad i = 0, \ldots, m. \tag{5}$$

Введем следующие обозначения. $C]\tau_i, \tau_{i+1}[$ есть пространство непрерывных на отрезке $[t_0, T]$ функций времени t, равных нулю на отрезке $[\tau_i - \delta, \tau_{i+1} + \delta]$ при некотором $\delta > 0$ и произвольных вне этого отрезка. Конус касательных направлений к выпуклому множеству V в точке $\bar{x}$ имеет стандартный вид.

3. Принцип вывода необходимых условий минимума. Поставленную выше задачу постараемся вложить в общую схему вывода условий экстремума, которая описана в работах [2, 3].

Пусть Z — произвольное нормированное пространство с элементами z, $\psi_j(z)$, $j = 0, \ldots, k$, — произвольные функции и $M \subseteq Z$ — некоторое множество. Оптимизационная задача может быть записана в следующем виде:

$$\min_z \{\psi_0(z) : \psi_j(z) \leqslant 0, \ z \in M, \ j = 1, \ldots, k\}. \tag{6}$$

Пусть z_0 — решение этой задачи. Будем предполагать, что существуют такие выпуклые функции $h_j(z)$, что $\lim\limits_{z \downarrow 0 \bar{y} \to \bar{z}} \frac{1}{\varepsilon}[\psi_j(z_0 + \varepsilon\bar{y}) - \psi_j(z_0)] \leqslant$ $\leqslant h_j(\bar{z})$, $\bar{z} \in Z$. Напомним также, что выпуклый конус K_M называется конусом касательных направлений к множеству M в точке z_0, если для любого элемента $\bar{z} \in K_M$ существует такая функция $z(\varepsilon) \in Z$, определенная при всех достаточно малых неотрицательных ε, что

$$z(\varepsilon) \in M, \quad z(0) = z_0, \quad \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} z(\varepsilon) = \bar{z}. \tag{7}$$

Необходимые условия минимума: если существуют функции h_j и выпуклый конус K_M, удовлетворяющие указанным выше условиям, то для того, чтобы точка z_0 была решением оптимизационной задачи, необходимо существование таких чисел λ_j, $j = 0, \ldots, k$, что $\lambda_j \geqslant 0$, но не все равные нулю, и

$$\lambda_0 h_0(\bar{z}) + \ldots + \lambda_k h_k(\bar{z}) \geqslant 0, \quad \bar{z} \in K_M. \tag{8}$$

Покажем, как поставленная задача вкладывается в эту схему. Положим $z = (\tau_0, \ldots, \tau_m, x_0(\cdot), \ldots, x_m(\cdot), v_0, \ldots, v_m)$, где x_i — непрерывные функции времени t на отрезке $[t_0, T]$. Таким образом, в качестве пространства Z выбрано пространство $R^{m+1} \times C[t_0, T] \times \ldots \times C[t_0, T] \times R^{r_0} \times \ldots \times R^{r_m}$. Выберем множество таких z, для которых $x_i(t)$ удовлетворяют уравнениям (1) и условиям стыковки (2), и обозначим его через M. Положим также $\psi_j(z) \equiv \varphi_j(\tau_0, \ldots, \tau_m, x_0(\tau_0), \ldots, x_m(\tau_m))$, $j = 0, \ldots, k$. Теперь задача состоит в построении касательного конуса K_M и функций h_j для рассматриваемой задачи.

4. Построение конуса касательных направлений. В точке $z_0 = (\tau_0, \ldots, \tau_m, x_0(\cdot, \tau_0, y_0), \ldots, x_m(\cdot, \tau_m, y_m), v_0, \ldots, v_m) \in Z$, построим конус касательных направлений к множеству $M - K_M$.

Теорема 1. *Множество элементов* $z = (\delta\tau_0, \ldots, \delta\tau_m, y_0(\cdot), \ldots, y_m(\cdot), \delta v_0, \ldots, \delta v_m) \in Z$ *таких, что* $y_i(t) = \Phi_i(t, \tau_i) z_i + \delta x_i(t)$, $i = 0, \ldots, m$, $\delta x_i \in C]\tau_i, \tau_{i+1}[$, $\delta v_i \in K_{V_i}$, *а* z_i *определяются из рекуррентных соотношений*

$$z_i = -[\dot{x}_i(\tau_i) - A_i \dot{x}_{i-1}(\tau_i)]\,\delta\tau_i + A_i \Phi_{i-1}(\tau_i, \tau_{i-1}) z_{i-1} + B_i \delta v_i,$$
$$z_{-1} = 0, \quad i = 0, \ldots, m, \tag{9}$$

образуют касательный конус K_M.

Решение поставленной задачи, т. е. получение необходимых условий минимума, имеет своим существенным моментом как построение конуса K_M, так и сопряженного к нему K_M^*. Выпуклый конус $K_M \subset Z$ порождает некоторый другой конус K_M^* в Z^*, который и называется сопряженным. Согласно определению

$$K_M^* = \{z^* \in Z^* : z^*(z) \geqslant 0; \ \ z \in K_M\}. \tag{10}$$

Таким образом, $K_M^* = \{(\tau_0^*, \ldots, \tau_m^*, \sigma_0(\cdot), \ldots, \sigma_m(\cdot), v_0^*, \ldots, v_m^*)\}$, где $\sigma_i(\cdot)$ есть векторы-строки размерности n_i, компонентами которых являются функции ограниченной вариации на $[t_0, T]$, $\tau_i^* \in R$ и v_i^* принадлежат пространству $R^{r_i^*}$ (R^{n^*} есть пространство векторов-строк размерности n). Согласно определению для элементов $z \in K_M$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=0}^{m} \int_{t_0}^{T} d\sigma_i(t)\, y_i(t) + \sum_{i=0}^{m} \tau_i^*\, \delta\tau_i + \sum_{i=0}^{m} v_i^*\, \delta v_i \geqslant 0. \tag{11}$$

Рассмотрим одно из слагаемых суммы (11):

$$\int_{0}^{T} d\sigma_i(t)\, y_i(t) + \int_{t_0}^{T} \Phi_j(t, \tau_i)\, d\sigma_i(t)\, z_i + \int_{t_0}^{T} d\sigma_i(t)\, \delta x_i(t).$$

Так как $\delta x_i(t) \in C]\tau_i, \tau_{i+1}[$, то при фиксированном $\delta > 0$

$$\int_{t_0}^{T} d\sigma_i(t)\, \delta x_i(t) = \int_{t_0}^{\tau_i - \delta} d\sigma_i(t)\, \delta x_i(t) + \int_{\tau_{i+1}+\delta}^{T} d\sigma_i(t)\, \delta x_i(t).$$

Устремляя $\delta \to 0$ и учитывая, что δx_i произвольно вне отрезка $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, получаем, что мера $d\sigma_i(t)$ нулевая вне этого отрезка. Условие (11) запишем в виде

$$\sum_{i=0}^{m} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} d\sigma_i(t)\, \Phi_i(t, \tau_i)\, z_i + \sum_{i=0}^{m} \tau_i^*\, \delta\tau_i + \sum_{i=0}^{m} v_i^*\, \delta v_t \geqslant 0. \tag{12}$$

Из соотношения (12) следует, что в построении конуса K_M^* участвует лишь конечное число конечномерных параметров z_i, $\delta\tau_i$, δv_i, $i = 0, \ldots, m$. Теорема 1 определяет проекцию $\mathcal{K}_M$ конуса K_M из исходного функционального пространства Z в конечномерное пространство этих параметров R^p, $p = n_0 + \ldots + n_m + r_0 + \ldots + r_m + m + 1$, с элементами $x = \{z_0, \ldots, z_m, \delta\tau_0, \ldots, \delta\tau_m, \delta v_0, \ldots, \delta v_m\}$.

Соотношения (9) задают в R^p многогранный конус, так как их можно представить в виде $Ax = 0$, где $x \in R^p$, а матрица $A = [A_1, A_2, A_3]$ есть трехблочная матрица размера $\sum_{i=0}^{m} n_i \times (m + 1 + \sum_{i=0}^{m} (n_i + r_i))$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} I & & & & 0 \\ C_1 I & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & C_i I & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & C_m I \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} A_2 = \operatorname{diag}[Q_0, \dots, Q_m], \\ \\ A_3 = \operatorname{diag}[-B_0, \dots, -B_m], \end{matrix}$$

$$C_i = -A_i \Phi_{i-1}(\tau_i, \tau_{i-1}), \ Q_i = -[\dot{x}_i(\tau_i) - A_i \dot{x}_{i-1}(\tau_i)].$$

Необходимо учесть ограничение $\delta v_i \in K_{V_i}$. Через K_V обозначим конус $K_V = \{x = (x_0, \dots, x_m, y_0, \dots, y_m, p_0, \dots, p_m) \in R^p : p_i \in K_{V_i}, \ i = 0, \dots, m\}$, K_V — выпуклый конус. Итак, конус $\mathcal{K}_M$ можно рассматривать как пересечение многогранного и выпуклого конусов $\mathcal{K}_M = \{x \in R^p : Ax = 0, \ x \in K_V\}$. Согласно теоремам 4.9 и 4.16 [4, с. 47]

$$\mathcal{K}_M^* = \{(y_0^* - y_1^* A_1 \Phi_0(\tau_1, \tau_0), \dots, y_m^*, y_0^* Q_0, \dots, y_m^* Q_m,$$
$$w_0^* - y_0^* B_0, \dots, w_m^* - y_m^* B_m)\}, \tag{13}$$

где $w_i^* \in K_{V_i}^*$, а y_i^* — произвольные векторы — строки размерности n_i при $i = 0, \dots, m$.

Из представления (13) и соотношения (12) следует, что элементы конуса K_M^* должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} d\sigma_i(t)\, \Phi_i(t, \tau_i) = y_i^* - y_{i+1}^* A_{i+1} \Phi_i(\tau_{i+1}, \tau_i), \tag{14}$$

$$\tau_i^* = y_i^* [\dot{x}_i(\tau_i) - A_i \dot{x}_{i-1}(\tau_i)], \tag{15}$$

$$v_i^* + y_i^* B_i \in K_{V_i}^*, \tag{16}$$

$$y_{m+1}^* = 0, \ \tau_{m+1} = T, \ A_{m+1} = I, \qquad i = 0, 1, \dots, m.$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. *Для того чтобы элемент $z^* \in Z^*$ принадлежал сопряженному конусу, необходимо и достаточно, чтобы нашлись векторы y_i^* из $R^{n_i^*}$, удовлетворяющие соотношениям* (14) — (16).

5. Построение функций h_j и формулировка необходимых условий экстремума. Итак, вернемся к задаче (5). Пусть $z_0 = (\tau_0, \dots, \tau_m, x_0(\cdot), \dots, x_m(\cdot), \ v_0, \dots, v_m) \in M$ — решение этой задачи. Введем обозначения

$$\bar{z}_0 = (\tau_0, \dots, \tau_m, x_0(\tau_0), \dots, x_m(\tau_m)),$$

$$\bar{y} = (\delta\tau_0, \dots, \delta\tau_m, \delta x_0(\cdot), \dots, \delta x_m(\cdot), \delta v_0, \dots, \delta v_m) \in Z, \ \Lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_k),$$

$$\mathcal{L}(\tau_0, \dots, \tau_m, y_0, \dots, y_m, \Lambda) = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j \varphi_j(\tau_0, \dots, \tau_m, y_0, \dots, y_m). \tag{17}$$

Согласно определению функции ψ_j

$$h_j(\bar{z}) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\varphi_j(\dots, \tau_i + \varepsilon\delta\tau_i, \dots, \dots, x_i(\tau_i + \varepsilon\delta\tau_i) + \varepsilon\delta x_i(\tau_i + \varepsilon\delta\tau_i), \dots) -$$
$$- \varphi_j(\bar{z}_0)].$$

Так как $\delta x_i \in C[t_0, T]$, то $\varepsilon\delta x_i(\tau_i + \varepsilon\delta\tau_i) = \varepsilon\delta x_i(\tau_i) + o(\varepsilon)$. Поскольку φ_j — непрерывно дифференцируемая функция и, следовательно, липшицева, то добавку $o(\varepsilon)$ можно не учитывать. Тогда h_j представим в стандартном виде линейного непрерывного функционала над пространством Z:

$$h_j(\bar{z}) = \langle(\ldots, \partial_{\tau_i}\varphi_j(\bar{z}_0) + \partial_{y_i}\varphi_j(\bar{z}_0)\dot{x}_i(\tau_i), \ldots, \int_{t_0}^{T} \partial_{y_i}\varphi_j(\bar{z}_0)\, d\sigma_{\tau_i}(t), \ldots$$

$$\ldots, 0, \ldots, 0), \bar{z}\rangle = \langle h_j, \bar{z}\rangle,$$

где $\sigma_{\tau_i} = \begin{cases} 1, & t \geqslant \tau_i, \\ 0, & t < \tau_i, \end{cases}$ что позволяет конкретизировать общие выводы п. 3.

Теорема 3. *Если $z_0 \in M$ является решением задачи* (5), *то найдутся векторы $y_i^* \in R^{n_i\,*}$ и не все равные нулю числа λ_ν такие, что*

$$\lambda_\nu \geqslant 0, \ \nu = 0, \ldots, k, \ \lambda_\nu\varphi_\nu(\bar{z}_0) = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, k,$$

$$y_i^*[\dot{x}_i(\tau_i) - A_i\dot{x}_{i-1}(\tau_i)] = \sum_{\nu=0}^{k} \lambda_\nu[\partial_{\tau_i}\varphi_j(\bar{z}_0) + \partial_{y_i}\varphi_j(\bar{z}_0)\dot{x}_i(\tau_i)], \tag{18}$$

$$y_i^* = y_{i+1}^* A_{i+1}\Phi_i(\tau_{i+1}, \tau_i) + \sum_{\nu=0}^{k} \lambda_\nu\partial_{y_i}\varphi_\nu(\bar{z}_0), \tag{19}$$

$$\min_{\bar{v}_i \in V_i} y_i^* B_i v_i = y_i^* B_i v_i, \ y_{m+1}^* = 0, \ A_{m+1} = I, \qquad i = 0, 1, \ldots, m. \tag{20}$$

Заметим, что условия (18), (19) можно переписать иначе, используя функцию Лагранжа (17), а именно

$$\begin{aligned} y_i^*[\dot{x}_i(\tau_i) - A_i\dot{x}_{i-1}(\tau_i)] &= \partial_{\tau_i}\mathscr{L}(\bar{z}_0, \Lambda) + \partial_{y_i}\mathscr{L}(\bar{z}_0, \Lambda)\dot{x}_i(\tau_i), \\ y_i^* &= y_{i+1}^* A_{i+1}\Phi_i(\tau_{i+1}, \tau_i) + \partial_{y_i}\mathscr{L}(\bar{z}_0, \Lambda). \end{aligned} \tag{21}$$

Перейдем теперь к рассмотрению некоторых частных случаев, представляющих практический интерес.

6. Случай $A_i = I$, $B_i = 0$, $i = 0, \ldots, m$. Необходимые условия экстремума имеют вид

$$\lambda_j \geqslant 0, \ j = 0, \ldots, k, \ \lambda_j\varphi_j(\bar{z}_0) = 0, \qquad j = 1, \ldots, k,$$

$$y_i^*[\dot{x}_i(\tau_i) - \dot{x}_{i-1}(\tau_i)] = \partial_{\tau_i}\mathscr{L}(\bar{z}_0, \Lambda) + \partial_{y_i}\mathscr{L}(\bar{z}_0, \Lambda)\dot{x}_i(\tau_i),$$

$$y_i^* = y_{i+1}^*\Phi_i(\tau_{i+1}, \tau_i) + \partial_{y_i}\mathscr{L}(\bar{z}_0, \Lambda),$$

$$y_{m+1}^* = 0, \qquad i = 0, \ldots, m.$$

7. Случай фиксированного τ_i. Предположим, что при некотором $i \geqslant 0$ момент импульсного воздействия τ_i зафиксирован. Так как $\delta\tau_i = 0$, то из соотношения (9) следует, что при вычислении сопряженного конуса коэффициент при δr_i можно положить равным нулю. Таким образом, в соотношениях (18) i-е ограничение будет отсутствовать.

8. Случай явной зависимости целевых функционалов от импульсного воздействия. Изменим задачу (5) следующим образом:

$$\begin{gathered} \min \varphi_0(\tau_0, \ldots, \tau_m, x_0(\tau_0), \ldots, x_m(\tau_m), v_0, \ldots, v_m), \\ \varphi_j(\tau_0, \ldots, \tau_m, x_0(\tau_0), \ldots, x_m(\tau_m), v_0, \ldots, v_m) \leqslant 0, \\ v_i \in V_i, \qquad j = 1, \ldots, k, \end{gathered} \tag{22}$$

что повлечет за собой изменение функций $h_j(\bar{z})$. Аналогом теоремы 3 является следующий результат.

Теорема 4. *Если $z_0 \in M$ является решением задачи* (22), *то найдутся векторы $y_i^* \in R^{n_i^*}$ и не все равные нулю числа λ_ν такие, что*

$$\lambda_\nu \geqslant 0,\ \nu = 0, \dots, k,\ \lambda_\nu \varphi_\nu(\bar{z}_0) = 0, \qquad \nu = 1, \dots, k,$$

$$y_i^* [\dot{x}_i(\tau_i) - A_i \dot{x}_{i-1}(\tau_i)] = \partial_{\tau_i} \mathscr{L}(\bar{z}_0, \Lambda) + \partial_{y_i} \mathscr{L}(\bar{z}_0, \Lambda) \dot{x}_i(\tau_i),$$

$$y_i^* = y_{i+1}^* A_{i+1} \Phi_i(\tau_{i+1}, \tau_i) + \partial_{y_i} \mathscr{L}(\bar{z}_0, \Lambda),$$

$$\min_{\bar{v}_i \in V_i} \{y_i^* B_i \bar{v}_i + \partial_{v_i} \mathscr{L}(\bar{z}_0, \Lambda) \bar{v}_i\} = y_i^* B_i v_i + \partial_{v_i} \mathscr{L}(\bar{z}_0, \Lambda) v_i,$$

$$y_{m+1}^* = 0, \quad A_{m+1} = I, \qquad i = 0, \dots, m.$$

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3.

9. Замечания об использовании дополнительных параметров. Пусть системы дифференциальных уравнений в соотношениях (1) имеют вид

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_i, \theta_i),\ \theta_i \in \Theta_i, \qquad i = 0, \dots, m, \tag{23}$$

где Θ_i есть выпуклые множества в R^{p_i}. Условия стыковки (2) сохраняются. Соотношения (5) имеют вид

$$\begin{gathered} \min g_0(\tau_0, \dots, \tau_m, x_0(\tau_0), \dots, x_m(\tau_m), \xi_0, \dots, \xi_m), \\ g_j(\tau_0, \dots, \tau_m, x_0(\tau_0), \dots, x_m(\tau_m), \xi_0, \dots, \xi_m) \leqslant 0, \\ \xi_i \in \Theta_i,\ v_i \in V_i, \qquad i = 0, \dots, m,\ j = 1, \dots, k. \end{gathered} \tag{24}$$

Решение подобной измененной задачи может быть реализовано с помощью построенной схемы. Отметим, что функции $g_i(\tau_0, \dots, \tau_m, y_0, \dots, y_m, \theta_0, \dots, \theta_m)$, $j = 1, \dots, k$, являются непрерывно дифференцируемыми функциями своих аргументов. Введем дополнительную координату $\dot{\theta}_i = 0$, $\theta_i(\tau_i) = D_i x_{i-1}(\tau_i) + C_i \theta_{i-1}(\tau_i) + I\xi_i$, где D_i, C_i — матрицы размерности $p_i \times n_{i-1}$ и $p_i \times p_{i-1}$ соответственно. Окончательно имеем

$$\begin{gathered} \dot{x}_i = f_i(t, x_i, \theta_i),\ \dot{\theta}_i = 0, \\ x_i(\tau_i) = A_i x_{i-1}(\tau_i) + B_i v_i, \qquad v_i \in V_i, \\ \theta_i(\tau_i) = D_i x_{i-1}(\tau_i) + C_i \theta_{i-1}(\tau_i) + I\xi_i. \end{gathered} \tag{25}$$

Если выбраны моменты τ_i, векторы v_i и ξ_i, то траектория движения $x_i(t)$ на каждом из отрезков определена однозначно. Необходимые условия экстремума для задачи (24), (25) можно сформулировать так.

Теорема 5. *Если точка $Y = (\tau_0, \dots, \tau_m, x_0(\tau_0), \dots, x_m(\tau_m), \xi_0, \dots, \xi_m)$ является решением задачи* (24), *то найдутся векторы (y_i^*, ψ_i^*), $y_i^* \in R^{n_i^*}$, $\psi_i^* \in R^{p_i^*}$, $i = 0, \dots, m$, и не все равные нулю числа λ_j такие, что $\lambda_j \geqslant 0$, $j = 0, \dots, k$, $\lambda_j g_j(Y) = 0$, $j = 1, \dots, k$,*

$$-\psi_i^* D_i \dot{x}_{i-1}(\tau_i) + y_i^* [\dot{x}_i(\tau_i) - A_i \dot{x}_{i-1}(\tau_i)] = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j [\partial_{\tau_i} g_j(Y) + \partial_{y_i} g_j(Y) \dot{x}_i(\tau_i)],$$

$$y_i^* = [y_{i+1}^* A_{i+1} + \psi_{i+1}^* D_{i+1}] \Phi_i(\tau_{i+1}, \tau_i) + \sum_{j=0}^{k} \lambda_j \partial_{y_i} g_j(Y),$$

$$\psi_i^* = \psi_{i+1}^* C_{i+1} + [y_{i+1}^* A_{i+1} + \psi_{i+1}^* D_{i+1}] \times$$

$$\times \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Phi_i(\tau_{i+1}, s)\, \partial_{\theta_i} f_i(s, x_i(s), \theta_i)\, ds + \sum_{j=0}^{k} \lambda_j \partial_{\xi_i} g_j(Y)\},$$

$$\min_{\bar{v}_i \in V_i, \bar{\xi}_i \in \Theta_i} [y_i^* B_i \bar{v}_i + \psi_i^* \bar{\xi}_i] = [y_i^* B_i v_i + \psi_i^* \xi_i],$$

$$y_{m+1}^* = 0, \quad \psi_{m+1}^* = 0, \quad A_{m+1} = I, \qquad i = 0, \ldots, m.$$

Применив к задаче (25) теорему 3, можно убедиться в справедливости данной теоремы.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев : Вища шк., 1987.— 280 с.
2. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. — М. : Наука, 1974.— 480 с.
3. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума.— М. : Наука, 1982.— 141 с.
4. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М. : Наука, 1980. — 318 с.
5. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1970.— 720 с.

Киев. ун-т

Получено 19.10.88