УДК 517

И. Д. Ольшанецкий

О формуле Хинчина для компактных гипергрупп

В данной статье исследуется вопрос о существовании представления типа Хинчина для вероятностных мер на коммутативной компактной гипергруппе. Подобные представления в случае вещественной оси, коммутативной локально компактной группы, обобщенной сверточной алгебры Урбаника приведены в [1—3].

Пусть K — компактное пространство, M_p — пространство вероятностных мер на K с топологией слабой сходимости. Вероятностную меру, сосредоточенную в точке $x \in K$, обозначим δ_x. K называется гипергруппой, если выполняются следующие аксиомы [4, 5]:

А1. Существует непрерывное отображение $(x, y) \to \delta_x * \delta_y$ из $K \times K$ в M_p, удовлетворяющее равенству $\delta_x * (\delta_y * \delta_z) = (\delta_x * \delta_y) * \delta_z$.

А2. Для любых $x, y \in K$ множество $\operatorname{supp}(\delta_x * \delta_y)$ компактно.

А3. Существует гомоморфизм $x \to x^-$ из K в K такой, что для всех $x, y \in K$ выполняется $x = x^{--}$ и $(\delta_x * \delta_y)^- = \delta_{y^-} * \delta_{x^-}$.

*А*4. Существует элемент $e \in K$ такой, что для всех $x \in K$ $\delta_e * \delta_x = \delta_x * \delta_e = \delta_x$.

А5. Для любых $x, y \in K$ включение $e \in \operatorname{supp}(\delta_x * \delta_y)$ справедливо тогда и только тогда, когда $y = x^-$.

А6. Отображение $(x, y) \to \operatorname{supp}(\delta_x * \delta_y)$ из $K \times K$ в пространство компактных подмножеств K с топологией Майкла [4, с. 11] является непрерывным. Операцию $*$ — свертку — предполагаем коммутативной.

Обозначим через $\hat{K}$ пространство характеров гипергруппы K [4,5], являющееся счетным в случае компактного K, а через $G = \{x \in K \mid \delta_x * \delta_{x^-} = \delta_e\}$ — максимальную подгруппу гипергруппы K [4]. Обозначим также $L = \{\delta_x \mid x \in G\} \subset M_p$

Зафиксируем некоторую меру $\mu \in M_p$ такую, что $\hat{\mu}(\chi) \neq 0$ для любого $\chi \in \hat{K}$. Под преобразованием Фурье $\hat{\mu}$ меры μ понимается $\hat{\mu}(\chi) = \int\limits_K \overline{\chi(x)}\, d\mu(x)$.

Пусть $\{\chi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность всех характеров гипергруппы K. Поскольку числа $\ln|\hat{\mu}(\chi_i)|$, $i = 1, 2, \ldots$, конечны, существует последовательность положительных чисел $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ такая, что

$$\Delta(\mu) = -\sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \ln|\hat{\mu}(\chi_i)| < \infty. \tag{1}$$

Последовательность $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ зафиксируем.

Меру $\alpha \in M_p$ назовем делителем меры μ, если $\mu = \alpha * \beta$, где $\beta \in M_p$. Множество делителей меры μ обозначим $D(\mu)$.

Лемма 1. *Меры из* $D(\mu)$ *обладают следующими свойствами:*

1) $0 \leqslant \Delta(\alpha) \leqslant \Delta(\mu) < \infty$;
2) $\Delta(\alpha * \beta) = \Delta(\alpha) + \Delta(\beta)$;
3) *Если* $\nu_n \to \nu$, *то* $\Delta(\nu_n) \to \Delta(\nu)$ *при* $n \to \infty$;
4) $\Delta(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \delta_x$, $x \in G$.

Доказательство. Свойства 1—3 очевидны. Докажем свойство 4. Отметим сначала, что если $\alpha \in L$, то $\alpha, \alpha^- \in D(\mu)$, так как μ можно представить в виде $\mu = (\mu * \alpha) * \alpha^- = (\mu * \alpha^-) * \alpha$. Здесь и далее для $\nu \in M_p$ под ν^- понимается мера из M_p такая, что $\nu^-(A) = \nu(A^-)$ для всякого борелевского $A \subset K$ $(A^- = \{x^- \mid x \in A\})$. Поскольку $0 = \Delta(\delta_e) = \Delta(\alpha) + \Delta(\alpha^-)$ для $\alpha \in L$, то $\Delta(\alpha) = 0$. Пусть $\Delta(\alpha) = 0$, тогда $|\hat{\alpha}(\chi)| = 1$ для любого $\chi \in \hat{K}$. В силу равенства $\hat{\alpha^-}(\chi) = \overline{\hat{\alpha}}(\chi)$ имеем $\widehat{\alpha * \alpha^-} = 1$, откуда $\alpha * \alpha^- = \delta_e$ (поскольку мера и ее Фурье-образ находятся во взаимнооднoзначном соответствии [5, с. 491]). Из включения $(\operatorname{supp}\alpha)*(\operatorname{supp}\alpha^-)\subseteq\{e\}$ [4, с. 15] получим $\alpha\in L$. Действительно, если $\operatorname{supp}\alpha$ состоит более, чем из одной точки, то существуют $x, y\in\operatorname{supp}\alpha$ такие, что $x\neq y$. Но тогда $x*y^- = \operatorname{supp}(\delta_x*\delta_{y^-})\subseteq(\operatorname{supp}\alpha)*(\operatorname{supp}\alpha^-)\subseteq\{e\}$, а с другой стороны $x*y^-\cap\{e\}=\varnothing$.

Функционал Δ, заданный формулой (1), является аналогом соответствующих функционалов из [1—3].

Определение. *Мера $\nu\in M_p$ называется неразложимой, если $\nu\notin L$ и $D(\nu)=\{\nu*\alpha\mid\alpha\in L\}\cup L$.*

Отметим, что в случае, когда K — группа, приведенное определение совпадает с определением неразложимости меры на группе [2, с. 118].

В дальнейшем будем предполагать, что $D(\mu)$ содержит хотя бы одну неразложимую меру.

Теорема. *Пусть K — коммутативная компактная гипергруппа, а вероятностная мера μ такова, что $\hat\mu(\chi)\neq 0$ для любого $\chi\in\hat K$. Тогда для меры μ справедливо разложение*

$$\mu=\gamma_1*\gamma_2, \tag{2}$$

где γ_1 — не более, чем счетная свертка неразложимых мер, а $D(\gamma_2)$ не содержит неразложимых мер.

Доказательство. Обозначим множество неразложимых делителей меры μ через B_1. Пусть $b_1=\sup\{\Delta(\nu)\mid\nu\in B_1\}$. Очевидно, $b_1\leqslant\Delta(\mu)$. Выберем $\nu_1\in B_1$ так, чтобы $\Delta(\nu_1)\geqslant b_1/2$. Поскольку $\nu_1\in D(\mu)$, то $\mu=\nu_1*\eta_1$, где $\eta_1\in D(\mu)$. Если $D(\eta_1)$ не содержит неразложимых мер, то требуемое разложение получено и доказательство закончено. В противном случае проведем для η_1 построение, аналогичное проведенному для μ. Получим $\mu=\nu_1*\nu_2*\eta_2$, где $\eta_2\in D(\mu)$, $\nu_2\in B_2$ — множеству неразложимых делителей меры η_1, причем $\Delta(\nu_2)\geqslant b_2/2$, а $b_2=\sup\{\Delta(\nu)\mid\nu\in B_2\}$. Продолжая дальше, мы на некотором шаге получаем соотношение

$$\mu=\left(\mathop{*}_{j=1}^{k}\nu_\iota\right)*\eta_k, \tag{3}$$

где все ν_j, $j=\overline{1, k}$, являются неразложимыми делителями меры μ, а η не имеет неразложимых делителей (и доказательство будет закончено), либо получим бесконечную последовательность соотношений типа (3), где $\Delta(\nu_j)\geqslant b_j/2$, $b_j=\sup\{\Delta(\nu)\mid\nu\in B_j\}$, а $B_j\neq\varnothing$ — множество неразложимых делителей меры η_{j-1}, $j=1, 2, \dots$, (здесь $\eta_0=\mu$). Рассмотрим последовательность $\{\zeta_k=\nu_1*\dots*\nu_k\}_{k=1}^\infty$. В силу слабой компактности M_p, у $\{\zeta_k\}_{k=1}^\infty$ существует некоторая предельная точка γ_1.

Лемма 2. *Если ζ' и ζ'' — предельные точки последовательности $\{\zeta_k\}_{k=1}^\infty$, то $\zeta'=\zeta'*\delta_x$, $x\in G$.*

Доказательство. Из формулы (3) с учетом свойств функционала Δ имеем $\Delta(\mu)=\sum_{j=1}^{k}\Delta(\nu_j)+\Delta(\eta_k)\geqslant\sum_{j=1}^{k}\Delta(\nu_j)$, откуда

$$d=\sum_{j=1}^{\infty}\Delta(\nu_j)\leqslant\Delta(\mu)<\infty. \tag{4}$$

Таким образом, $\Delta(\zeta')=\Delta(\zeta'')=d$.

Пусть $\zeta_{n_k}\to\zeta'$, $\zeta_{m_k}\to\zeta''$ при $k\to\infty$. Выберем n_k и m_k таким образом, чтобы $n_k>m_k$, $k=1, 2, \dots$. Тогда $\zeta_{n_k}=\zeta_{m_k}*\nu_{m_k+1}*\dots*\nu_{n_k}$, $k=1, 2, \dots$, откуда после предельного перехода получим $\zeta'=\zeta''*\alpha$, причем $\Delta(\alpha)=\Delta(\zeta')-\Delta(\zeta'')=0$, т. е. $\alpha\in L$, что и требовалось доказать. Здесь α — предельная точка последовательности $\{\nu_{m_k+1}*\dots*\nu_{n_k}\}_{k=1}^\infty$.

Лемма 3. *Пусть последовательность $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ мер из M_p такова, что все ее предельные точки содержатся в множестве $\bigcup_{x\in G}\delta_x*\{\gamma\}$,* где *$\gamma$ — некоторая предельная точка последовательности $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$. Тогда сущест-*

вует последовательность $\{x_k \mid x_k \in G\}_{k=1}^{\infty}$ *такая, что последовательность* $\{\alpha'_k = \alpha_k * \delta_{x_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится к* γ.

Доказательство. Рассмотрим счетный набор окрестностей меры $\boldsymbol{\gamma}$:

$$V_m = \Big\{\nu \in M_p \Big| \sum_{j=1}^{m} \Big| \int_K \overline{\chi_j(x)}\, d\nu(x) - \int_K \overline{\chi_j(x)}\, d\gamma(x) \Big| < \frac{1}{m}\Big\}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Очевидно $V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \ldots$. Отметим, что $\bigcap_{m=1}^{\infty} V_m = \{\gamma\}$. Действительно, если существует $\tilde{\gamma} \neq \gamma$ и $\tilde{\gamma} \in \bigcap_{m=1}^{\infty} V_m$, то $\hat{\tilde{\gamma}}(\chi_j) = \hat{\gamma}(\chi_j)$ для любого $\chi_j \in \hat{K}$, $j = 1, 2, \ldots$, что противоречит взаимной однозначности преобразования Фурье. Возьмем некоторую окрестность V_m. Тогда $\bigcup_{x \in G} \delta_x * V_m$ является открытым покрытием компактного множества $\bigcup_{x \in G} \delta_x * \{\gamma\}$. Выберем конечное подпокрытие $\delta_{x_{1m}} * V_m, \ldots, \delta_{x_{l_m m}} * V_m$, состоящее из l_m множеств. Вне этого покрытия останется конечное число элементов последовательности $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ (в противном случае будет существовать предельная точка, не входящая в $\bigcup_{x \in G} \delta_x * \{\gamma\}$). Таким образом, существует N_m такое, что для любого $k > N_m$ выполняется $\alpha_k \in \bigcup_{j=1}^{l_m} \delta_{x_{jm}} * V_m$ и поэтому существует j_k, $1 \leqslant j_k \leqslant l_m$, такое, что $\alpha_k \in \delta_{x_{j_k m}} * V_m$, откуда $\alpha_k * \delta_{x^{-}_{j_k m}} \in V_m$. Пусть $k > N_1$. Тогда существует некоторый номер m такой, что $N_m < k \leqslant N_{m+1}$. Положим $\alpha'_k = \alpha_k * \delta_{x^{-}_{j_k m}}$. Полученная последовательность $\{\alpha'_k\}_{k=1}^{\infty}$ является искомой. Действительно, зафиксируем произвольный характер χ_i, $i = 1, 2, \ldots$, и рассмотрим числовую последовательность $\{\hat{\alpha}'_k(\chi_i)\}_{k=1}^{\infty}$. Для любого $\varepsilon \in (0; 1)$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для любого $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|\hat{\alpha}'_n(\chi_i) - \hat{\gamma}(\chi_i)| < \varepsilon$. Легко видеть, что $N(\varepsilon) > \max\Big\{\Big[\frac{1}{\varepsilon}\Big] + 1, i\Big\}$. Таким образом, $\lim_{k \to \infty} \hat{\alpha}'_k(\chi_i) = \hat{\gamma}(\chi_i)$ на каждом характере χ_i, $i = 1, 2, \ldots$, откуда следует $\alpha'_k \to \gamma$ при $k \to \infty$ [5, с. 492 — 493].

В силу лемм 2 и 3 существует последовательность $\{\delta_{x_k} \mid x_k \in G\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что последовательность $\{\nu_1 * \ldots * \nu_k * \delta_{x_k}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к γ_1 (поскольку конечное число членов последовательности не влияет на сходимость, в обозначениях леммы 3 считаем $N_1 = 0$). Перевыбрав соответствующим образом меры ν_k (заменив ν_k на $\nu'_k = \nu_k * \delta_{\overline{x_{k-1}}} * \delta_{x_k}$, $k = 2, 3, \ldots$), получим $\nu'_1 * \ldots * \nu'_k \to \gamma_1$ при $k \to \infty$. При этом меры η_k будут сходиться к некоторой мере γ_2. Докажем, что γ_2 не имеет неразложимых делителей. Предположим противное, пусть β — неразложимый делитель меры γ_2. Тогда существует $\gamma'_2 \in M_p$, так что $\gamma_2 = \beta * \gamma'_2$. Отметим также, что для любого $j = 1, 2, \ldots$ мера γ_1 делится на $\nu'_1 * \ldots * \nu'_j$. В самом деле, при $k > j$ имеем $\zeta_k = \nu'_1 * \ldots * \nu'_j * (\nu'_{j+1} * \ldots * \nu'_k)$, откуда, переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем $\gamma_1 = \nu'_1 * \ldots * \nu'_j * \gamma_{1j}$. Здесь γ_{1j} — предельная точка последовательности $\{\nu'_{j+1} * \ldots * \nu'_k\}_{k=j+1}^{\infty}$, причем $\gamma_{1j} = \dfrac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\nu}'_1 \ldots \hat{\nu}'_j}$, т. е. γ_{1j} определяется однозначно.

Таким образом $\mu = \nu_1' * \ldots \nu_k' * \eta_k = \gamma_1 * \gamma_2 = \nu_1' * \ldots * \gamma_{1k} * \beta * \gamma_2$, откуда, применив преобразование Фурье, получим $\hat{\eta}_k = \hat{\beta}\hat{\gamma}_{1k}\hat{\gamma}_2'$, т. е. η_k делится на β для любого $k = 1, 2, \ldots$. В силу проведенного построения разложения меры μ имеем $\Delta(\beta) \leqslant b_k \leqslant 2\Delta(\nu_k) \to 0$ при $k \to \infty$ (из сходимости ряда (4)). Отсюда $\Delta(\beta) = 0$, $\beta \in L$ и γ_2 не имеет неразложимых делителей. Теорема доказана.

1. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложение случайных величин и векторов.— М.: Наука, 1972.— 480 с.
2. *Партасарати К. Р., Ранга-Рао Р., Варадхан С. Р. С.* Распределения вероятностей на локально компактных абелевых группах // Математика: Сб. пер.— 1965.— **9**, № 2.— С. 115—146.
3. *Bingham N. H.* Factorization theory and domains of attraction for generalized convolution algebras // Proc. London Math. Soc.— 1971.— **23**, N 1.— P. 16—30.
4. *Jewett R. I.* Spaces with an abstract convolution of measures // Adv. Math.— 1975.— **18**, N 1.— P. 1—101.
5. *Heyer H.* Probability theory on hypergroups: a survey // Lect. Notes Math.—1984.—**1064**.— P. 481—550.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 25.01.88