УДК 519.41/47

Л. М. КЛЯЦКАЯ, канд. физ.-мат. наук (Черкас. пед. ин-т)

Об одном классе метабелевых групп с дополняемыми подгруппами

Изучаются метабелевы периодические группы, в которых дополняемы все сервантные подгруппы каждой максимальной абелевой подгруппы. Приводится описание произвольных групп такого рода (теорема 2).

Вивчаються метабелеві періодичні групи, в яких доповнювані всі сервантні підгрупи кожної максимальної абелевої підгрупи. Наведено опис довільних груп такого роду (теорема 2).

Строение абелевых групп, все сервантные подгруппы которых дополняемы, изучено С. Н. Черниковым [1]. В работе [2] он обратил внимание на возможность распространения результатов работы [1] на произвольные (не обязательно абелевы) группы с помощью следующего условия дополняемости:

(СР): в группе дополняемы все сервантные подгруппы каждой ее максимальной абелевой подгруппы.

Цель настоящей работы — описать строение метабелевых периодических CP-групп. Предположение о метабелевости группы равносильно существованию в ней нормальной максимальной абелевой подгруппы (лемма 1), следовательно, это предположение является достаточно общим. Его естественность подтверждается, в частности, тем, что метабелевыми являются все конечные CP-группы (теорема 1).

Как оказалось (теорема 2), периодические метабелевы CP-группы разлагаются в полупрямое произведение двух абелевых CP-групп. Напомним, что в силу результатов работы [1] периодические абелевы CP-группы могут быть охарактеризованы как такие периодические абелевы группы, примарные компоненты которых разложимы в прямое произведение полной и ограниченной групп.

Для групп без кручения условие (CP) равносильно условию (CL) [3], поэтому описание строения метабелевых CP-групп без кручения можно извлечь из теоремы 3.3 работы [3]. Случай смешанных CP-групп наиболее сложен, некоторая информация о них получена в [4].

Лемма 1. *Если A — нормальная максимальная абелева подгруппа периодической группы G и все сервантные подгруппы из A дополняемы в G, то G обладает полупрямым разложением $G = A \leftthreetimes B$, в котором A — CP-группа, разложимая в прямое произведение*

$$A = \prod_{\alpha} A_\alpha \tag{1}$$

примарных циклических или квазициклических подгрупп A_α, $A_\alpha \lhd G$, подгруппа B абелева. Если, кроме того, G — CP-группа, то и подгруппа B является CP-группой и силовские p-подгруппы группы G абелевы для всех простых p.

Доказательство. Существование прямого разложения подгруппы A устанавливается с помощью трансфинитной индукции последовательным выделением подгрупп A_α. Пусть для всех порядковых чисел α, меньших некоторого β, построены примарные циклические или квазициклические подгруппы A_α, порождающие прямое произведение $\prod\limits_{\alpha<\beta} A_\alpha$, которое является сервантной подгруппой в A. Покажем как строится подгруппа A_β. Подгруппа $\prod\limits_{\alpha<\beta} A_\alpha$ по условию дополняема в $G: G = \left(\prod\limits_{\alpha<\beta} A_\alpha\right) K, \left(\prod\limits_{\alpha<\beta} A_\alpha\right) \cap \cap K = 1$. Отсюда вытекает, что $A = \left(\prod\limits_{\alpha<\beta} A_\alpha\right) \times (A \cap K)$, $A \cap K \lhd G$. Представим подгруппу $A \cap K$ в виде $A \cap K = P \times U$, где P — циклическая или квазициклическая подгруппа, и дополним U в группе $G: G = UK_1$, $U \cap \cap K_1 = 1$. Тогда $A \cap K = P_1 \times U$, $P_1 = A \cap K \cap K_1 \lhd G$, $P_1 \simeq P$. Подгруппу P_1 можно принять за A_β. Выделенные описанным способом подгруппы A_α определяют требуемсе разложение (1) подгруппы A.

Далее, так как A_α — подгруппа ранга 1 и $A_\alpha \lhd G$, то фактор-группа $G/C_G(A_\alpha)$ абелева, поэтому и фактор-группа $G/\bigcap\limits_{\alpha} C_G(A_\alpha) = G/C_G(A)$. Ввиду максимальности A как абелевой подгруппы A совпадает с $G_G(A)$, следовательно, фактор-группа G/A, а потому и изоморфная ей подгруппа B, абелевы.

Пусть G — CP-группа. Тогда ее максимальная абелева подгруппа $C_A(B) \times B$ сама является CP-группой, а потому CP-группой будет, конечно, и подгруппа B.

Возьмем в некотором множителе A_α его элемент a простого порядка p и положим $D = C_B(a)$, $C = C_A(D)$. Так как подгруппа B абелева, то $C \lhd G$, и $C = \prod\limits_{\alpha} C_\alpha$, где $C_\alpha = C \cap A_\alpha \lhd G$. Подгруппа C_α как сервантная подгруппа максимальной абелевой подгруппы $C \times D$ дополняема в G, а поэтому и в содержащей ее подгруппе A_α, но это ввиду соотношения $a \in C_\alpha$ возможно лишь в случае $C_\alpha = A_\alpha$. Следовательно, $A_\alpha \leqslant C = C_A(D)$ и, значит, $D = C_B(a) \leqslant C_B(A_\alpha)$, $C_B(a) = C_B(A_\alpha)$.

Отсюда вытекает, что силовская p-подгруппа B_p из B, централизующая элемент a, должна централизовать и весь множитель A_α. Тем самым установлено, что B_p централизует силовскую p-подгруппу A_p из A, т. е. подгруппа $A_p \times B_p$ абелева. Это влечет абелевость всех силовских p-подгрупп группы G. Лемма доказана.

Отметим дополнительно, что подгруппа B из условия леммы 1 не может иметь неединичных полных подгрупп, так как группы автоморфизмов групп ранга 1 финитно аппроксимируемы.

Замечание. Установленное в процессе доказательства леммы соотношение $C_B(a) = C_B(A_\alpha)$ означает, что произвольный элемент из B, централизующий элемент простого порядка подгруппы A_α, должен централизовать и всю подгруппу A_α.

Теорема 1. *Конечная* CP-*группа метабелева и сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть G—конечная CP-группа, G_p—ее силовская p-подгруппа, A — максимальная абелева нормальная подгруппа из G_p. Тогда, как известно, A — максимальная абелева подгруппа в G_p. Включим A в некоторую максимальную абелеву подгруппу K группы G и покажем, что A совпадает с силовской p-подгруппой K_p из K. Действительно, так как $\langle G_p, K_p\rangle = N_G(A)$, то $K_p^x \leqslant G_p$ при некотором $x \in N_G(A)$. Следовательно, $A = A^x \leqslant K_p^x \leqslant G_p$, откуда ввиду максимальности A как абелевой подгруппы из G_p вытекает соотношение $A = A^x = K_p^x$, означающее, что $A = K_p$.

Так как G — CP-группа, то в силу доказанного соотношения сервантные подгруппы группы A дополняемы в G, а следовательно, они дополняемы в G_p. Тогда по лемме 1 G_p разложима в полупрямое произведение $G_p = A \leftthreetimes B$ с абелевой подгруппой B, причем A разлагается в прямое произведение циклических подгрупп, нормальных в G_p. Отсюда, в частности, вытекает, что все элементы порядка p подгруппы A входят в центр $Z(G_p)$ подгруппы G_p и что $Z(G_p) \times B$ — максимальная абелева подгруппа из G_p, причем $Z(G_p) \leqslant A$.

Включим $Z(G_p)\times B$ в некоторую максимальную абелеву подгруппу L группы G и покажем, что $Z(G_p)\times B$ совпадает с силовской p-подгруппой L_p из L. Действительно, так как $\langle G_p, L_p\rangle \leqslant C_G(Z(G_p))$, то $L_p^x \leqslant G_p$ при некотором $x \in C_G(Z(G_p))$. Следовательно,

$$(Z(G_p)\times B)^x = Z(G_p)\times B^x \leqslant L_p^x \leqslant G_p. \qquad (2)$$

Поскольку $Z(G_p) \cap B = 1$ и $x \in C_G(Z(G_p))$, то $Z(G_p) \cap B^x = 1$ и тогда, ввиду того, что все элементы порядка p из A входят в $Z(G_p)$, приходим к соотношению $A \cap B^x = 1$. Равенство порядков подгрупп B и B^x показывает, что $G_p = A \leftthreetimes B^x$. Значит, $Z(G_p)\times B^x$ — максимальная абелева подгруппа из G_p и вследствие соотношения (2) получаем $Z(G_p)\times B = L_p$. Поэтому, в частности, $Z(G_p)$ — сервантная подгруппа в L.

По определению CP-группы сервантные подгруппы максимальной абелевой подгруппы L группы G дополняемы в G, значит, $Z(G_p)$ дополняема в G, а потому и в G_p. Дополняемость центра p-группы возможна, как известно, лишь в случае $G_p = Z(G_p)$. Таким образом, силовские p-подгруппы группы G абелевы для каждого простого p, а так как, кроме того, их циклические сервантные подгруппы дополняемы в G по определению CP-группы, то, как показано в [4], G — метабелева сверхразрешимая группа. Теорема доказана.

Теорема 2. *Периодическая метабелева группа G тогда и только тогда является* CP-*группой, когда она разложима в полупрямое произведение $G = A \leftthreetimes B$ двух абелевых* CP-*групп A и B, причем*

1) *подгруппа A является прямым произведением $A = \prod\limits_\alpha A_\alpha$ некоторого множества нормальных в G примарных циклических или квазициклических подгрупп A_α;*

2) *силовские p-подгруппы группы G абелевы для всех простых p;*

3) *для любого набора подгрупп A_α централизатор их произведения в множителе B сервантен в B.*

Доказательство. Пусть A — максимальная абелева подгруппа группы G, содержащая ее коммутант. Из леммы вытекает существование требуемого в теореме разложения, удовлетворяющего условиям 1, 2. Если C_1 — централизатор в подгруппе B некоторого набора подгрупп A_α и $C_A(C_1) = C_2$, то $C_2 \times C_1$ — максимальная абелева подгруппа группы G. Подгруппа C_1 сервантна в $C_2 \times C_1$ и потому дополняема в СР-группе G, а значит, и в содержащей ее подгруппе B. Следовательно, C_1 сервантна в B и тем самым условие 3 теоремы также выполняется. Таким образом, необходимость условий теоремы доказана, докажем их достаточность.

Пусть G — группа, имеющая строение, описанное в теореме, M — ее максимальная абелева подгруппа. Введем обозначения

$$M_A = A \cap M, \quad M^B = AM \cap B, \tag{3}$$

M^B — проекция M в B при естественном эпиморфизме $G \to B$. Докажем, что M_A является прямым произведением некоторого множества подгрупп A_α. Действительно, так как M — максимальная абелева подгруппа, то $C_A(M) \leqslant M$, значит, $C_A(M^B) = C_A(M) = A \cap M$, и, как следует из условия теоремы, выполняется соотношение

$$C_A(M^B) = \prod_\alpha (A_\alpha \cap C_A(M^B)).$$

Если при этом $A_\alpha \cap C_A(M^B) \neq 1$ для некоторого α, то M^B централизует весь множитель A_α (см. замечание к лемме) и, следовательно, $A_\alpha \leqslant C_A(M^B) = C_A(M)$. Этим доказано, что $C_A(M) = A \cap M = M_A$ является прямым произведением некоторого множества подгрупп A_α и потому

$$A = M_A \times A_0, \quad A_0 \lhd G, \tag{4}$$

где A_0 — также произведение некоторого множества подгрупп A_α.

Докажем теперь, что подгруппа M^B сервантна в B. Для этого достаточно установить, что для любого p-элемента b из M^B (p — произвольное простое число) найдется содержащая этот элемент подгруппа из M^B, сервантная в B, т. е. высота элемента b в подгруппе M^B и в группе B одинакова.

Заметим сначала, что каждый элемент $g \in G$ может быть однозначно представлен в виде произведения $g = \left(\prod\limits_\alpha a_\alpha(g)\right) b(g)$, где $a_\alpha(g) \in A_\alpha$, $b(g) \in B$. При этом для пары элементов g, g_1 группы G выполняется соотношение

$$a_\alpha(gg_1) = a_\alpha(g)\ b(g)\ a_\alpha(g_1)\ b(g)^{-1}, \quad b(gg_1) = b(g)\ b(g_1). \tag{5}$$

Так как $b \in M^B$, то в подгруппе M можно найти такой p-элемент $g \in M$, что $b = b(g)$. Некоторый сопряженный с g элемент $h = g^a$, $a \in A$, содержится в силовской p-подгруппе группы $A \leftthreetimes \langle b \rangle$, поэтому

$$a_\alpha(h) = 1, \tag{6}$$

если A_α — p'-группа, и, кроме того, $b = b(g) = b(h)$.

Обозначим через A' произведение всех тех A_α, для каждого из которых существует элемент $x = x(\alpha) \in M^a$, удовлетворяющий соотношению

$$a_\alpha(x) \neq 1. \tag{7}$$

Покажем, что b централизует A'. Действительно, если A_α — произвольный множитель, входящий в A', то в случае, когда A_α — p-подгруппа, элемент b централизует A_α ввиду условия теоремы. Если же A_α — p'-группа, то с учетом (5), (6) получаем

$$a_\alpha(hx) = a_\alpha(h)\ b(h)\ a_\alpha(x)\ b(h)^{-1} = ba_\alpha(x)\ b^{-1}, \tag{8}$$

$$a_\alpha(xh) = a_\alpha(x)\ b(x)\ a_\alpha(h)\ b(x)^{-1} = a_\alpha(x). \tag{9}$$

Элементы h, x содержатся в абелевой подгруппе M^a, поэтому, сравнивая (8), (9), получаем соотношение $a_\alpha(x) = ba_\alpha(x)\, b^{-1}$, означающее, что b централизует $a_\alpha(x)$. Так как $a_\alpha(x) \neq 1$ (см. (7)), то в силу замечания к лемме элемент b централизует множитель A_α. Таким образом, установлено, что b централизует подгруппу A', т. е. содержится в подгрупе $C_B(A')$, которая ввиду условия 3 теоремы, сервантна в B. Вместе с этим доказана сервантность подгруппы M^B в B, что влечет ее дополняемость в B:

$$B = M^B \times B. \tag{10}$$

Введем в рассмотрение подгруппу $N = M_A \times M^B$. С помощью (3), (4) получаем следующие соотношения, связывающие подгруппы N, M:

$$A_0N = A_0(M_A \times M^B) = AM^B = AM = (A_0 \times M_A)\, M = A_0M,$$
$$A_0 \cap N = A_0 \cap M = 1. \tag{11}$$

Поэтому, в частности, существует естественный изоморфизм M на N.

Пусть S — произвольная сервантная подгруппа из M, T — ее образ при этом изоморфизме, $T = A_0S \cap N$. Тогда $A_0S = A_0T$, T — сервантная подгруппа в N.

По определению N является прямым произведением двух подгрупп, являющихся прямыми множителями (см. (4), (10)) абелевых СР-групп, следовательно, N — сама СР-группа и поэтому ее сервантная подгруппа T выделяется в N прямым множителем. Более того, применяя теорему 6 из [1], видим, что подгруппа $N = M_A \times M^B$ обладает прямым разложением

$$N = T \times \bar{A} \times \bar{B}, \tag{12}$$

в котором $\bar{A} \leqslant M_A$, $\bar{B} \leqslant M^B$, $\bar{A} \lhd G$. С учетом соотношений (3), (10) — (12) получаем следующую цепочку равенств:

$$G = A \leftthreetimes B = A(M^B \times B_0) = (AM^B)\, B_0 = (AM)\, B_0 = (A_0M)\, B_0 =$$
$$= (A_0N)\, B_0 = (A_0(T \times \bar{A} \times \bar{B}))\, B_0 = ((A_0T)\,(\bar{A}\bar{B}))\, B_0 =$$
$$= ((A_0S)\,(\bar{A}\bar{B}))\, B_0 = (S\,(A_0\bar{A}\bar{B}))\, B_0 = S\,(A_0\bar{A}\bar{B}B_0).$$

Таким образом, $G = S\,(A_0\bar{A}\bar{B}B_0)$. Кроме того, непосредственно проверяется, что $S \cap (A_0\bar{A}\bar{B}B_0) = 1$. Следовательно, произвольная сервантная подгруппа S из M дополняема в группе G. Теорема доказана.

1. *Черников С. Н.* Группы с системами дополняемых подгрупп // Мат. сб.— 1954.— **35**, № 1.— С. 93—128.
2. *Черников С. Н.* Исследование групп с заданными свойствами подгрупп // Укр. мат. журн.— 1969.— **21**, № 2.— С. 193—209.
3. *Зайцев Д. И., Кляцкая Л. М.* Группы с некоторой системой дополняемых абелевых подгрупп // Группы с системами дополняемых подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1971.— С. 180—222.
4. *Кляцкая Л. М.* О группах с дополняемыми сервантными подгруппами // VIII Всесоюзн. симп. по теории групп: Тез. докл. (Сумы, 25—27 мая 1982 г.).— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1982.— С. 51—52.

Получено 21.01.91