УДК 517.944:519.46

Ю. А. МИТРОПОЛЬСКИЙ, акад.,
М. В. ШУЛЬГА, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Приближенная симметрия нелинейного уравнения теплопроводности

С использованием идеи асимптотических методов Крылова — Боголюбова — Митропольского исследована приближенная галилеева симметрия многомерного нелинейного уравнения теплопроводности.

З використанням ідеї асимптотичних методів Крилова — Боголюбова — Митропольского досліджена наближена галілеєва симетрія багатовимірного нелінійного рівняння теплопровідності.

Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_a}\left\{(1 + \varepsilon g(u))\frac{\partial u}{\partial x_a}\right\} = 0, \tag{1}$$

$u = u(x)$ — действительная гладкая функция $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in R(1) \times R(3)$, $g(u)$ — произвольная гладкая функция, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Известно [1], что уравнение (1) не инвариантно относительно группы Галилея $G(1, 3)$.

В настоящей работе, используя идеи асимптотических методов [2], исследована приближенная галилеева симметрия уравнения (1). Решения этого уравнения будем искать в виде

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots . \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1) и предполагая, что функция $g(u)$ в первом приближении (по ε) зависит только от u_0, u_1 ($g(u) = g(u_0, u_1)$), а во втором — $g(u) = g(u_0, u_1, u_2)$, приходим к следующей системе уравнений (после расщепления по степеням ε):

$$\varepsilon^0 : \frac{\partial u_0}{\partial t} + \Delta u_0 = 0\,(s_1), \tag{3}$$

$$\varepsilon^1 : \frac{\partial u_1}{\partial t} + \Delta u_1 + \frac{\partial}{\partial x_a}\left[g(u_0, u_1)\frac{\partial u_0}{\partial x_a}\right] = 0\,(s_2), \tag{4}$$

$$\varepsilon^2 : \frac{\partial u_2}{\partial t} + \Delta u_2 + \frac{\partial}{\partial x_a}\left[g(u_0, u_1, u_2)\frac{\partial u_1}{\partial x_a}\right] = 0\ (s_3), \tag{5}$$

. . . .

Приближенной симметрией уравнения (1) будем называть симметрию системы (3)—(5), аппроксимирующую уравнение (1). Симметрию системы (3), (4) — приближенной симметрией первого порядка уравнения (1), симметрию системы (3)—(5) — приближенной симметрией второго порядка уравнения (1). Приближенная симметрия нелинейного волнового уравнения в указанном смысле исследована в [3, 4].

© Ю. А. МИТРОПОЛЬСКИЙ, М. В. ШУЛЬГА, 1991

Итак, исследования приближенной галилеевской симметрии уравнения (1) сводится к описанию функций $g(u_0, u_1)$, $g(u_0, u_1, u_2)$, при которых система (3)—(5) инвариантна относительно группы Галилея $G(1, 3)$.

Теорема 1. *Уравнение* (1) *обладает галилеевской симметрией 1-го порядка, если* $g(u_0, u_1) = u_0^{-1}(2u_1 + C\ln u_0)$, C — *произвольная постоянная. Базисные элементы алгебры Галилея* $AG_1(1, 3) = \langle AG(1, 3), D\rangle$ *имеют вид*

$$P_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_a = (-i)\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_aP_b - x_bP_a,$$

$$G_a = x_0P_a + \frac{i}{2}x_au_0\frac{\partial}{\partial u_0} - \frac{i}{4}Cx_a\frac{\partial}{\partial u_1}, \tag{6}$$

$$D = 2x_0P_0 - x_aP_a, \quad a, b = \overline{1, 3}, \quad a \neq b.$$

Теорема 2. *Уравнение* (1) *обладает расширенной галилеевской симметрией 1-го порядка, если* $g(u_0, u_1) = 2u_1u_0^{-1}$. *Базисные элементы алгебры Галилея* $AG_2(1, 3) = \langle AG(1, 3), D, \Pi\rangle$ *имеют вид*

$$P_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_a = (-i)\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_aP_b - x_bP_a,$$

$$G_a = x_0P_a + \frac{i}{2}x_au_0\frac{\partial}{\partial u_0},$$

$$D = 2x_0P_0 - x_aP_a,$$

$$\Pi = x_0^2P_0 - x_0x_aP_a - \frac{3}{2}ix_0u_0\frac{\partial}{\partial u_0} - 3ix_0u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{i}{4}\vec{x}^2u_0\frac{\partial}{\partial u_0}, \tag{7}$$

$$I_1 = u_1\frac{\partial}{\partial u_1}, \quad I_2 = \frac{u_1}{u_0}\frac{\partial}{\partial u_1}, \quad a, b = \overline{1, 3}; \qquad a \neq b.$$

Доказательство теорем 1, 2. Необходимость. Доказательство проводим лиевским методом, согласно которому система (3), (4) инвариантна относительно оператора X вида

$$X = \xi^\mu(x, u)\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta^\nu(x, u)\frac{\partial}{\partial u_\nu}, \tag{8}$$

$$u = (u_0, u_1), \quad \mu = \overline{0, 3}, \quad \nu = 0, 1,$$

тогда, когда выполняется условие

$$\overset{2}{X}(s_1)\Big|_{\substack{s_1 = 0\\ s_2 = 0}} = 0, \tag{9}$$

$$\overset{2}{X}(s_2)\Big|_{\substack{s_1 = 0\\ s_2 = 0}} = 0, \tag{10}$$

где $\overset{2}{X}$ [5] — это второе продолжение оператора X:

$$\overset{2}{X} = \xi^\mu(x, u)\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta_\nu(x, u)\frac{\partial}{\partial u_\nu} + \zeta_\mu^\nu\frac{\partial}{\partial u_{\nu_\mu}} + \sigma_{\mu s}^\nu\frac{\partial}{\partial u_{\nu_{\mu s}}}. \tag{11}$$

При этом выражения для ζ_μ^ν и $\sigma_{\mu s}^\nu$ ($\mu = \overline{0, 3}$; $\nu = 0, 1$; $s = \overline{0, 3}$) имеют следующий вид:

$$\zeta_\mu^\nu = D_\mu(\eta^\nu) - u_{\nu_j}D_\mu(\xi^j),$$

$$\sigma_{\mu s}^\nu = \overset{1}{D}_\mu(\zeta_s^\nu) - u_{\nu_{ts}}\overset{1}{D}_\mu(\xi^t),$$

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} + u_{\lambda_\mu} \frac{\partial}{\partial u_\lambda},$$

$$\overset{\mathrm{I}}{D}_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} + u_{\lambda_\mu} \frac{\partial}{\partial u_\lambda} + u_{\lambda_{\mu j}} \frac{\partial}{\partial u_{\lambda j}}.$$

Учитывая (11), условия (9) — (10) переписываем в виде

$$\zeta_0^0 + \Delta\sigma^0 \Big|_{\substack{s_1=0\\ s_2=0}} = 0, \tag{12}$$

$$\zeta_0^1 + \Delta\sigma^1 + 2\zeta_i^0 u_{0i} \frac{\partial g}{\partial u_0} + u_{0i} u_{0i} \left\{ \eta_0 \frac{\partial^2 g}{\partial u_0^2} + \eta_1 \frac{\partial^2 g}{\partial u_0 \partial u_1} \right\} +$$

$$+ \{\zeta_i^0 u_{1i} + \zeta_i^1 u_{0i}\} \frac{\partial g}{\partial u_1} + u_{0i} u_{1i} \left\{ \eta_0 \frac{\partial^2 g}{\partial u_1 \partial u_0} + \eta_1 \frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2} \right\} + g\Delta\sigma^0 +$$

$$+ \left\{ \eta_0 \frac{\partial g}{\partial u_0} + \eta_1 \frac{\partial g}{\partial u_1} \right\} \Delta u_0 \Big|_{\substack{s_1=0\\ s_2=0}} = 0, \tag{13}$$

где $u_{0i} = \dfrac{\partial u_0}{\partial x_i}$, $u_{1i} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_i}$.

После подстановки выражений ζ_μ^ν и $\sigma_{\mu s}^\nu$ ($\nu = 0, 1;\ \mu, s = \overline{0, 3}$) в (12) — (13) и последующего расщепления получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\xi_b^a + \xi_a^b = 0, \quad \xi_0^0 = 2\xi_a^a, \quad \xi_a^0 = 0, \tag{14}$$

$$\eta_{0u_1} = 0, \quad \eta_{0u_0u_0} = 0, \tag{15}$$

$$2\eta_{0u_0a} = \xi_0^a, \tag{16}$$

$$\eta_{0_0} + \Delta\eta_0 = 0, \tag{17}$$

$$-\eta_{1u_1} \frac{\partial g}{\partial u_0} + \eta_{1u_0} \frac{\partial g}{\partial u_1} + 2\eta_{0u_0} \frac{\partial g}{\partial u_0} + \eta_{1u_0u_0} +$$

$$+ g\eta_{0u_0u_0} + \eta_0 \frac{\partial^2 g}{\partial u_0^2} + \eta_1 \frac{\partial^2 g}{\partial u_0 \partial u_1} = 0, \tag{18}$$

$$\eta_{1u_1u_1} + g\eta_{0u_1u_1} = 0, \tag{19}$$

$$-g\eta_{1u_1} + g\eta_{0u_0} + \eta_0 \frac{\partial g}{\partial u_0} + \eta_1 \frac{\partial g}{\partial u_1} = 0, \tag{20}$$

$$\eta_0 \frac{\partial^2 g}{\partial u_0 \partial u_1} + \eta_1 \frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2} + \eta_{0u_0} \frac{\partial g}{\partial u_1} = 0, \tag{21}$$

$$2\eta_{1u_1a} + \eta_{0a} \frac{\partial g}{\partial u_1} = \xi_0^a, \tag{22}$$

$$2\eta_{1u_0a} + g\eta_{0u_0a} + \eta_{0a} \frac{\partial g}{\partial u_0} + \eta_{1a} \frac{\partial g}{\partial u_1} = 0, \tag{23}$$

$$\eta_{1_0} + \Delta\eta_1 + g\Delta\eta_0 = 0, \tag{24}$$

где $\xi_b^a = \dfrac{\partial \xi^a}{\partial x_b}$, $\eta_{\nu_a} = \dfrac{\partial \eta_\nu}{\partial x_a}$, $\eta_{\nu_{u_\nu}} = \dfrac{\partial \eta_\nu}{\partial u_\nu}$, $a, b = \overline{1, 3};\ \nu = 0, 1$.

Система (14) — (24) эквивалентна более упрощенной системе

$$\xi_a^a + \xi_a^b = 0, \quad \xi_0^0 = 2\xi_a^a, \quad \xi_a^0 = 0, \tag{25}$$

$$\eta_{0u_1} = 0, \quad \eta_{0u_0u_0} = 0, \tag{26}$$

$$2\eta_{0u_0a} = \xi_0^a, \tag{27}$$

$$\eta_{0_0} + \Delta\eta_0 = 0, \tag{28}$$

$$\eta_{1u_0u_0} + g\eta_{1u_1u_0} = 0, \tag{29}$$

$$\eta_{1u_1u_1} = 0, \tag{30}$$

$$-g\eta_{1u_1} + g\eta_{0u_0} + \eta_0 \frac{\partial g}{\partial u_0} + \eta_1 \frac{\partial g}{\partial u_1} = 0, \tag{31}$$

$$2\eta_{1u_1a} + \eta_{0a} \frac{\partial g}{\partial u_1} = \xi_0^a, \tag{32}$$

$$\eta_{1u_0a} + g\eta_{0u_0a} + \eta_{0a} \frac{\partial g}{\partial u_0} + \eta_{1a} \frac{\partial g}{\partial u_1} = 0, \tag{33}$$

$$\eta_{1_0} + \Delta\eta_1 + g\Delta\eta_0 = 0. \tag{34}$$

Не вдаваясь в анализ решения системы (25)—(34), записываем лишь полученные результаты

$$1.\ \xi^0 = \tilde{a}x_0^2 + 2\tilde{b}x_0 + d_0, \tag{35}$$

$$\xi^a = (\tilde{a}x_0 + \tilde{b})\, x_a + g_a x_0 + \vec{\alpha} \times \vec{x} + d_a, \tag{36}$$

$$\eta_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{a}}{2}\, \vec{x}^2 + \vec{g}\vec{x} - 3\tilde{a}x_0\right) u_0, \tag{37}$$

$$\eta_1 = \left(-3\tilde{a}x_0 + \frac{C_3}{u_1} + C_4\right) u_1, \tag{38}$$

$$g\,(u_0, u_1) = 2u_1u_0^{-1}; \tag{39}$$

$$2.\ \xi^0 = \tilde{a}x_0^2 + 2\tilde{b}x_0 + d_0, \tag{40}$$

$$\xi^a = (\tilde{a}x_0 + \tilde{b})\, x_a + g_a x_0 + \vec{\alpha} \times \vec{x} + d_a, \tag{41}$$

$$\eta_0 = \frac{1}{2}\, \vec{g}\vec{x} u_0, \tag{42}$$

$$\eta_1 = -\frac{C_1}{4}\, \vec{g}\vec{x}, \tag{43}$$

$$g\,(u_0, u_1) = (2u_1 + C_1 \ln u_0)\, u_0^{-1}.$$

После подстановки формул (35) — (39) и (40) — (44) в (8) и расщепления по параметрам $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, g_a, $\vec{\alpha}$, d_a получаем базисные операторы алгебры Ли. Необходимость доказана.

Достаточность доказывается непосредственным применением алгоритма Ли к системе (3)—(5) с нелинейностями $g\,(u_0, u_1)$, приведенными в теоремах 1, 2.

Теорема 3. *Уравнение* (1) *обладает галилеевской симметрией 2-го порядка, если* $g\,(u_0, u_1, u_2) = \text{const}$. *Базисные элементы алгебры Галилея* $AG_2\,(1, 3) = \langle AG\,(1, 3), D, \Pi\rangle$ *имеют вид* (7).

Доказательство теоремы 3 проводится аналогично доказательству теорем 1, 2.

1. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики.— Киев : Наук. думка, 1989.— 332 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974. —500 с.
3. *Митропольский Ю. А., Шульга М. В.* Асимптотические решения многомерного нелинейного волнового уравнения // Докл. АН СССР.— 1987.— 295, № 1.— С. 30—33.
4. *Шульга М. В.* Симметрия систем уравнений, аппроксимирующих нелинейные волновые уравнения // Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1987.— С. 96—99.
5. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 400 с.

Получено 11.07.90