УДК 517.91:532.2

М. П. ЛЕНЮК, канд. физ.-мат. наук (Черновиц. ун-т)

Гибридные интегральные преобразования (Бесселя, Лежандра, Бесселя)

Методом дельтаобразных последовательностей построены гибридные интегральные преобразования Ханкеля 1-го рода — Лежандра — Вебера и Ханкеля 2-го рода — Лежандра — Вебера — на полярной оси с двумя точками сопряжения, доказаны теоремы разложимости и получены основные тождества интегрального преобразования дифференциального оператора. Приведена логическая схема применения полученных интегральных преобразований для решения соответствующих задач математической физики.

Методом дельтавидних послідовностей побудовані гібридні інтегральні перетворення Ханкеля 1-го роду — Лежандра — Вебера і Ханкеля 2-го роду — Лежандра — Вебера — на полярній осі з двома точками спряження, доведені теореми розвивності й одержані основні тотожності інтегрального перетворення диференціального оператора. Наведена логічна схема застосування одержаних інтегральних перетворень для розв'язання відповідних задач математичної фізики.

Рассмотрим задачу построения ограниченного на множестве

$$I_2^+ = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty); R_0 > 0\}$$

решения сепаратной системы дифференциальных уравнений

$$(B_{\nu_m, \alpha_m} + q_m^2) V_m(r, \lambda) = 0, \quad m = 1, 3; \quad r \in (R_{m-1}, R_m),$$

$$(\Lambda_\mu + q_2^2) V_2(r, \lambda) = 0, \quad r \in (R_1, R_2); \qquad R_3 = \infty; \qquad q_n^2 = \frac{\lambda^2 + \gamma_n^2}{a_n^2}, \tag{1}$$

по краевым условиям

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right) V_1(r, \lambda)\big|_{r=R_0} = 0, \quad V_3\big|_{r=\infty} < \infty \tag{2}$$

и условиям сопряжения

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right) V_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right) V_{k+1}\right]\Big|_{r=R_k} = 0; \qquad j, k = 1, 2. \tag{3}$$

В равенствах (1) — (3)

$$\alpha_{ij}^k \geqslant 0, \quad \beta_{ij}^k \geqslant 0, \quad \gamma_n^2 \geqslant 0, \quad a_n > 0, \quad c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0,$$

$$B_{\nu,\alpha} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha + 1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\nu^2 - \alpha^2}{r^2}, \quad \nu \geqslant \alpha \geqslant -\frac{1}{2}; \quad i, j = 1, 2;$$

$$\Lambda_\mu = \frac{d^2}{dr^2} + \operatorname{cth} r \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} - \frac{\mu^2}{\operatorname{sh}^2 r}, \quad \mu \geqslant -\frac{1}{2}, \quad k = 0, 1, 2;$$

$$n = \overline{1, 3}; \qquad B_{\nu,\alpha}, \Lambda_\mu$$

— соответственно операторы Бесселя и Лежандра [1, 2].

Фундаментальную систему решений для уравнения

$$(B_{\nu,\alpha}+\omega^2)v=0$$

образуют функции $\mathcal{J}_{\nu,\alpha}(\omega r)=(\omega r)^{-\alpha}\mathcal{J}_\nu(\omega r)$ и $N_{\nu,\alpha}(\omega r)=(\omega r)^{-\alpha}N_\nu(\omega r)$ [1], а для уравнения $(\Lambda_\mu+\omega^2)v=0$ — присоединенные функции Лежандра 1-го рода $P^\mu_{-1/2+i\omega}(\operatorname{ch} r)$ и 2-го рода $\mathcal{L}^\mu_{-1/2+i\omega}(\operatorname{ch} r)\equiv\frac{2}{\pi}e^{-i\mu\pi}\Theta^\mu_{-1/2+i\omega}(\operatorname{ch} r)$ [2]. В силу свойств функций, образующих фундаментальную систему решений для уравнений системы (1), ограниченное на множестве I_2^+ решение спектральной задачи Штурма — Лиувилля (1)—(3) ищем по правилам

$$V_m(r,\lambda)=A_m\mathcal{J}_{\nu_m,\alpha_m}(q_mr)+B_mN_{\nu_m,\alpha_m}(q_mr),\quad m=1,3,$$
$$V_2(r,\lambda)=A_2A^\mu_{-1/2+iq_2}(\operatorname{ch} r)+B_2B^\mu_{-1/2+iq_2}(\operatorname{ch} r). \tag{4}$$

Здесь принято во внимание, что [2]

$$P^\mu_{-1/2+iq}(x)=\sin\mu\pi A^\mu_{-1/2+iq}(x)+\cos\mu\pi B^\mu_{-1/2+iq}(x),$$
$$\mathcal{L}^\mu_{-1/2+iq}(x)=A^\mu_{-1/2+iq}(x)-i\operatorname{th}\pi q B^\mu_{-1/2+iq}(x).$$

Введем в рассмотрение такие величины и функции:

$$\sigma_1=\frac{c_{11}c_{12}\operatorname{sh} R_1R_2^{2\alpha_2+1}}{c_{21}c_{22}\operatorname{sh} R_2R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{a_1^2a_3^{2\alpha_3}};\quad \sigma_2=\frac{c_{12}R_2^{2\alpha_2+1}}{c_{22}\operatorname{sh} R_2a_3^{2\alpha_3}}\frac{1}{a_2^2};\quad \sigma_3=\frac{1}{a_3^{2\alpha_3+2}};$$

$$Y^{k1,\mu}_{-1/2+iq_2;jm}(\operatorname{ch} R_k)=\alpha^k_{jm}\operatorname{sh} R_kA^{\mu\prime}_{-1/2+iq_2}(\operatorname{ch} R_k)+\beta^k_{jm}A^\mu_{-1/2+iq_2}(\operatorname{ch} R_k),$$
$$Y^{k2,\mu}_{-1/2+iq_2;jm}(\operatorname{ch} R_k)=\alpha^k_{jm}\operatorname{sh} R_kB^{\mu\prime}_{-1/2+iq_2}(\operatorname{ch} R_k)+\beta^k_{jm}B^\mu_{-1/2+iq_2}(\operatorname{ch} R_k), \tag{5}$$
$$u^{k1}_{\nu,\alpha;jm}(q_sR_k)=\left(\alpha^k_{jm}\frac{\nu-\alpha}{R_k}+\beta^k_{jm}\right)\mathcal{J}_{\nu,\alpha}(q_sR_k)-\alpha^k_{jm}q_s^2R_k\mathcal{J}_{\nu+1,\alpha+1}(q_sR_k),$$
$$u^{k2}_{\nu,\alpha;jm}(q_sR_k)=\left(\alpha^k_{jm}\frac{\nu-\alpha}{R_k}+\beta^k_{jm}\right)N_{\nu,\alpha}(q_sR_k)-\alpha^k_{jm}q_s^2R_kN_{\nu+1,\alpha+1}(q_sR_k),$$
$$\delta_{\nu_1,\alpha_1;j0}(q_1R_0,q_1R_1)=u^{01}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0)\,u^{12}_{\nu_1,\alpha_1;j1}(q_1R_1)-u^{02}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0)\,u^{11}_{\nu_1,\alpha_1;j1}(q_1R_1),$$
$$\varphi^k_{\nu,\alpha;ij}(qR,qr)=N_{\nu,\alpha}(qr)\,u^{k1}_{\nu,\alpha;ij}(qR)-\mathcal{J}_{\nu,\alpha}(qr)\,u^{k2}_{\nu,\alpha;ij}(qR),$$
$$\delta^\mu_{-1/2+iq_2;kj}(\operatorname{ch} R_1,\operatorname{ch} R_2)=Y^{11,\mu}_{-1/2+iq_2;k2}(\operatorname{ch} R_1)\,Y^{22,\mu}_{-1/2+iq_2;j1}(\operatorname{ch} R_2)-$$
$$-Y^{12,\mu}_{-1/2+iq_2;k2}(\operatorname{ch} R_1)\,Y^{21,\mu}_{-1/2+iq_2;j1}(\operatorname{ch} R_2),$$
$$\psi^{k,\mu}_{-1/2+iq_2;jm}(\operatorname{ch} R_k,\operatorname{ch} r)=Y^{k2,\mu}_{-1/2+iq_2;jm}(\operatorname{ch} R_k)\,A^\mu_{-1/2+iq_2}(\operatorname{ch} r)-$$
$$-Y^{k1,\mu}_{-1/2+iq_2;jm}(\operatorname{ch} R_k)\,B^\mu_{-1/2+iq_2}(\operatorname{ch} r),$$
$$Z^\mu_{\nu_1\alpha_1;j}(\lambda)=\delta_{\nu_1,\alpha_1;20}(q_1R_0,q_1R_1)\,\delta^\mu_{-1/2+iq_2;1j}(\operatorname{ch} R_1,\operatorname{ch} R_2)-$$
$$-\delta_{\nu_1,\alpha_1;10}(q_1R_0,q_1R_1)\,\delta^\mu_{-1/2+iq_2;2j}(\operatorname{ch} R_1,\operatorname{ch} R_2),$$
$$\omega^{\mu,j}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)=u^{2j}_{\nu_3,\alpha_3;12}(q_3R_2)\,Z^\mu_{\nu_1,\alpha_1;2}(\lambda)-u^{2j}_{\nu_3,\alpha_3;22}(q_3R_2)\,Z^\mu_{\nu_1,\alpha_1;1}(\lambda),\quad j=1,2.$$

Непосредственно проверяется, что решением краевой задачи (1)—(3) являются функции

$$V_1(r,\lambda)=\frac{4}{\pi^3}\frac{c_{21}c_{22}\operatorname{ch}\pi q_2}{\operatorname{sh} R_1R_2^{2\alpha_2+1}q_3^{2\alpha_3}}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+iq_2\right)\right|^2\varphi^0_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0,q_1r),$$

$$V_2(r,\lambda)=\frac{2}{\pi}\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}q_3^{2\alpha_3}}[\delta_{\nu_1,\alpha_1;20}(q_1R_0,q_1R_1)\,\psi^{1,\mu}_{-1/2+iq_2;12}(\operatorname{ch} R_1,\operatorname{ch} r)-$$

$$-\delta_{\nu_1,\alpha_1;10}(q_1R_0,q_1R_1)\,\psi^{1,\mu}_{-1/2+iq_2;22}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}r)], \tag{6}$$

$$V_3(r,\lambda)=\omega^{\mu,2}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\,\mathcal{J}_{\nu_3,\alpha_3}(q_3r)-\omega^{\mu,1}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\,N_{\nu_3,\alpha_3}(q_3r);\quad (\nu,\alpha)=(\nu_1\alpha_1;\nu_3,\alpha_3).$$

Пусть $\theta(r)$ — единичная функция Хевисайда [3]. Определим функции

$$V(r,\lambda)=\sum_{j=1}^{2}V_j(r,\lambda)\,\theta(r-R_{j-1})\,\theta(R_j-r)+V_3(r,\lambda)\,\theta(r-R_2),$$

$$\sigma(r)=\sum_{j=1}^{2}\sigma_j(r)\,\theta(r-R_{j-1})\,\theta(R_j-r)+\sigma_3r^{2\alpha_3+1}\theta(r-R_2);\quad \sigma_1(r)=\sigma_1r^{2\alpha_1+1},$$

$$\varkappa(r)=\sum_{j=1}^{2}a_j^2\theta(r-R_{j-1})\,\theta(R_j-r)+a_3^2\theta(r-R_2);\quad \sigma_2(r)=\sigma_2\operatorname{sh}r;$$

$$\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)=b_3^{2\alpha_3}\{[\omega^{\mu,1}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)]^2+[\omega^{\mu,2}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)]^2\}^{-1},\qquad b_3^2=\lambda^2+\gamma_3^2.$$

Наличие спектральной функции $V(r,\lambda)$, весовой функции $\sigma(r)$ и спектральной плотности $\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)$ позволяют ввести в рассмотрение прямое $\mathcal{H}$ и обратное $\mathcal{H}^{-1}$ гибридное интегральное преобразование Ханкеля 2-го рода — Лежандра — Вебера — по правилам [4]

$$\mathcal{H}[f(r)]=\int_{R_0}^{\infty}f(r)\,V(r,\lambda)\,\sigma(r)\,dr\equiv\tilde{f}(\lambda), \tag{7}$$

$$\mathcal{H}^{-1}[\tilde{f}(\lambda)]=\int_{0}^{\infty}\tilde{f}(\lambda)\,V(r,\lambda)\,\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\,\lambda d\lambda\equiv f(r). \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть функция*

$$g(r)=[r^{\alpha_1+1/2}\theta(r-R_0)\,\theta(R_1-r)+e^{1/2r}\theta(r-R_1)\,\theta(R_2-r)+ +r^{\alpha_3+1/2}\theta(r-R_2)]\,f(r)$$

определена, непрерывна, абсолютно интегрируема на множестве I_2^+ и имеет ограниченную вариацию. Тогда для $r\in I_2^+$ справедлива формула разложения

$$f(r)=\int_{0}^{\infty}V(r,\lambda)\,\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\int_{R_0}^{\infty}f(\rho)\,V(\rho,\lambda)\,\sigma(\rho)\,d\rho\lambda d\lambda. \tag{9}$$

Доказательство. Рассмотрим функции $V_j(r,\lambda)$ и $V_j(r,\beta)$ $(j=\overline{1,3})$, удовлетворяющие уравнениям

$$[B_{\nu_m,\alpha_m}+(\lambda^2+\gamma_m^2)\,a_m^{-2}]\,V_m(r,\lambda)=0, \tag{10}$$

$$[B_{\nu_m,\alpha_m}+(\beta^2+\gamma_m^2)\,a_m^{-2}]\,V_m(r,\beta)=0,\quad m=1,3, \tag{11}$$

$$[\Lambda_\mu+(\lambda^2+\gamma_2^2)\,a_2^{-2}]\,V_2(r,\lambda)=0, \tag{12}$$

$$[\Lambda_\mu+(\beta^2+\gamma_2^2)\,a_2^{-2}]\,V_2(r,\beta)=0. \tag{13}$$

Равенство (10) умножим на $r^{2\alpha_m+1}V_m(r,\beta)$, а равенство (11) — на $r^{2\alpha_m+1}V_m(r,\lambda)$ и вычтем из первого второе:

$$r^{2\alpha_m+1}V_m(r,\lambda)\,V_m(r,\beta)=\frac{a_m^2}{\lambda^2-\beta^2}\frac{d}{dr}\left[r^{2\alpha_m+1}\left(V_m(r,\lambda)\,\frac{dV_m(r,\beta)}{dr}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-V_m(r,\beta)\,\frac{dV_m(r,\lambda)}{dr}\right)\right],\quad m=1,3. \tag{14}$$

Равенство (12) умножим на $\operatorname{sh}rV_2(r,\beta)$, а равенство (13) — на $\operatorname{sh}rV_2(r,\lambda)$ и вычтем из первого второе:

$$V_2(r,\lambda)V_2(r,\beta)\operatorname{sh} r=\frac{a_2^2}{\lambda^2-\beta^2}\frac{d}{dr}\left\{\operatorname{sh} r\left[V_2(r,\lambda)\frac{dV_2(r,\beta)}{dr}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-V_2(r,\beta)\frac{dV_2(r,\lambda)}{dr}\right]\right\}. \qquad (15)$$

Зададим некоторое достаточно большое число $A > R_2$. В силу (14) и (15) будем иметь

$$\int_{R_0}^{A} V(r,\lambda)V(r,\beta)\sigma(r)\,dr=\int_{R_0}^{R_1} V_1(r,\lambda)V_1(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr+$$
$$+\int_{R_1}^{R_2} V_2(r,\lambda)V_2(r,\beta)\sigma_2\operatorname{sh} r dr+\int_{R_2}^{A} V_3(r,\lambda)V_3(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_3+1}dr=$$
$$=\frac{\sigma_1a_1^2}{\lambda^2-\beta^2}\left[r^{2\alpha_1+1}\left(V_1(r,\lambda)\frac{dV_1(r,\beta)}{dr}-V_1(r,\beta)\frac{dV_1(r,\lambda)}{dr}\right]\right|_{R_0}^{R_1}+$$
$$+\frac{\sigma_2a_2^2}{\lambda^2-\beta^2}\left[\operatorname{sh} r\left(V_2(r,\lambda)\frac{dV_2(r,\beta)}{dr}-V_2(r,\beta)\frac{dV_2(r,\lambda)}{dr}\right)\right]\Bigg|_{R_1}^{R_2}+$$
$$+\frac{\sigma_3a_3^2}{\lambda^2-\beta^2}\left[r^{2\alpha_3+1}\left(V_3(r,\lambda)\frac{dV_3(r,\beta)}{dr}-V_3(r,\beta)\frac{dV_3(r,\lambda)}{dr}\right)\right]\Bigg|_{R_2}^{A}=$$
$$=\frac{a_3^{-2\alpha_3}A^{2\alpha_3+1}}{\lambda^2-\beta^2}\left[V_3(A,\lambda)\frac{dV_3(A,\beta)}{dr}-V_3(A,\beta)\frac{dV_3(A,\lambda)}{dr}\right]. \qquad (16)$$

Для произвольных положительных чисел c и d ($c < d$) и произвольной конечной функции $\psi(\lambda)$, заданной на сегменте $[c, d]$, найдем величину интеграла

$$\int_{R_0}^{\infty}\int_{c}^{d}\psi(\lambda)V(\rho,\lambda)\,d\lambda V(\rho,\beta)\sigma(\rho)\,d\rho. \qquad (17)$$

Двойной интеграл (17) в силу равенства (16) представим так:

$$\lim_{A\to\infty}\int_{c}^{d}\psi(\lambda)\frac{a_3^{-2\alpha_3}A^{2\alpha_3+1}}{(\lambda^2-\beta^2)}\left[V_3(A,\lambda)\frac{dV_3(A,\beta)}{d\rho}-V_3(A,\beta)\frac{dV_3(A,\lambda)}{d\rho}\right]d\lambda. \qquad (18)$$

Поскольку c и d — положительные числа, то для нахождения предела (18) воспользуемся для функций V_3 и dV_3/dr асимптотическими формулами для больших значений аргумента, используя при этом асимптотику цилиндрических функций 1-го и 2-го рода для больших значений аргумента [5]

$$\mathcal{J}_{\nu,\alpha}(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x^{-\alpha-1/2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\nu\right);$$
$$N_{\nu,\alpha}(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x^{-\alpha-1/2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\nu\right).$$

Поскольку

$$V_3(A,\lambda)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{(q_3A)^{\alpha_3+1/2}}\left[\omega_{(\nu,\alpha)}^{\mu,2}(\lambda)\cos\left(q_3A-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\nu_3\right)-\right.$$
$$\left.-\omega_{(\nu,\alpha)}^{\mu,1}(\lambda)\sin\left(q_3A-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\nu_3\right)\right],$$

$$\frac{dV_3(A,\lambda)}{d\rho}\approx\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{(q_3A)^{\alpha_3+1/2}}\left\{\left[\frac{\nu_3-\alpha_3}{A}\,\omega_{(\nu,\alpha)}^{\mu,2}(\lambda)-q_3(\lambda)\,\omega_{(\nu,\alpha)}^{\mu,1}(\lambda)\right]\times\right.$$

$$\times\cos\left(q_3A-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\nu_3\right)-\left[\frac{\nu_3-\alpha_3}{A}\,\omega^{\mu,1}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)+q_3(\lambda)\,\omega^{\mu,2}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\right]\times$$
$$\times\sin\left(q_3A-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\nu_3\right)\Big\},$$

то

$$V_3(A,\lambda)\frac{dV_3(A,\beta)}{d\rho}-V_3(A,\beta)\,\frac{dV_3(A,\lambda)}{d\rho}\approx[\pi A^{2\alpha_3+1}(q_3(\lambda)\,q_3(\beta))^{\alpha_3+1/2}]^{-1}\times$$
$$\times\{(q_3(\lambda)+q_3(\beta))\sin A\,(q_3(\lambda)-q_3(\beta))\,[\omega^{\mu,1}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\,\omega^{\mu,1}_{(\nu,\alpha)}(\beta)+\omega^{\mu,2}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\times$$
$$\times\,\omega^{\mu,2}_{(\nu,\alpha)}(\beta)]+(q_3(\lambda)+q_3(\beta))\cos A\,(q_3(\lambda)-q_3(\beta))\,[\omega^{\mu,1}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\,\omega^{\mu,2}_{(\nu,\alpha)}(\beta)-$$
$$-\,\omega^{\mu,1}_{(\nu,\alpha)}(\beta)\,\omega^{\mu,2}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)]+(q_3(\lambda)-q_3(\beta))\sin[A\,(q_3(\lambda)+q_3(\beta))-\nu_3\pi]\times$$
$$\times[\omega^{\mu,1}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\,\omega^{\mu,2}_{(\nu,\alpha)}(\beta)+\omega^{\mu,1}_{(\nu,\alpha)}(\beta)\,\omega^{\mu,2}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)]+(q_3(\lambda)-q_3(\beta))\cos[A\,(q_3(\lambda)+$$
$$+\,q_3(\beta))-\nu_3\pi]\,[\omega^{\mu,1}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\,\omega^{\mu,1}_{(\nu,\alpha)}(\beta)-\omega^{\mu,2}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\,\omega^{\mu,2}_{(\nu,\alpha)}(\beta)]\}. \qquad (19)$$

Если функция $\psi(\lambda)$ непрерывна, абсолютно интегрируема и имеет ограниченную вариацию на $[c, d]$, то после подстановки (19) в (18) с использованием лемм Римана и Дирихле [6] будем иметь

$$\int\limits_{R_0}^{\infty}\int\limits_{c}^{d}\psi(\lambda)\,V(\rho,\lambda)\,V(\rho,\beta)\,d\lambda\sigma(\rho)\,d\rho=$$
$$=\begin{cases}\psi(\beta)\,\beta^{-1}b_3^{-2\alpha_3}([\omega^{\mu,1}_{(\nu,\alpha)}\beta]^2+[\omega^{\mu,2}_{(\nu,\alpha)}(\beta)]^2), & \beta\in[c,d],\\ 0, & \beta\,\overline{\in}\,[c,d].\end{cases}$$

Если функция $\psi(\lambda)$ обладает указанными выше свойствами на множестве $[0,\infty)$, то

$$\int\limits_{R_0}^{\infty}V(\rho,\beta)\,\sigma(\rho)\int\limits_{0}^{\infty}\psi(\lambda)\,V(\rho,\lambda)\,\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\,\lambda d\lambda d\rho=\begin{cases}\psi(\beta), & \beta\in[0,\infty),\\ 0, & \beta\,\overline{\in}\,[0,\infty).\end{cases} \qquad (20)$$

Предположим теперь, что

$$f(r)=\int\limits_{0}^{\infty}\psi(\lambda)\,V(r,\lambda)\,\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\,\lambda d\lambda. \qquad (21)$$

Умножим (21) на $\sigma(r)\,V(r,\beta)$, где β — произвольное число, и проинтегрируем по r от R_0 до ∞. Тогда в силу (20)

$$\int\limits_{R_0}^{\infty}f(r)\,V(r,\beta)\,\sigma(r)\,dr=\int\limits_{R_0}^{\infty}V(r,\beta)\int\limits_{0}^{\infty}\psi(\lambda)\,V(r,\lambda)\,\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\,\lambda d\lambda\sigma(r)dr=\psi(\beta).$$

Подставляя функцию ψ в (21), получаем интегральное представление (9).

В случае кусочной непрерывности функции $f(r)$ в точке r в правой части равенства (9) вместо $f(r)$ должно быть

$$\frac{1}{2}\,[f(r-0)+f(r+0)].$$

Теорема 2. *Если функция $f(r)$ дважды непрерывно дифференцируема на множестве I_2^+, удовлетворяет краевым условиям*

$$\left(\alpha^0_{11}\frac{d}{dr}+\beta^0_{11}\right)f(r)\,|_{r=R_0}=g_0,\quad [r^{\alpha_3+1/2}f(r)\,|_{r=\infty}=0 \qquad (22)$$

и условиям сопряжения (3), *то справедливо основное тождество интегрального преобразования дифференциального оператора*

$$\mathcal{H}[\varkappa(r)\mathcal{L}[f(r)]] \equiv a_1^2\int\limits_{R_0}^{R_1} B_{\nu_1,\alpha_1}[f(r)]\,V_1(r,\lambda)\,\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr +$$

$$+ a_2^2\int\limits_{R_1}^{R_2}\Lambda_\mu[f(r)]\,V_2(r,\lambda)\,\sigma_2\,\mathrm{sh}\,r\,dr + a_3^2\int\limits_{R_2}^{\infty} B_{\nu_3,\alpha_3}[f(r)]\,V_3(r,\lambda)\,\sigma_3 r^{2\alpha_3+1}dr =$$

$$= -\lambda^2\tilde{f}(\lambda) - a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}(\alpha_{11}^0)^{-1}V_1(R_0,\lambda)\,g_0 - \gamma_1^2\int\limits_{R_0}^{R_1} f(r)\,V_1(r,\lambda)\,\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr -$$

$$-\gamma_2^2\int\limits_{R_1}^{R_2} f(r)\,V_2(r,\lambda)\,\sigma_2\,\mathrm{sh}\,r\,dr - \gamma_3^2\int\limits_{R_2}^{\infty} f(r)\,V_3(r,\lambda)\,\sigma_3 r^{2\alpha_3+1}dr. \tag{23}$$

Доказательство. Обозначим

$$\overset{-}{f}(R_j) = \lim_{r\to R_j-0} f(r),\quad \overset{+}{f}(R_j) = \lim_{r\to R_j+0} f(r).$$

Из условий сопряжения находим соотношения

$$\frac{d\overset{-}{f}}{dr}(R_j)\,V_j(R_j,\lambda) - \overset{-}{f}(R_j)\frac{dV_j}{dr}(R_j,\lambda) = \frac{c_{2j}}{c_{1j}}\left[\frac{d\overset{+}{f}}{dr}(R_j)\,V_{j+1}(R_j,\lambda) - \right.$$

$$\left. - \overset{+}{f}(R_j)\frac{dV_{j+1}(R_j,\lambda)}{dr}\right],\quad j = 1, 2. \tag{24}$$

Интегрируя в левой части равенства (23) по частям, в силу уравнений (1) получаем

$$\mathcal{H}[\varkappa(r)\mathcal{L}[f(r)]] = a_1^2\sigma_1\left[r^{2\alpha_1+1}\left(\frac{df}{dr}V_1(r,\lambda) - f(r)\frac{dV_1(r,\lambda)}{dr}\right)\right]\Bigg|_{R_0}^{R_1} +$$

$$+ a_2^2\sigma_2\left[\mathrm{sh}\,r\left(\frac{df}{dr}V_2(r,\lambda) - f(r)\frac{dV_2(r,\lambda)}{dr}\right)\right]\Bigg|_{R_1}^{R_2} + a_3^2\sigma_3\left[r^{2\alpha_3+1}\left(\frac{df}{dr}V_3(r,\lambda) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - f(r)\frac{dV_3(r,\lambda)}{dr}\right)\right]\Bigg|_{R_2}^{\infty} - (\lambda^2+\gamma_1^2)\int\limits_{R_0}^{R_1} f(r)\,V_1(r,\lambda)\,\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr - (\lambda^2+\gamma_2^2)\times$$

$$\times\int\limits_{R_1}^{R_2} f(r)\,V_2(r,\lambda)\,\sigma_2\,\mathrm{sh}\,r\,dr - (\lambda^2+\gamma_3^2)\int\limits_{R_2}^{\infty} f(r)\,V_3(r,\lambda)\,\sigma_3 r^{2\alpha_3+1}dr. \tag{25}$$

В силу соотношений (24) и структуры σ_j $(j = 1, 2, 3)$ находим

$$a_1^2\sigma_1\left[R_1^{2\alpha_1+1}\left(\frac{d\overset{-}{f}(R_1)}{dr}V_1(R_1,\lambda) - \overset{-}{f}(R_1)\frac{dV_1(R_1,\lambda)}{dr}\right)\right] - a_2^2\sigma_2\,\mathrm{sh}\,R_1\times$$

$$\times\left(\frac{d\overset{+}{f}}{dr}V_2(R_1,\lambda) - \overset{+}{f}(R_1)\frac{dV_2(R_1,\lambda)}{dr}\right) = \left(a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21}}{c_{11}} - a_2^2\sigma_2\,\mathrm{sh}\,R_1\right)\times$$

$$\times\left(\frac{d\overset{+}{f}}{dr}V_2(R_1,\lambda) - \overset{+}{f}(R_1)\frac{dV_2(R_1,\lambda)}{dr}\right) = 0, \tag{26}$$

$$a_2^2\sigma_2\,\mathrm{sh}\,R_2\left(\frac{d\overset{-}{f}(R_2)}{dr}V_2(R_2,\lambda) - \overset{-}{f}(R_2)\frac{dV_2(R_2,\lambda)}{dr}\right) - a_3^2\sigma_3 R_2^{2\alpha_3+1}\times$$

$$\times\left(\frac{d\overset{+}{f}}{dr}(R_2)\,V_3(R_2,\lambda) - \overset{+}{f}(R_2)\frac{dV_3(R_2,\lambda)}{dr}\right) = \left(a_2^2\sigma_2\,\mathrm{sh}\,R_2\frac{c_{22}}{c_{12}} - a_3^2\sigma_3 R_2^{2\alpha_3+1}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{d\overset{+}{f}(R_2)}{dr}V_3(R_3,\lambda) - \overset{+}{f}(R_2)\frac{dV_3(R_2,\lambda)}{dr}\right) = 0. \tag{27}$$

В силу условий на функцию $f(r)$ и асимптотики функций Бесселя $\mathcal{J}_{\nu_3,\alpha_3}(r\lambda)$ и $N_{\nu_3,\alpha_3}(r\lambda)$ при больших значениях аргумента имеем

$$\lim_{r\to\infty} r^{2\alpha_3+1}\left(\frac{df}{dr}V_3(r,\lambda)-f(r)\frac{dv_3(r,\lambda)}{dr}\right)=0. \tag{28}$$

В силу краевого условия в точке $r=R_0$

$$-a_1^2\sigma_1\left[r^{2\alpha_1+1}\left(\frac{df}{dr}V_1(r,\lambda)-f(r)\frac{dV_1(r,\lambda)}{dr}\right)\right]\Bigg|_{r=R_0}=-a_1^2\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}\times$$

$$\times\left(\frac{d\overset{+}{f}(R_0)}{dr}V_1(R_0,\lambda)-\overset{+}{f}(R_0)\frac{dV_1(R_0,\lambda)}{dr}\right)=-\frac{a_1^2\sigma_1}{\alpha_{11}^0}R_0^{2\alpha_1+1}V_1(R_0,\lambda)\times$$

$$\times\left(\alpha_{11}^0\frac{d\overset{+}{f}}{dr}+\beta_{11}^0\overset{+}{f}(R_0)\right)\equiv-a_1^2\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}(\alpha_{11}^0)^{-1}V_1(R_0,\lambda)\,g_0. \tag{29}$$

Подстановка равенств (26)—(29) в (25) приводит к тождеству (23).

Рассмотрим множество

$$\overline{I}_2^+=\{r: r\in(0,R_1)\cup(R_1,R_2)\cup(R_2,\infty)\}.$$

Условие в точке $r=R_0>0$ заменим на условие ограниченности в точке $r=R_0=0$:

$$\frac{d}{dr}(r^{\alpha_1-\nu_1}V_1(r,\lambda))\,|_{r=0}=0.$$

Функции $V_j(r,\lambda)$ имеют вид

$$\overline{V}_1(r,\lambda)=\frac{4}{\pi^3}\frac{c_{21}c_{22}\operatorname{ch}\pi q_2}{\operatorname{sh}R_1R_2^{2\alpha_3+1}q_3^{2\alpha_3}}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+iq_2\right)\right|^2\mathcal{J}_{\nu_1,\alpha_1}(q_1r),$$

$$\overline{V}_2(r,\lambda)=\frac{2}{\pi}\frac{c_{22}q_3^{-2\alpha_3}}{R_2^{2\alpha_3+1}}[u^{11}_{\nu_1,\alpha_1;21}(q_1R_1)\,\psi^{1,\mu}_{-1/2+iq_2;12}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}r)-$$

$$-u^{11}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_1)\,\psi^{1,\mu}_{-1/2+iq_2;22}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}r)];$$

$$\overline{V}_3(r,\lambda)=\overline{\omega}^{\mu,2}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\,\mathcal{J}_{\nu_3,\alpha_3}(q_3r)-\overline{\omega}^{\mu,1}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\,N_{\nu_3,\alpha_3}(q_3r);$$

$$\overline{\omega}^{\mu,j}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)=u^{2j}_{\nu_3,\alpha_3;12}(q_3R_2)\,\overline{Z}^{\mu}_{\nu_1,\alpha_1;2}(\lambda)-u^{2j}_{\nu_3,\alpha_3;22}(q_3R_2)\,\overline{Z}^{\mu}_{\nu_1,\alpha_1;1}(\lambda),\quad j=1,2; \tag{30}$$

$$\overline{Z}^{\mu}_{\nu_1,\alpha_1;j}(\lambda)=u^{11}_{\nu_1,\alpha_1;21}(q_1R_1)\,\delta^{\mu}_{-1/2+iq_2;1j}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}R_2)-u^{11}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_1)\times$$

$$\times\,\delta^{\mu}_{-1/2+iq_2;2j}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}R_2).$$

Справедливы такие утверждения.

Теорема 1. *Пусть функция*

$$g(r)=[r^{\alpha_1+1/2}\theta(r)\,\theta(R_1-r)+e^{1/2r}\theta(r-R_1)\,\theta(R_2-r)+r^{\alpha_3+1/2}\theta(r-R_2)]\,f(r)$$

определена, непрерывна, абсолютно интегрируема на множестве $\overline{I}_2^+$ *и имеет ограниченную вариацию. Тогда для* $r\in\overline{I}_2^+$ *справедливо интегральное представление*

$$f(r)=\int_0^\infty\overline{V}(r,\lambda)\,\overline{\Omega}^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\int_0^\infty f(\rho)\,\overline{V}(\rho,\lambda)\,\sigma(\rho)\,d\rho\lambda d\lambda. \tag{31}$$

Теорема 2. *Если функция* $f(r)$ *дважды непрерывно дифференцируема на множестве* $\overline{I}_2^+$, *удовлетворяет условиям ограниченности в точках* $r=0$ *и* $r=\infty$ *и условиям сопряжения* (3), *то имеет место основное тождество интегрального преобразования дифференциального оператора*

$$\mathcal{H}[\varkappa(r)\,\mathcal{L}[f(r)]]\equiv a_1^2\int_0^{R_1}B_{\nu_1,\alpha_1}[f(r)]\,\overline{V}_1(r,\lambda)\,\sigma_1r^{2\alpha_1+1}dr+a_2^2\int_{R_1}^{R_2}\Lambda_\mu[f(r)]\times$$

$$\times \overline{V}_2(r,\lambda)\,\sigma_2 \operatorname{sh} r dr + a_3^2 \int_{R_2}^{\infty} B_{\nu_3,\alpha_3}[f(r)]\,\overline{V}_3(r,\lambda)\,\sigma_3 r^{2\alpha_3+1} dr =$$

$$= -\lambda^2 \widetilde{f}(\lambda) - \Big[\gamma_1^2 \int_0^{R_1} f(r)\,\overline{V}_1(r,\lambda)\, r^{2\alpha_1+1}\sigma_1 dr + \gamma_2^2 \int_{R_1}^{R_2} f(r)\,\overline{V}_2(r,\lambda)\,\sigma_2 \operatorname{sh} r dr +$$

$$+ \gamma_3^2 \int_{R_2}^{\infty} f(r)\,\overline{V}_3(r,\lambda)\,\sigma_3 r^{2\alpha_3+1} dr\Big]. \qquad (32$$

Интегральное представление (31) показывает, что функция $f(r)$ по своему образу

$$\widetilde{f}(\lambda) = \int_0^{\infty} f(r)\,\overline{V}(r,\lambda)\,\sigma(r)\,dr \equiv \mathscr{H}[f(r)] \qquad (33$$

однозначно восстанавливается по правилу

$$f(r) \equiv \mathscr{H}^{-1}[\widetilde{f}(\lambda)] = \int_0^{\infty} \widetilde{f}(\lambda)\,\overline{V}(r,\lambda)\,\overline{\Omega}^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\,\lambda d\lambda. \qquad (34$$

Тождества (23) и (32) дают возможность применять полученные интегральные преобразования для решения соответствующих задач математической физики по логической схеме следующего примера.

З а д а ч а. Построить ограниченное в области

$$D_2^+ = \{(t,r): t \in [0,\infty),\ r \in I_2^+\}$$

решение сепаратной системы уравнений параболического типа

$$\frac{1}{a_m^2}\frac{\partial u_m}{\partial t} + \varkappa_m^2 u_m - B_{\nu_m,\alpha_m}[u_m(t,r)] = f_m(f,r), \quad m = 1, 3,$$

$$\frac{1}{a_2^2}\frac{\partial u_2}{\partial t} + \varkappa_2^2 u_2 - \Lambda_\mu[u_2(t,r)] = f_2(t,r) \qquad (35$$

по начальным условиям

$$u_j(t,r)|_{t=0} = g_j(r), \quad r \in (R_{j-1}, R_j); \quad j = \overline{1,3}; \quad R_3 = \infty, \qquad (36$$

краевым условиям

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0\right) u_1(t,r)|_{r=R_0} = g_0(t), \quad \frac{\partial u_3}{\partial r}\bigg|_{r=\infty} = 0 \qquad (37$$

и условиям сопряжения (3).

Запишем систему (35) и начальные условия (36) в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} + a_1^2\varkappa_1^2 - a_1^2 B_{\nu_1,\alpha_1}\right) u_1 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + a_2^2\varkappa_2^2 - a_2^2 \Lambda_\mu\right) u_2 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + a_3^2\varkappa_3^2 - a_3^2 B_{\nu_3,\alpha_3}\right) u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^2 f_1 \\ a_2^2 f_2 \\ a_3^2 f_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1(t,r) \\ u_2(t,r) \\ u_3(t,r) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \\ g_3(r) \end{bmatrix} \qquad (38$$

Представим оператор $\mathscr{H}$, действующий по правилу (7), в виде матрицы-строки

$$\mathscr{H}[\ldots] = \left[\int_{R_0}^{R_1} \ldots V_1\sigma_1 r^{2\alpha_1+1} dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \ldots V_2\sigma_2 \operatorname{sh} r dr \quad \int_{R_2}^{\infty} \ldots V_3\sigma_3 r^{2\alpha_3+1} dr\right]. \qquad (39)$$

Предположим, что $(a_3^2\varkappa_3^2 - a_m^2\varkappa_m^2) \geqslant 0$ для $m = 1, 2$ (в противном случае $a_3^2\varkappa_3^2$ и $a_m^2\varkappa_m^2$ меняются местами). Полагая всюду $\gamma_3^2 = 0$, $\gamma_m^2 = a_3^2\varkappa_3^2 - a_m^2\varkappa_m^2 \geqslant 0$, применим операторную матрицу-строку (39) по правилу умножения матриц к системе (38). В результате элементарных преобразований имеем задачу Коши [7]

$$\left(\frac{d}{dt} + \lambda^2 + a_3^2\gamma_3^2\right)\tilde{u}(t, \lambda) = \tilde{F}(t, \lambda); \qquad \tilde{u}(t, \lambda)|_{t=0} = \tilde{g}(\lambda). \tag{40}$$

Непосредственно проверяется, что решением задачи Коши (40) является функция

$$\tilde{u}(t, \lambda) = \int_0^t e^{-\omega^2(t-\tau)}[\tilde{F}(\tau, \lambda) + \tilde{g}(\lambda)\delta_+(\tau)]\,d\tau. \tag{41}$$

Здесь $\delta_+(t)$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке $t = 0_+$,

$$\omega^2 = \lambda^2 + a_3^2\chi_3^2, \quad \tilde{F} = \tilde{f}(t, \lambda) - a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}(\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(R_0, \lambda)\, g_0(t),$$

$$\tilde{f}(t, \lambda) = \sum_{j=1}^{3}\int_{R_{j-1}}^{R_j} a_j^2 f_j(t, r)\, V_j(r, \lambda)\,\sigma_j\varphi_j(r)\,dr; \qquad \varphi_1(r) = r^{2\alpha_1+1}, \quad \varphi_2(r) = \operatorname{sh} r$$

$$\tilde{g}(\lambda) = \sum_{j=1}^{3}\int_{R_{j-1}}^{R_j} g(r)\, V_j(r, \lambda)\,\sigma_j\varphi_j(r)\,dr, \quad \varphi_3(r) = r^{2\alpha_3+1}$$

Обратной к операторной матрице-строки (39) является

$$\mathcal{H}^{-1}[\ldots] = \begin{bmatrix} \int_0^\infty \ldots V_1(r, \lambda)\,\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\,\lambda d\lambda \\ \int_0^\infty \ldots V_2(r, \lambda)\,\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\,\lambda d\lambda \\ \int_0^\infty \ldots V_3(r, \lambda)\,\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\,\lambda d\lambda \end{bmatrix}.$$

Применяя операторную матрицу-столбец (42) по правилу умножения матриц к матрице-элементу $[\tilde{u}(t, \lambda)]$, где функция $\tilde{u}(t, \lambda)$ вычисляется по формуле (41), получаем решение задачи (35)—(37), (3):

$$u_j(t, r) = \sum_{m=1}^{3}\int_0^t\int_{R_{m-1}}^{R_m} \mathcal{H}_{jm}(t-\tau, r, \rho)\, G_m(\tau, \rho)\,\sigma_m\varphi_m(\rho)\,d\rho d\tau +$$
$$+ \int_0^t W_{1j}(t-\tau, r)\, g_0(\tau)\,d\tau, \quad j = 1, 2, 3. \tag{43}$$

В формулах (43) содержатся функции

$$G_m(t, r) = a_m^2 f_m(t, r) + g_m(r)\,\delta_+(t), \quad m = \overline{1, 3}, \tag{44}$$

функции влияния

$$\mathcal{H}_{jm}(t, r, \rho) = \int_0^\infty e^{-\omega^2(\lambda^2)t} V_j(r, \lambda)\, V_m(\rho, \lambda)\,\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\,\lambda d\lambda; \quad j, m = \overline{1, 3}, \tag{45}$$

и компоненты

$$W_{1j}(t,r) = -\frac{a_1^2\sigma_1}{\alpha_{11}^0} R_0^{2\alpha_1+1}\int\limits_0^\infty e^{-\omega^2(\lambda^2)t} V_1(R_0,\lambda)\, V_j(r,\lambda)\, \Omega_{(\nu,\alpha)}^{\mu}(\lambda)\,\lambda d\lambda;\quad j=\overline{1,3}, \tag{46}$$

функции Грина, порожденной краевым условием в точке $r = R_0$.

Изложенная выше методика позволяет получить в замкнутой форме решение задачи и для случая неоднородных условий сопряжения.

По изложенной выше схеме строятся в замкнутой форме решения соответствующих краевых задач как для сепаратной системы эллиптического типа, так и гиперболического типа.

Приведенный пример показывает, что полученные гибридные интегральные преобразования Ханкеля — Лежандра — Вебера позволяют построить точное решение достаточно широкого класса сингулярных задач математической физики неоднородных структур.

1. *Ленюк М. П.* Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя.— Киев, 1983.— 62 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.03).
2. *Ленюк М. П., Шинкарик Н. И.* Гибридные интегральные преобразования Лежандра.— Львов, 1989.— 60 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т прикл. пробл. математики и механики; 89.0).
3. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс.— М. : Наука, 1965.— 328 с.
4. *Ленюк М. П.* Гибридные интегральные преобразования Бесселя — Фурье — Бесселя // Мат. физика и нелинейная механика.— 1989.— Вып. 12 (46).— С. 68—74.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М. : Наука, 1971.— 1108 с.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : В 3-х т.— М. : Наука, 1969.— Т. 3.— 656 с.
7. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений.— М. : Физматгиз.— 1959.— 468 с.

Получено 16.07.90