УДК 512.554

М. Н. ИВКО, асп. (Краснояр. ун-т)

Об одной характеризации групп со слойно конечной периодической частью

Рассматриваются группы без инволюций, в которых нормализатор любой конечной нетривиальной подгруппы, инвариантной относительно некоторого элемента a простого порядка p, обладает слойно конечной периодической частью. При довольно слабом условии конечности доказано, что такие группы также обладают слойно конечной периодической частью.

Розглядаються групи без інволюцій, в яких нормалізатор будь-якої скінченної нетривіальної підгрупи, що інваріантна відносно деякого елемента a простого порядку p, має шарово скінченну періодичну частину. За досить слабкої умови скінченності доведено, що такі групи також мають шарово скінченну періодичну частину.

Одно из важных направлений в теории групп, связанное с изучением бесконечных групп по свойствам их подгрупп, у истоков которого стояли О. Ю. Шмидт и С. Н. Черников (см., например, [1, 2]) продолжает свое интенсивное развитие. Настоящая работа также относится к этому направлению и посвящена изучению групп, в которых нормализаторы некоторых конечных подгрупп обладают слойно конечной периодической частью. Это условие является довольно естественным, так как по своей природе оно близко к понятию точки группы (см., например, [3]) и позволяет получить характеризацию групп, обладающих слойно конечной периодической частью в достаточно обширном классе групп.

Термины и обозначения, используемые в работе, являются в основном стандартными, за исключением тех, которые приведены ниже.

1. Будем говорить, что группа G обладает периодической частью, если множество всех ее элементов конечных порядков образует подгруппу [4].

2. Локально конечную группу с черниковскими силовскими p-подгруппами будем называть S_pF-группой. Локально конечную группу G будем называть SF-группой, если она является S_pF-группой для любого $p \in \pi(G)$ [5].

Следуя [6], через гр (M) будем обозначать подгруппу, порожденную множеством M.

Приведем некоторые известные результаты, ссылаться на которые будем как на предложения с соответствующим номером.

1. (Файт, Томпсон [7].) Конечная группа нечетного порядка разрешима.

2. (А. П. Дицман.) Конечное инвариантное множество элементов конечного порядка в произвольной группе порождает конечную нормальную подгруппу [4].

3. (В. П. Шунков [8].) Пусть G — группа без инволюций с бесконечным множеством элементов конечного порядка, a — элемент простого порядка p такие, что почти для всех элементов a^g, $g \in G$, подгруппы гр.(a, a^g) конечны. Тогда элемент a либо содержится в бесконечной локально конеч-

ной подгруппе, либо в конечной группе, в нормализаторе которой бесконечно много элементов конечного порядка.

4. (Блекберн [9].) Локально конечная p-группа, обладающая элементом простого порядка с черниковским централизатором, сама является черниковской.

5. (В. П. Шунков [10].) Пусть G — локально конечная группа, t — ее элемент простого порядка p. Если силовские p-подгруппы из $G_G(t)$ черниковские, то в G силовские p-подгруппы также являются черниковскими.

6. (М. И. Каргаполов [11].) Если G — почти локально разрешимая S_pF-группа, то $G/O_p'(G)$ — черниковская группа.

7. (Хигмэн [12].) Локально конечная группа, обладающая регулярным автоморфизмом простого порядка, нильпотентна.

8. (В. П. Шунков [13].) Пусть G — группа, D — SF-подгруппа из G, A, C — некоторые подгруппы из G. Если D обладает такими подгруппами F и R, что $|D:R|<\infty$, $R\leqslant F, A, D\leqslant N_G(F)$, $C, D\leqslant N_G(R)$, то в D существует подгруппа X конечного индекса в D и $A, C, D\leqslant N_G(X)$.

9. Пусть $G=B\leftthreetimes A$ и A — группа регулярных автоморфизмов группы B. Тогда (G, A) — пара Фробениуса [14].

10. (Бернсайд.) Всякая группа порядка pq, где p и q — необязательно различные простые числа, из неинвариантного множителя конечной группы Фробениуса является циклической [14].

11. Пусть $G = O_{p'}(G)\leftthreetimes(a)$ — конечная группа без инволюций, a — элемент простого порядка p, и F — нильпотентный радикал группы G. Если гр $(F, G_G(a))$ — группа Фробениуса с дополнением $C_G(a)$, то G также является группой Фробениуса.

Предложение фактически доказано в [3] (см. лемму 4.27).

12. (А. И. Созутов, В. П. Шунков.) Пусть G — группа, H — ее собственная подгруппа, a — элемент простого порядка $p\neq 2$ такие, что почти для всех элементов a^g, где $g\in G\setminus H$, подгруппы гр (a, a^g) являюся группами Фробениуса с ядром F и неинвариантным множителем (a). Тогда либо $G = F\leftthreetimes N_G((a))$ и $F\leftthreetimes(a)$ — группа Фробениуса с ядром F и неинвариантным множителем (a), либо элемент a лежит в конечном нормальном делителе группы G [3].

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Т е о р е м а. *Бесконечная группа G, не содержащая инволюций, тогда и только тогда обладает слойно конечной периодической частью, когда в ней для некоторого элемента a простого порядка p выполняются следующие условия:*

1) *почти все подгруппы вида* гр (a, a^g), *где* $g\in G$, *конечны;*

2) *нормализатор любой нетривиальной (a)-инвариантной конечной элементарной абелевой подгруппы группы G обладает слойно конечной периодической частью.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь условий 1 и 2 очевидна, поэтому остается показать лишь их д о с т а т о ч н о с т ь.

Предположим, что теорема неверна, т. е. группа G, удовлетворяющая ее условиям, не обладает слойно конечной периодической частью, и рассмотрим свойства некоторых подгрупп этой группы.

Л е м м а 1. *Нормализатор любой нетривиальной (a)-инвариантной слойно конечной подгруппы группы G обладает слойно конечной периодической частью.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть K — нетривиальная слойно конечная подгруппа группы G и $a\in N_G(K)$. Тогда подгруппа V, порожденная непустым множеством всех элементов подгруппы K одинакового порядка, автоморфно допустима в K, и, следовательно, $a\in N_G(V)\geqslant N_G(K)$, а поэтому достаточно показать, что $N_G(V)$ обладает слойно конечной периодической частью. Но подгруппа V конечна и по предложению 1 разрешима, следовательно, она обладает автоморфно допустимой элементарной абелевой подгруппой Q. Отсюда $N_G(V)\leqslant N_G(Q)$, и так как по условию 2 $N_G(Q)$ обладает слойно конечной периодической частью, то тем же свойством обладает и $N_G(V)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *$C_G(a)$ обладает бесконечной слойно конечной периодической частью.*

Доказательство. Ввиду условия 2 доказываемой теоремы достаточно показать, что периодическая часть из $C_G(a)$ бесконечна. Предположим, что это не так.

Очевидно группа G содержит бесконечное множество элементов конечного порядка, так как в противном случае согласно предложению 2 она обладала бы конечной периодической частью, а это противоречит сделанному выше предположению о группе G. Отсюда и из условия 1 теоремы следует, что группа G удовлетворяет всем условиям предложения 3, а поэтому возможны два случая.

а). Элемент a вкладывается в бесконечную локально конечную подгруппу H.

Пусть $\pi = \pi(C_G(a))$. Как следует из условия 2 теоремы и предложения 4 для любого элемента $t \in C_G(a)$ порядка $q \in \pi$ силовские q-подгруппы из $C_G(t)$ являются черниковскими, а следовательно, по предложению 5 H является S_qF-группой, и поскольку по предложению 1 она локально разрешима, то по предложению 6 $H/O_{q'}(H)$ является черниковской группой для любого $q \in \pi$. Но множество π конечно, а поэтому группа $H/O_{\pi'}(H)$ также является черниковской, причем, очевидно, $C_G(a) \cap O_{\pi'}(H) = 1$.

Если $O_{\pi'}(H) \neq 1$, то по предложению 7 подгруппа $O_{\pi'}(H)$ нильпотентна и, как известно, разлагается в прямое произведение своих силовских подгрупп. Пусть Q — произвольная силовская q-подгруппа из $O_{\pi'}(H)$. Покажем, что нижний слой B ее центра конечен. Выберем произвольный неединичный элемент $b \in B$ и пусть $V = \text{гр}(b, b^a, \ldots, b^{a^{p-1}})$. Так как подгруппа V конечна, нормальна в B и $a \in N_G(V)$, то по лемме 1 подгруппа B слойно конечна, а тогда согласно определению она конечна. Но подгруппа B нормальна в H и является (a)-инвариантной, а отсюда по условию 2 теоремы получаем, что подгруппа H слойно конечна. Но тогда $|H : C_H \times \times (a)| < \infty$, и, следовательно, $C_G(a)$ бесконечен. Противоречие.

Таким образом, остается рассмотреть ситуацию, когда $O_{\pi'}(H) = 1$. Но в этом случае подгруппа H является черниковской и нижний слой ее полной части конечен, что с помощью рассуждений, аналогичных изложенным выше, также приводит к противоречию.

б). Элемент a содержится в конечной подгруппе A, в нормализаторе которой бесконечно много элементов конечного порядка.

В этом случае согласно лемме 1 $N_G(A)$ обладает бесконечной слойно конечной периодической частью K, и так как $a \in K$, то $|K : C_k(a)| < \infty$, и, следовательно, $C_G(a)$ обладает бесконечной периодической частью. Противоречие. Лемма доказана.

Как следует из лемм 1, 2 и леммы Цорна (см., например, [15]) периодическую часть из $C_G(a)$ можно вложить в максимальную бесконечную слойно конечную подгруппу группы G. Эту подгруппу в дальнейшем будем обозначать через T, а ее нормализатор — через H. Для изучения свойств этих подгрупп будут необходимы следующие три леммы.

Лемма 3. *Пусть A, C — бесконечные слойно конечные подгруппы группы G такие, что $a \in A \cap C$. Если $|A : A \cap C| < \infty$, и $|C : A \cap C| < \infty$, то подгруппа* гр (A, C) *слойно конечна.*

Доказательство. Обозначим $D = A \cap C$, $F = \bigcap_{g \in A} D^g$, $R = \bigcap_{g \in C} F^g$, тогда по предложению 8 в D существует подгруппа X конечного индекса в D такая, что $A, C, D < N_G(X)$. Но $a \in D < N_G(X)$, т. е. подгруппа X является (a)-инвариантной, поэтому по лемме 1 $N_G(X)$ обладает слойно конечной периодической частью, а так как $A, C < N_G(X)$, то подгруппа гр(A, C) слойно конечна. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если $a^x \in H$ для некоторого $x \in G$, то $x \in H$.*

Доказательство. Так как $a^x \in H$, то очевидно $a^x \in T$ и ввиду слойной конечности подгруппы T имеем $|T : T \cap C_G(a^x)| < \infty$. Но $T \cap C_G \times \times (a^x) = T \cap C_G(a^x) \cap T^x \leqslant T \cap T^x$, следовательно, $|T : T \cap T^x| < \infty$. Аналогично $|T^x : T \cap T^x| < \infty$. Тогда по лемме 3 подгруппа гр (T, T^x) слойно конечна, а поэтому гр $(T, T^x) = T$ ввиду максимальности подгруппы T. Отсюда получаем $x \in N_G(T) = H$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если K — нетривиальная конечная (a)-инвариантная подгруппа из H, и T_k — периодическая часть из $N_G(K)$, то $T_k \leqslant H$.*

Доказательство. Действительно по лемме 1 $|T_k : C_G(a) \cap T_k| < \infty$, и, следовательно, $|T_k : T \cap T_k| < \infty$. С другой стороны, $|T : N_T \times (K)| < \infty$, т. е. $|T : T \cap T_k| < \infty$. Отсюда по лемме 3 подгруппа гр (T, T_k) слойно конечна, и ввиду максимальности подгруппы T будем иметь $T_k \leqslant T \leqslant H$. Лемма доказана.

Выберем теперь произвольный элемент $g \in G \setminus H$, для которого подгруппа $L =$ гр (a, a^g) конечна. Через P_a обозначим силовскую p-подгруппу группы L, содержащую элемент a.

Лемма 6. *Силовские p-подгруппы группы L являются циклическими.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда по теореме 12.5.2 из [15] P_a содержит элементарную абелеву подгруппу R, порядок которой больше p. По предложению 1 подгруппа L разрешима, и, следовательно, по упражнению 19.1.7 из [6] ее минимальная нормальная подгруппа является элементарной абелевой. Обозначим эту подгруппу через Q и рассмотрим подгруппу $Q \leftthreetimes R$. Если каждый неединичный элемент из R регулярно действует на Q, то по предложению 9 подгруппа $Q \leftthreetimes R$ является группой Фробениуса и по предложению 10 $|R| = p$, что противоречит предположению о подгруппе R. Следовательно, найдутся неединичные элементы $d \in Q$ и $r \in R$, централизующие друг друга. Но так как R лежит в периодической части из $C_G(a)$, то по лемме 5 периодическая часть из $C_G(R)$ лежит в H. Отсюда $C_G(R) < H$ и так как $Q = Z(Q) \leqslant N_G(C_G(R))$, а по лемме 5 периодическая часть из $N_G(C_G(R))$ лежит в H, то, снова применяя лемму 5, получаем $L < H$. Но тогда $a^g \in H$ и по лемме 4 $g \in H$, что противоречит выбору элемента g. Таким образом, $|R| = p$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 7. *$L = O_{p'}(L) \leftthreetimes (a)$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем (a).*

Доказательство. Покажем сначала, что $L' \cap P = 1$. Действительно, если $L' \cap P \neq 1$, то $(a) \leqslant L' \cap P$, а так как по теореме Силова подгруппы P_a и P_{a^g} сопряжены, то сопряжены и подгруппы (a) и (a^g), и, таким образом, $(a^g) \leqslant L'$. Но тогда $L' \geqslant$ гр $(a, a^g) = L$, что противоречит разрешимости группы L. Таким образом $L' \cap P = 1$, а отсюда следует, что $L' \leqslant O_{p'}(L)$. Следовательно, фактор-группа $\hat{L} = L/O_{p'}(L)$ является абелевой, и, как нетрудно проверить, $\hat{L} \cong P_a$. Отсюда по теореме 20.2.6 из [6]

$$L = O_{p'}(L) \leftthreetimes P_a. \qquad (*)$$

Как отмечалось выше, $(a^g) = (a)^k$ для некоторого $k \in L$ и в силу $(*)$ элемент k можно выбрать в $O_{p'}(L)$. Отсюда $L =$ гр $(a, a^g) \leqslant$ гр $(a, a^k) \leqslant$ гр $(a, k) \leqslant O_{p'}(L) \leftthreetimes (a)$. Таким образом, $L = O_{p'}(L) \leftthreetimes (a)$.

Покажем далее, что гр $(F, C_L(a))$, где F — нильпотентный радикал подгруппы L, является группой Фробениуса. Для этого покажем сначала, что $F \cap C_L(a) = 1$. Предположим, что это не так. Тогда, поскольку $Z(F) < N_G(C_F(a))$, согласно лемме 5 получаем $Z(F) < H$, а так как $Z \times (F) \lhd L$, то, снова применяя лемму 5, имеем $L < H$, что, как уже отмечалось, приводит к противоречию. Таким образом, $C_F(a) = C_L(a) \cap F = 1$ и гр $(F, C_L(a)) = F \leftthreetimes C_L(a)$. Покажем теперь, что $C_L(a)$ регулярно действует на F. Предположим противное, т. е. существует неединичный элемент $b \in F$, перестановочный с некоторым неединичным элементом из $C_L(a)$. Тогда по лемме 5 $b \in H$. Пусть $A =$ гр $(b, b^a, \ldots, b^{a^{p-1}})$. Так как $b \in F$, то $A \leqslant F$, причем $Z(F) < N_G(A)$. Но подгруппа A является (a)-инвариантной и $A < H$. Отсюда по лемме 5 $Z(F) < H$, что, как уже было показано, приводит к противоречию. Таким образом, $C_L(a)$ регулярно действует на F и по предложению 9 гр $(C_L(a), F)$ является группой Фробениуса с неинвариантным множителем $C_L(a)$. Но тогда по предложению 11 L также является группой Фробениуса, и, чтобы завершить доказательство леммы, остается показать, что неинвариантный множитель подгруппы L совпадает с (a).

Пусть $L = K \leftthreetimes V$, где K — ядро, а V — неинвариантный множитель подгруппы L. Так как $L = \text{гр}\,(a, a^g)$, а подгруппы (a) и (a^g), как было показано выше, сопряжены некоторым элементом $t \in L$, то $a \notin K$ и без ограничения общности можно считать, что $a \in V$. Но тогда $(a^g) = (a)^t \leqslant V$, причем, очевидно, $t \notin V$, и в силу свойств групп Фробениуса элемент t можно выбрать в K. Отсюда получим, что $L = \text{гр}\,(a, a^g) = \text{гр}\,(a, a^t) \leqslant \text{гр}\,(a, t) \leqslant K \leftthreetimes (a)$, а так как выше было показано, что $L = O_{p'}(L) \leftthreetimes (a)$, то $K = O_{p'}(L)$ и $V = (a)$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Как следует из леммы 7 и условия 1 теоремы группа G и элемент a удовлетворяют всем условиям предложения 12, и поэтому для них возможны два случая.

а). $G = F \leftthreetimes N_G((a))$ и $F \leftthreetimes (a)$ — группа Фробениуса с ядром F и неинвариантным множителем (a).

Если подгруппа F конечна, то из леммы 1 следует, что группа G обладает слойно конечной периодической частью, что противоречит предположению о группе G. Отсюда следует, что $W = F \leftthreetimes (a)$ — бесконечная группа Фробениуса и $C_W(a) = (a)$, т. е. $C_W(a)$ конечен. Но подгруппа W удовлетворяет всем условиям доказываемой теоремы, а поэтому либо W обладает слойно конечной периодической частью D, либо, как нетрудно показать, используя рассужения из доказательств лемм 1 и 2, $C_W(a)$ обладает бесконечной слойно конечной периодической частью. Второй случай сразу же приводит к противоречию с конечностью $C_W(a)$, а в первом, в силу того, что $a \in D$ будем иметь $|W : C_W(a)| < \infty$, т. е. $C_W(a)$ бесконечен. Противоречие.

б). Элемент a лежит в конечном нормальном делителе группы G.

Этот случай сразу приводит к противоречию с предположением о группе G ввиду леммы 1.

Теорема доказана.

Следствие. *Бесконечная группа G, не содержащая инволюций, тогда и только тогда является слойно конечной, когда в ней для некоторого элемента a простого порядка p выполняются следующие условия*:

1) *почти для всех элементов $g \in G$ подгруппы (a, a^g) конечны*;

2) *нормализатор любой нетривиальной (a)-инвариантной конечной элементарной абелевой подгруппы группы G слойно конечен.*

1. *Шмидт О. Ю.* Избранные труды. Математика.— М. : Изд-во АН СССР, 1959.— 316 с.
2. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
3. *Шунков В. П.* M_p-группы.— М. : Наука, 1990.— 160 с.
4. *Курош А. Г.* Теория групп.— М. : Наука, 1967.— 648 с.
5. *Шунков В. П.* О локально конечных группах с экстремальными силовскими p-подгруппами по некоторому простому числу p // Сиб. мат. журн.— 1967.— 8, № 1.— С. 213—229.
6. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп: 3-е изд.— М. : Наука, 1982.— 288 с.
7. *Feit W., Thompson J. G.* Solvability of groups of odd order // Pacif. J. Math.— 1963.— 13, N 3.— P. 775—1029.
8. *Созутов А. И., Шунков В. П.* О бесконечных группах, насыщенных фробениусовыми подгруппами // Алгебра и логика.— 1977.— 16, N 6.— С. 711—735.
9. *Blackburn N.* Some remarks on Černikov p-groups // Ill. J. Math.— 1962.— 6, N 3.— P. 421—433.
10. *Шунков В. П.* О проблеме минимальности для локально конечных групп // Алгебра и логика.— 1970.— 9, № 2.— С. 220—248.
11. *Каргаполов М. И.* Локально конечные группы, обладающие нормальными системами с конечными факторами // Сиб. мат. журн.— 1961.— 2, № 6.— С. 853—873.
12. *Higman G.* Groups and rings having automorphisms without non-trivial fixed elements // J. London Math. Soc.— 1957.— 32, N 5.— P. 321—334.
13. *Шунков В. П.* О локально конечных группах конечного ранга // Алгебра и логика.— 1971.— 10, № 2.— С. 199—225.
14. *Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М.* Конечные расщепляемые группы.— М. : Наука, 1968.— 112 с.
15. *Холл М.* Теория групп.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 468 с.

Получено 01.02.91