УДК 519.41/47

$\boxed{\text{Д. И. ЗАЙЦЕВ}}$, д-р физ.-мат. наук,
В. А. МАЗНИЧЕНКО, асп. (Ин-т математики АН УССР, Киев)

О прямых разложениях артиновых модулей над гиперциклическими группами

Пусть A — артинов G-модуль, G — гиперциклическая группа. Определяется класс простых G-модулей $\mathfrak{X}$ и доказывается существование прямого разложения $A = C \oplus B$, где C — G-подмодуль, каждый G-композиционный фактор которого принадлежит классу $\mathfrak{X}$, а B — G-подмодуль, не имеющий G-композиционных факторов, принадлежащих классу $\mathfrak{X}$.

Нехай A — артинів G-модуль, G — гіперциклічна група. Означається клас простих G-модулів $\mathfrak{X}$ і доводиться існування прямого розкладу $A = C \oplus B$, де C — G-підмодуль, кожний G-композиційний фактор якого належить класу $\mathfrak{X}$ а B — G-підмодуль, який не має G-композиційних факторів, що належать класу $\mathfrak{X}$.

1. Пусть K — гиперциклическая группа, A—K-модуль. Если A удовлетворяет условию min-K (условию минимальности для K-допустимых подгрупп), то A обладает C-разложением $A = A^c \oplus A^{\bar{c}}$, где $A^{\bar{c}}$ — подмодуль, каждый K -композиционный фактор которого является циклической группой, а $A^{\bar{c}}$ — подмодуль, не имеющий факторов такого рода [1]. Известно также, что если A обладает конечным K-композиционным рядом, то A обладает разложением $A = A_1 \oplus A_2$, где A_1 — K-подмодуль, каждый K-фактор которого конечен, а A_2 — K-подмодуль, не имеющий конечных K-факторов [2]. В настоящей работе показано, что эти и некоторые другие виды разложений артиновых модулей над гиперциклическими группами являются следствиями существования у них прямого разложения, называемого авторами $\mathfrak{X}$-разложением.

Пусть G — группа, $\alpha : A \to B$ — изоморфизм аддитивных групп G-модулей A и B. Если α отображает G-подмодули A на G-подмодули B и Ker α^i — подмодуль для всех i, то будем говорить, следуя Робинсону [3], что α является слабым G-изоморфизмом G-модуля A на G-модуль B и что G-модули A и B слабо G-изоморфны.

Для некоторого класса $\mathfrak{F}$ простых G-модулей и некоторой подгруппы H группы G определим класс $\mathfrak{F}_H$ как класс, состоящий из всех H-простых H-подмодулей G-модулей из класса $\mathfrak{F} \cdot \overline{\mathfrak{F}}$ — это дополнение класса $\mathfrak{F}$ в множестве простых G-модулей. Обозначим через $\overline{\mathfrak{F}}_H$ класс $(\overline{\mathfrak{F}})_H$, где $H \leqslant G$.

Определение. *Пусть G — группа. Определим класс $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_G$ как некоторый класс простых G-модулей, удовлетворяющих следующим условиям:*

1) *G индуцирует в модулях из класса $\mathfrak{X}$ почти абелевы группы автоморфизмов;*

2) *класс $\mathfrak{X}$ содержит вместе с каждым модулем и все слабо G-изоморфные с ним модули;*

3) *для любой нормальной подгруппы H конечного индекса в G класс $\mathfrak{X}_H$ замкнут относительно слабо H-изоморфных простых H-подмодулей, имеющих аддитивные группы ранга больше* 1.

Примером класса $\mathfrak{X}$ может служить класс всех простых G-модулей, аддитивные группы которых циклические порядка, принадлежащего некоторому множеству простых чисел π, либо класс всех простых G-модулей, аддитивные группы которых имеют ранг 1. Класс $\mathfrak{X}$ может состоять также из всех конечных простых подмодулей. В случае гиперциклической группы G в качестве класса $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_G$ можно взять класс всех простых G-модулей, аддитивная группа которых имеет конечный ранг и либо без кручения, либо экспонента ее принадлежит некоторому множеству простых чисел π.

2. Докажем несколько вспомогательных результатов.

Лемма 1. *Пусть H— абелева подгруппа конечного индекса группы G, A — конечнопорожденный* min-*G-модуль. Тогда для любой подгруппы $S \geqslant H$ группы G A обладает конечным композиционным S-рядом.*

Доказательство. Заметим, что A конечнопорожден как H-модуль и удовлетворяет условию min-H [4].

Пусть $A = \langle aH \rangle$. Тогда модуль A H-изоморфен фактор-модулю $K = \mathbb{Z}H/Ann_{\mathbb{Z}H}(a)$. Кольцо K артиново, следовательно, нетерово, поэтому оно обладает конечным композиционным рядом идеалов. Значит, A обладает конечным композиционным H-рядом и поэтому A обладает конечным композиционным S-рядом для любой подгруппы S группы G такой, что $H \leqslant S \leqslant G$.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — минимальная система порождающих H-модуля A. Положим $B = \langle a_1 H \rangle$. По доказанному B обладает конечным композиционным S-рядом. Фактор-модуль A/B порождается не более чем $n - 1$ элементом. Поэтому по соображениям индукции он также обладает конечным композиционным S-рядом. Следовательно, модуль A обладает таким рядом. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — гиперциклическая группа, обладающая такой абелевой нормальной подгруппой конечного индекса H, что любая бесконечная циклическая нормальная в G подгруппа из H входит в центр $Z(G)$ группы G. Тогда фактор-группа $G/Z(G)$ периодическая.*

Доказательство. Для произвольного элемента g группы G найдется такое число n, что $g^n \in H$. Конечнопорожденная нормальная абелева подгруппа $B = \langle h^{-1}g^nh : h \in G \rangle$ группы G обладает конечным рядом нормальных в G подгрупп с циклическими факторами. Кроме того, группа G индуцирует в B конечную группу автоморфизмов (так как $H \leqslant C_G(B)$). Поэтому B содержит подгруппу C конечного индекса, разлагающуюся в прямое произведение бесконечных нормальных в G циклических подгрупп. Но любая бесконечная циклическая нормальная в G подгруппа из H входит в $Z(G)$, поэтому $C \leqslant Z(G)$. Следовательно, поскольку $|B : C| < \infty$, существует такое число m, что $(g^n)^m \in Z(G)$. Лемма доказана.

3. Теорема. *Пусть G—гиперциклическая группа. Произвольный* min-*G-модуль A обладает разложением $A = A^{\mathfrak{X}} \oplus A^{\overline{\mathfrak{X}}}$, где $A^{\mathfrak{X}}$—подмодуль, каждый G-композиционный фактор которого принадлежит классу $\mathfrak{X}$, а подмодуль $\overline{A}^{\mathfrak{X}}$ не имеет G-композиционных факторов, принадлежащих класу $\mathfrak{X}$.*

Назовем это разложение $\mathfrak{X}$-разложением модуля A.

Доказательство. Можно предполагать, что G точно действует в A, т. е. $C_G(A) = 1$.

Пусть A не обладает $\mathfrak{X}$-разложением. Тогда у A существует такой собственный подмодуль, не обладающий $\mathfrak{X}$-разложением, что все его собственные подмодули указанным разложением обладают. Будем считать, что A удовлетворяет этому условию. Значит, A не может быть суммой своих собственных подмодулей, а отсюда вытекает, что A имеет единственный максимальный подмодуль M, включающий все собственные подмодули из A. Следовательно, $A = \langle aG \rangle$ для любого элемента $a \in A \setminus M$.

Пусть $M = M^{\mathfrak{X}} \oplus M^{\overline{\mathfrak{X}}}$ — $\mathfrak{X}$-разложение модуля M. Если $A/M \in \mathfrak{X}$, то достаточно рассмотреть $A/M^{\mathfrak{X}}$, а если $A/M \notin \mathfrak{X}$, то — $A/M^{\overline{\mathfrak{X}}}$. Доказательство поэтому сводится к рассмотрению двух случаев: а) $A/M \in \mathfrak{X}$, $M = M^{\overline{\mathfrak{X}}}$; б) $A/M \notin \mathfrak{X}$, $M = M^{\mathfrak{X}}$.

Предположим, что $C_G(A/M) \neq 1$. Тогда $C_G(A/M)$ содержит нетривиальную циклическую подгруппу $\langle x \rangle$, нормальную в G. Централизатор $C_A(x)$ является G-подмодулем A и поэтому $C_A(x) \leqslant M$ (иначе $C_A(x) = A$ и $x \in C_G(A) = 1$). Таким образом, A/M — G-фактор модуля $A/C_A(x)$. Но $A(x-1) \leqslant M$ и если реализуется случай а), то $A(x-1)$ и слабо G-изоморфный с ним модуль $A/C_A(x)$ не содержат G-факторов, принадлежащих классу $\mathfrak{X}$, так как $M = M^{\overline{\mathfrak{X}}}$. Однако $A/M \in \mathfrak{X}$. Получили противоречие. Если реализуется случай б), то и у $A(x-1)$ и у $A/C_A(x)$ простые G-факторы принадлежат классу $\mathfrak{X}$, а это противоречит предположению $A/M \notin \mathfrak{X}$.

Предположим теперь, что $C_G(A/M) = 1$. Рассмотрим случай а). Из определения класса $\mathfrak{X}$ следует наличие у группы G абелевой нормальной подгруппы конечного индекса H. Из леммы 1 следует, что модуль A обладает конечным композиционным H-рядом. Рассмотрим минимальный по вложению H-подмодуль B модуля A, не входящий в M. Очевидно, $B + M/M$ — H-простой модуль и для любого $b \in B \setminus M$ $\langle bH \rangle = B$. Если $\langle bH \rangle \cap M \neq 0$, то возьмем $0 \neq y \in M$, представимый в виде $y = bf$, где $f \in \mathbb{Z}H$. Тогда $Bf \leqslant M$ и положим $K = \mathrm{Ann}_B(f)$. Если $K \nless M$, то ввиду минимальности B $K = B$ и $y = bf = 0$. Противоречие. Если $K < M$, то $B + M/M$ и M имеют ввиду H-изоморфизма $B/K \simeq Bf \leqslant M$ изоморфные H-простые факторы, входящие соответственно в $\mathfrak{X}_H$ и $\overline{\mathfrak{X}}_H$.

Если же $B \cap M = 0$, то B — H-простой модуль, не содержащийся в M. Значит, G-модуль порожденный B не содержится в M и поэтому должен совпадать с A, следовательно, A представим в виде прямой суммы H-простых подмодулей слабо H-изоморфных $B : A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$. Существует такой номер k, что $(B_1 \oplus \ldots \oplus B_k) \cap M = 0$, а $U = (B_1 \oplus \ldots \oplus B_k \oplus B_{k+1}) \cap \cap M \neq 0$. Поскольку B_{k+1} — неприводимый H-модуль, то $B_1 \oplus \ldots \oplus B_k \oplus \oplus U = B_1 \oplus \ldots \oplus B_{k+1}$ и, следовательно, подмодуль U, содержащийся в M, H-изоморфен B_{k+1}, который слабо H-изоморфен B.

Итак, в обоих случаях $B + M/M$ и M содержат слабо H-изоморфные простые H-факторы. Эти факторы принадлежат классам $\mathfrak{X}_H$ и $\overline{\mathfrak{X}}_H$ соответственно. Из определения класса $\mathfrak{X}$ следует, что ранг аддитивной группы H-модуля $B + M/M$ равен единице. Возможны два случая: 1) $B + M/M \simeq \simeq C_p$; 2) $B + M/M \simeq \mathbf{Q}$.

Рассмотрим первый случай: аддитивная группа $B + M/M$ имеет простой порядок p.

При этом аддитивная группа модуля A/M — конечная элементарная p-группа. Так как $C_G(A/M) = 1$, то группа G конечна, следовательно, сверхразрешима и не содержит неединичных нормальных p-подгрупп. Более того, сама группа A — элементарная абелева p-группа. В этом можно убедиться, рассмотрев гомоморфизм $\varphi : A \to pA$, действующий по правилу $\varphi(a) = pa$ для $a \in A$.

Рассмотрим нормальную циклическую подгруппу $\langle x \rangle$ группы G, имеющую максимальный простой порядок q. По теореме Машке A обладает неприводимым $\langle x \rangle$-подмодулем B_1 таким, что $B_1 \cap M = 0$. Очевидно, $A = = \langle B_1 G \rangle$. Поэтому M содержит простой $\langle x \rangle$-подмодуль, изоморфный $\langle x \rangle$-подмодулю B_1. Следовательно, модули A/M и M обладают слабо $\langle x \rangle$-изоморфными $\langle x \rangle$-факторами, которые по определению класса $\mathfrak{X}$ имеют ранг 1, значит, $|B_1| = p$. Элемент x нетривиально действует в B_1 (иначе $x \in \in C_G(A/M)$) и потому q делит $p - 1$. Число q максимальное среди простых делителей порядка группы G, поэтому p не делит $|G|$. Из теоремы Машке следует существование у M прямого дополнения в A. Это противоречит единственности максимального подмодуля M.

Рассмотрим второй случай: аддитивная группа модуля $B + M/M$ изоморфна $\mathbf{Q}$.

Если модуль M содержит элементы конечного порядка, то, переходя к фактор-модулям по периодической части модуля M, придем к ситуации, когда максимальный подмодуль не имеет кручения и, значит, аддитивная группа модуля M полна. Фактор-группа A/M ввиду G-простоты образа A/M, конечности индекса подгруппы H в G и того, что $B+M/M \simeq \mathbf{Q}$, также является полной группой без кручения к онечного ранга. Поэтому, так как $C_G(A/M) = 1$, группа G является конечным расширением свободной абелевой группы G_1 [5]. G-модули A/M и M имеют слабо H-изоморфные H-факторы, но не имеют слабо G-изоморфных G-факторов. Возьмем в группе G нормальную подгруппу F, содержащую H и имеющую максимальный индекс в группе G среди нормальных подгрупп с условием: модули A/M и M не имеют слабо F-изоморфных F-факторов. Для произвольной бесконечной циклической подгруппы $\langle x \rangle$ из H, нормальной в группе G, положим $S = = C_F(x)$. Если $S \neq F$, то по выбору подгруппы F модули A/M и M имеют слабо S-изоморфные S-факторы, которые по определению класса $\mathfrak{X}$ имеют ранг 1. По лемме 1 A обладает конечным композиционным S-рядом, поэтому существует прямое разложение $A = A_1 \oplus A_2$, где A_1 — S-подмодуль, каждый S-композиционный фактор которого одномерен, а A_2 — S-подмодуль, не обладающий одномерными композиционными S-факторами (следствие 1 леммы 1 работы [1]). S-подмодули A_1 и A_2 являются G-подмодулями (иначе S-подмодуль $\langle A_1 G \rangle \cap A_2$ не имеет одномерных S-композиционных факторов), значит, в разложении модуля A, не представимого по предположению в воде суммы своих собственных подмодулей, один член нулевой и, поскольку A/M и M содержат одномерные S-факторы, $A_2 = = 0$. Так как $|F : S| \leqslant 2$, то F-простые факторы имеют ранг не выше 2. Относительно F A также обладает разложением $A = A_3 \oplus A_4$, где F-подмодуль A_3 имеет только одномерные F-композиционные факторы, а A_4 — только двухмерные. F-подмодули A_3 и A_4 являются также и G-подмодулями модуля A, поэтому либо $A_3 = 0$, либо $A_4 = 0$. В обоих случаях модули M и

A/M должны обладать слабо F-изоморфными F-модмодулями, что противоречит выбору группы F.

Полученное противоречие показывает, что $S = F$. Поэтому из леммы 2 следует периодичность фактор-группы $F/Z(F)$. Ввиду гиперцикличности группы G фактор-группа $F/Z(F)$ локально конечна, значит коммутант F' группы F локально конечен. Но группа G является конечным расширением свободной абелевой группы G_1, поэтому $|F'| < \infty$ и $G_1 \cap F' = 1$ и, следовательно, $(F \cap G_1) \leqslant Z(F)$. Ввиду этого $|F : Z(F)| < \infty$ и рассмотрим подгруппу $Z = Z(F) \cap H$ конечного индекса в группе F.

Поскольку $B + M/M \simeq \mathbf{Q}$, то элемент $z \in Z$ действует в модуле $B + M/M$ умножением на некоторое число $\alpha \in \mathbf{Q}$. Возьмем элемент $\xi(z) = z - \alpha \in \mathbf{Q}Z$. Для него имеем $B\xi(z) \leqslant M$. Рассмотрим F-модуль $N = \langle BF \rangle$. Поскольку $z \in Z(F)$, то $N\xi(z) \leqslant M$. В модуле N рассмотрим минимальный по вложению F-подмодуль N_1, не входящий в M. Если $N_1\xi(z) \neq 0$, то, так как $N_1/K_1 \simeq N_1\xi(z) \leqslant M$ $(K_1 = \mathrm{Ann}_{N_1}(\xi(z)))$ и $K_1 \leqslant M$, ввиду минимальности N_1 модули $B+M/M$ и M имеют слабо F-изоморфные F-подмодули. Если же $N_1\xi(z) = 0$ для всех $z \in Z$, то каждый элемент из Z действует как умножение на некоторое рациональное число, поэтому $N_1 = (M \cap N_1) \oplus D$, где D — это Z-подмодуль модуля N_1. Поскольку $|F : Z| < \infty$ и $N_1 \cap M$ — F-подмодуль, то, как следует, например, из теоремы Гашюца [6] (гл. 1, теорема 17.5), можно в качестве D взять F-подмодуль. Этот F-подмодуль является простым и не входит в M. А так как $\langle DG \rangle = A$, то модули A/M и M имеют слабо F-изоморфные F-подмодули (изоморфные D). Снова пришли к противоречию. Итак, для случая а) теорема доказана.

Рассмотрим случай б): $A/M \notin \mathfrak{X}$, $M = M^{\mathfrak{X}}$. Возьмем ненулевой G-простой подмодуль M_1 модуля M. Подмодуль $M_1 \in \mathfrak{X}$ и, если $C_G(M_1) = 1$, то из определения класса $\mathfrak{X}$ следует, что G — почти абелева группа. Это позволяет провести рассуждения, аналогичные тем, которые проводились в случае а).

Если же $C_G(M) \neq 1$, то рассмотрим в $C_G(M)$ нетривиальную циклическую подгруппу $\langle x \rangle$, нормальную в группе G. Если $A(x-1) \leqslant M$, то $x \in C_G^{\mathfrak{X}}(A/M) = 1$, поэтому $A(x-1) = A$. Пусть $0 \neq b \in M_1$. Рассмотрим конечнопорожденную подгруппу K группы G, содержащую x и такую, что $T = T(x-1)$, $b \in T$, где $T = \langle aK \rangle$, $a \in A \setminus M$. По теореме о финитной аппроксимируемости конечнопорожденных расширений абелевых групп с помощью нильпотентных [7] у T существует такой K-подмодуль T_1, что $b \notin T_1$ и $|T : T_1| < \infty$. Перейдем к фактор-модулю $\overline{T} = T/T_1$. Ввиду того, что $b(x-1) = 0$, имеем $b + T_1 \in C_{\overline{T}}(x)$. Значит, $C_{\overline{T}}(x) \neq \overline{0}$ и $\overline{T} \neq \overline{T}(x-1)$, так как $\overline{T}(x-1) \simeq \overline{T}/C_{\overline{T}}(x)$. Отсюда следует $T \neq T(x-1)$. Пришли к противоречию. Теорема доказана.

1. *Зайцев Д. И.* Гиперциклические расширения абелевых групп // Группы, определяемые свойствами системы подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1979.— С. 16—37.
2. *Зайцев Д. И.* О прямых разложениях бесконечных абелевых групп с операторами // Укр. мат. журн.— 1988.— 40, № 3.— С. 303—309.
3. *Robinson D. J. S.* Homology and cohomology of locally supersoluble groups // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1987.— 102.— P. 233—250.
4. *Wilson J. S.* Some properties of groups inherited by normal subgroups of finite index // Math. Z.— 1970.— 114, N 1.— P. 19—21.
5. *Чарин В. С.* О группах автоморфизмов нильпотентных групп // Укр. мат. журн.— 1954.— 6, № 3.— С. 295—304.
6. *Huppert B.* Endliche Gruppen, I.— Berlin: Springer, 1967.— 793 S.
7. *Hall P.* On the finiteness of certain soluble groups // Proc. London Math. Soc.— 1959.— 9, N 36.— P. 595—622.

Получено 11.01.91