УДК 512.544.6

П. М. ГУДИВОК, д-р физ.-мат. наук (Ужгород. ун-т)

О силовских подгруппах полной линейной группы над полными дискретно нормированными кольцами

Найдены необходимые и достаточные условия сопряженности силовских подгрупп полной линейной группы над кольцом всех целых элементов конечного расширения поля p-адических чисел Q_p, $p \neq 2$.

Знайдені необхідні і достатні умови спряженості силовських підгруп повної лінійної групи над кільцем всіх цілих елементів скінченного разширення поля p-адичних чисел Q_p, $p \neq 2$.

Д. А. Супруненко [1], Р. Т. Вольвачев [2], В. С. Конюх [3], Лидхам-Грин и Плескен [4] описали силовские p-подгруппы полной линейной группы $GL(n, K)$ над произвольным полем K. В [1, 2] показано, что при $p \neq 2$ силовские p-подгруппы группы $GL(n, K)$ попарно сопряжены. При $p = 2$ это утверждение неверно [3, 4]. В. П. Платонов [5] доказал сопряженность силовских p-подгрупп алгебраических линейных групп над алгебраически замкнутым полем. А. Е. Залесский [6] изучил силовские p-подгруппы группы $GL(n, T)$, где T — тело конечного ранга над своим центром. В [7—10] исследовались силовские p-подгруппы полной линейной группы над некоторыми областями целостности. В [10] приводится критерий сопряженности силовских p-подгрупп группы $GL(n, \mathbb{Z})$ ($\mathbb{Z}$ — кольцо целых рациональных чисел).

В настоящей работе решается вопрос о сопряженности силовских подгрупп группы $GL(n, R_p)$, где R_p — кольцо всех целых элементов конечного расширения F_p поля p-адических чисел $\mathbf{Q}_p$, $p \neq 2$.

Пусть F — поле характеристики нуль, F^*— мультипликативная группа поля F, N_{p^r} — силовская p-подгруппа симметрической группы S_{p^r}, H — подгруппа группы $GL(n, F)$ и $H \wr N_{p^r}$ — сплетение групп H и N_{p^r}.

Как известно [1, 2], произвольная силовская p-подгруппа группы $GL(n, F)$ вполне приводима.

Лемма 1 [2]. *Пусть H_p — неприводимая силовская p-подгруппа группы $GL(n, F)$, $m = (F(\varepsilon) : F)$, $\varepsilon^p = 1$, $\varepsilon \neq 1$, и P_1 — подгруппа группы $GL(m, F)$, изоморфная силовской p-подгруппе группы $F(\varepsilon)^*$. Если $p > 2$ либо $p = 2$ и $i \in F$, $i^2 = -1$, то $n = p^t m$, $t \geqslant 0$, и группа H_p сопряжена с группой $P_1 \wr N_{p^t}$.*

Неприводимые силовские 2-подгруппы группы $GL(n, F)$ описаны в [3, 4]. В этом случае $n = 2^t$, $t \geqslant 0$. Пусть $i \notin F$, $i^2 = -1$, и $G(F(i)/F)$ —

группа Галуа поля $F(i)$ над F. Будем говорить, что поле F удовлетворяет условию А, если силовская 2-подгруппа H группы $F(i)^*$ конечна и $\psi(h) = h^{-1}$ для любого элемента $h \in H$ и любого нееденичного элемента ψ из группы $G(F(i)/F)$.

Пусть далее F_p — конечное расширение поля p-адических чисел $\mathbf{Q}_p$ и R_p — кольцо всех целых элементов поля F_p.

Предложение 1. *Пусть $p \neq 2$. Силовские 2-подгруппы группы $GL(n, F_p)$ попарно сопряжены.*

Доказательство. В силу леммы 1 предложение достаточно доказать при $i \notin F$, $i^2 = -1$, и $p \equiv -1 \pmod 4$. Пусть $H = \langle \psi \rangle$ — группа Галуа поля $F_p(i)$ над F_p. Из [3] вытекает, что силовские 2-подгруппы группы $GL(n, F_p)$ попарно сопряжены, если выполняются следующие условия:

1) в $F_p(i)^*$ есть элемент порядка 8;

2) поле F_p не удовлетворяет условию А;

3) существует 2-элемент из $F_p(i)^*$ с неединичной нормой над F_p.

Так как $p^2 - 1 = (-1 + 4s)^2 - 1 = 8s(-1 + 2s) = 2^r \cdot k$, $r \geqslant 3$, $(2, k) = 1$, то поле $\mathbf{Q}_p(i)$ содержит первообразный корень ξ степени 2^r из 1 $(r \geqslant 3)$. Значит, условие 1 выполняется. Очевидно, $\psi(\xi) = \xi^p = \xi^{-1+4s} = -\xi^{-1}$, т. е.

$$\psi(\xi) = -\xi^{-1}. \tag{1}$$

Следовательно, поле F_p не удовлетворяет условию А. Условие 3 эквивалентно условию [3] 3′) существует такой 2-элемент $\eta \in F_p(i)^*$, что η не представим в виде $\psi(u)u^{-1}$ $(u \in F_p(i)^*)$.

Пусть $\xi = \psi(u)u^{-1}$. Тогда $\psi(\xi) = \xi^{-1}$, а это противоречит (1). Поэтому условие 3′ выполняется. Предложение доказано.

Замечание 1. Из [3] нетрудно получить, что силовские 2-подгруппы группы $GL(n, \mathbf{Q}_2)$ попарно сопряжены тогда и только тогда, когда $n \leqslant 3$.

Предложение 2. *Пусть R_p — кольцо всех целых элементов поля F_p. Силовские q-подгруппы группы $GL(n, R_p)$ при $q \neq p$ попарно сопряжены.*

Доказательство. Пусть H — силовская q-подгруппа группы $GL(n, R_p)$, $q \neq p$. Покажем, что H будет также силовской q-подгруппой группы $GL(n, F_p)$. Предположим противное. Тогда $H \subset G$, $H \neq G$, где G — силовская q-подгруппа группы $GL(n, F_p)$. Из теории целочисленных представлений конечных групп вытекает [11], что существует такая матрица $C \in GL(n, F_p)$, что $C^{-1}GC = G_1 \subset GL(n, R_p)$. Следовательно, $C^{-1}HC = H_1 \subset G_1$. В силу результатов Маранды [11] найдется такая матрица $C_1 \in GL(n, R_p)$, что $C_1^{-1}HC_1 = H_1$. Тогда $H \subset C_1G_1C_1^{-1} = G_2 \subset GL(n, R_p)$ и $H \neq G_2$. Значит, H не является силовской q-подгруппой группы $GL(n, R_p)$. Полученное противоречие показывает, что H — силовская q-подгруппа группы $GL(n, F_p)$. Пусть H_1 и H_2 — силовские q-подгруппы группы $GL(n, R_p)$. Из доказанного выше, леммы 1 и предложения 1 следует, что H_1 и H_2 сопряжены в группе $GL(n, R_p)$. Предложение доказано.

Лемма 2 [12]. *Пусть H — конечная p-группа, Δ_1 и Δ_2 — неэквивалентные неприводимые матричные F_p-представления группы H. Тогда группа H обладает неразложимым R_p-представлением Γ вида*

$$\Gamma : h \to \begin{pmatrix} \Delta_1'(h) & A(h) \\ 0 & \Delta_2'(h) \end{pmatrix}, \quad h \in H,$$

где Δ_i' — R_p-представление группы H, F_p-эквивалентное представлению Δ_i, $i = 1, 2$.

Лемма 3. *Если некоторая неединичная силовская p-подгруппа группы $GL(n, F_p)$, $p \neq 2$, приводима, то в $GL(n, R_p)$ существуют несопряженные силовские p-подгруппы.*

Доказательство. Пусть P — силовская p-подгруппа группы F_p^* и H_p — неединичная приводимая силовская p-подгруппа группы $GL(n, F_p)$.

Рассмотрим ряд случаев.

1. Пусть $|P| = p^s$, $s > 0$. Представим число n в виде

$$n = a_0 + a_1 p + \ldots + a_r p^r, \ 0 \leqslant a_j < p, \ a_r \neq 0, \quad j = 0, \ldots, r.$$

Тогда в силу [1, 2] группа H_p сопряжена в $GL(n, F_p)$ с группой

$$B_p = \operatorname{diag}[G_{p^0}^{(a_0)}, G_p^{(a_1)}, \ldots, G_{p^r}^{(a_r)}], \tag{2}$$

где $G_{p^i} = P \wr N_{p^i}$, $i = 0, 1, \ldots, r$, $G_{p^i}^{(m)} = \operatorname{diag}[T_1, \ldots T_m]$, $T_j = G_{p^i}$, $j = 1, \ldots$ $\ldots, m$. Обозначим через H абстрактную группу, изоморфную группе B_p.

а). Пусть в группе B_p при некоторых i и $j (i < j)$ содержатся подгруппы G_{p^i} и G_{p^j}. В силу (2) группа H обладает точным R_p-представлением Γ степени n вида

$$\Gamma : h \rightarrow \operatorname{diag}[\Delta_0(h)^{(a_0)}, \ldots, \Delta_r(h)^{(a_r)}],$$

где $h \in H$ и Δ_k — такое неприводимое R_p-представление группы H, что $\operatorname{Im} \Delta_k = G_{p^k}$, $k = 0, 1, \ldots, r$. Ввиду леммы 2 существует точное R_p-представление Γ' степени n группы H вида

$$\Gamma' : h \rightarrow \Gamma'(h) = \operatorname{diag}[\Gamma_1(h), \Gamma_2(h)],$$

где $\Gamma_1(h)$ получается из $\Gamma(h)$ отбрасыванием по одному блоку $\Delta_i(h)$ и $\Delta_j(h)$, а Γ_2 является неразложимым R_p-представлением группы H вида

$$\Gamma_2 : h \rightarrow \Gamma_2(h) = \begin{pmatrix} \Delta_i'(h) & A(h) \\ 0 & \Delta_j'(h) \end{pmatrix} \tag{3}$$

(Δ_i' и Δ_j' — некоторые неприводимые R_p-представления группы H, F_p-эквивалентные соответственно представлениям Δ_i и Δ_j). Пусть $\operatorname{Im} \Gamma' = B_p'$. Покажем, что подгруппы B_p и B_p' не сопряжены в группе $GL(n, R_p)$. Предположим противное. Тогда существует такая матрица $C \in GL(n, R_p)$, что

$$C^{-1} \Gamma'(h) C = \Gamma(\psi(h)), \quad h \in H, \tag{4}$$

где ψ — некоторый автоморфизм группы H. Очевидно, $\Gamma'' : h \rightarrow \Gamma''(h) = \Gamma(\psi(h))$, $h \in H$, — вполне приводимое R_p-представление группы H. В силу (3) представление Γ' не является вполне приводимым R_p-представлением группы H. Отсюда и из справедливости теоремы Крулля — Шмидта для R_p-представлений конечных групп [13] вытекает, что представления Γ' и Γ'' не эквивалентны над кольцом R_p. Учитывая (4), получаем противоречие. Следовательно, силовские p-подгруппы B_p и B_p' группы $GL(n, R_p)$ не сопряжены.

б). Пусть $B_p = G_{p^r}^{(a_r)}$, $1 < a_r < p$, $r \geqslant 0$. Обозначим через L_p абстрактную группу, изоморфную группе G_{p^r}. Очевидно, группа $H = T_1 \times \ldots$ $\ldots \times T_{a_r}$, $T_j \cong L_p$; $j = 1, \ldots a_r$, изоморфна группе B_p. Рассмотрим подгруппу $T = T_1 \times T_2$ группы H. Пусть ψ_i — точное R_p-представление группы T_i с $\operatorname{Im} \psi_i = G_{p^r}$, $i = 1, 2$. Тогда ψ_i является неприводимым R_p-представлением группы T_i. Очевидно,

$$\Gamma_1 : h_1 \rightarrow \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \psi_1(h_1) \end{pmatrix}, \quad h_2 \rightarrow \begin{pmatrix} \psi_2(h_2) & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

($h_i \in T_i$; $i = 1, 2$; E — единичная матрица) — точное R_p-представление группы T с $\operatorname{Im} \Gamma_1 = \operatorname{diag}[G_{p^r}, G_{p^r}]$. Легко видеть, что R_p-представления $\Delta_1 : h_1 \rightarrow \psi_1(h_1)$, $h_2 \rightarrow E$ и $\Delta_2 : h_1 \rightarrow E$, $h_2 \rightarrow \psi_2(h_2)$ группы T неприводимы и не эквивалентны над F_p. Тогда по лемме 2 группа T обладает точным неразложимым R_p-представлением Γ_2 вида

$$\Gamma_2\colon h \to \begin{pmatrix} \Delta_1'(h) & A(h) \\ 0 & \Delta_2'(h) \end{pmatrix}, \quad h \in T,$$

где Δ_i' — некоторое R_p-представление группы T, F_p-эквивалентное представлению Δ_i, $i = 1,2$. Пусть $\operatorname{Im}\Gamma_2 = S$. Далее такими же рассуждениями как в случае а) получаем, что силовские p-подгруппы B_p и $B_p' = \operatorname{diag}[S, G_{p^r}^{(a_r-2)}]$ группы $GL(n, R_p)$ не сопряжены.

Итак, при $|P| = p^s$, $s > 0$, лемма доказана.

2. Пусть $|P| = 1$. Представим число n в виде $n = mn_0 + c$, где $m = (F_p(\varepsilon) : F_p)$ $(\varepsilon^p = 1,\ \varepsilon \neq 1)$, $0 \leqslant c < m$, $n_0 = b_0 + b_1p + \ldots + b_rp^r$ $(0 \leqslant b_j < p,\ b_r \neq 0;\ j = 0,1, \ldots, r)$. Тогда в силу [2] всякая силовская p-подгруппа группы $GL(n, F_p)$ сопряжена с группой

$$G = \operatorname{diag}[1^{(c)}, G_{mp^0}^{(b_0)}, \ldots, G_{mp^r}^{(b_r)}],$$

где $G_{mp^j} = P_1 \wr N_{p^j}$ (P_1 — p-подгруппа группы $GL(m, R_p)$, изоморфная силовской p-подгруппе группы $F_p(\varepsilon)^*$). Далее лемма доказывается по такой же схеме, как и в случае 1. Лемма доказана.

Замечание 2. Лемма 3 справедлива и при $p = 2$, если $i \in F_2$, $i^2 = -1$.

Теорема 1. *Пусть силовская p-подгруппа группы $GL(n, F_p)$, $n > 1$, $p \neq 2$, неприводима. Силовские p-подгруппы группы $GL(n, R_p)$ попарно сопряжены тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) $n = (F_p(\varepsilon) : F_p)$ $(\varepsilon^p = 1,\ \varepsilon \neq 1)$ *и* $F_p(\varepsilon) = T_p(\xi)$, *где* T_p — *поле инерции поля* F_p *и* $\langle \xi \rangle$ — *силовская p-подгруппа группы* $F_p(\varepsilon)^*$;

2) $n < (F_p(\varepsilon) : F_p)$.

Доказательство. Из леммы 1 вытекает, что $n = p^tm$, $t \geqslant 0$; $m = (F_p(\varepsilon) : F_p)$, и силовская p-подгруппа группы $GL(n, F_p)$ сопряжена с группой $\widetilde{G}_{p^t} = P_1 \wr N_{p^t}$, где P_1 — подгруппа группы $GL(m, R_p)$, изоморфная силовской p-подгруппе $T_1 = \langle \xi \rangle$, $\xi^{p^r} = 1$, $r \geqslant 1$, группы $F_p(\varepsilon)^*$. Пусть $\Phi_{p^r}(x)$ — полином деления круга порядка p^r, $r \geqslant 1$. Тогда

$$\Phi_{p^r}(x) = f_1(x) \ldots f_s(x), \tag{5}$$

где $f_i(x)$ — неприводимый полином степени m над кольцом R_p с единичным коэффициентом при старшем члене $(i = 1, \ldots, s)$. Пусть $f_1(\xi) = 0$. Следовательно, $P_1 = \langle \widetilde{\xi} \rangle$, где $\widetilde{\xi}$ — сопровождающая матрица для $f_1(x)$. Из [2] вытекает, что группа $G_{p^t} = \langle \xi \rangle \wr N_{p^t}$ является мономиальной силовской p-подгруппой группы $GL(p^t, R_p[\xi])$. Каждая матрица $\widetilde{A}$ из группы $\widetilde{G}_{p^t}$ получается из некоторой матрицы $A \in G_{p^t}$ заменой в ней ξ^d на $\widetilde{\xi}^d$, $d \geqslant 0$. Так как $F_p(\xi) = F_p(\varepsilon)$, то в силу (5) $\Phi_p(x) = \psi_1(x) \ldots \psi_k(x)$, где $\psi_i(x)$ — неприводимый полином степени m над R_p с единичным коэффициентом при старшем члене $(i = 1, \ldots, k)$. Очевидно, $p - 1 = mk$.

Рассмотрим ряд случаев.

1. Пусть $n = p^tm$, где $t \geqslant 1$ и $m < p - 1$. Тогда циклическая группа $H = \langle a \rangle$ порядка p обладает неприводимым R_p-представлением $\Delta\colon a \to \widetilde{\varepsilon}$ степени m, где $\widetilde{\varepsilon}$ — сопровождающая матрица для $\psi_1(x)$. Рассмотрим силовскую p-подгруппу H_{p^t} группы $GL(n, R_p)$, содержащую циклическую подгруппу $\langle A \rangle$ порядка p, где

$$A = \begin{pmatrix} \widetilde{\varepsilon} & \langle 1 \rangle & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad \langle 1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

E — единичная матрица. Покажем, что подгруппы H_{p^t} и $\widetilde{G}_{p^t}$ не сопряжены в $GL(n, R_p)$. Предположим, что они сопряжены. Тогда существует такая матрица $C \in GL(n, R_p)$, что

$$C^{-1}AC = \widetilde{A}_1, \tag{6}$$

где $A_1 \in G_{p^t}$ и $\widetilde{A}_1 \in \widetilde{G}_{p^t}$. Так как группа G_{p^t} мономиальна, то найдется такая матрица $C_1 \in GL(p^t, R_p[\xi])$, что

$$C_1^{-1}A_1C_1 = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_s \end{pmatrix} = A_2, \tag{7}$$

где B_i — матрица одного из таких видов:

$$(\alpha), \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ E_{p-1} & 0 \end{pmatrix}$$

($\alpha^p = 1$, E_{p-1} — единичная матрица порядка $p-1$). Из (6) и (7) вытекает, что существует такая матрица $C_2 \in GL(n, R_p)$, что

$$C_2^{-1}AC_2 = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_l \end{pmatrix} = L,$$

где D_i одна из таких матриц:

$$(1), \quad \widetilde{\varepsilon}_j \, (j = 1, \ldots, k), \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ E_{p-1} & 0 \end{pmatrix}$$

($\widetilde{\varepsilon}_j$ — сопровождающая матрица для $\psi_j(x)$). Таким образом, мы показали, что R_p-представления $\Gamma : a \to A$ и $\Gamma' : a \to L$ группы $H = \langle a \rangle$ R_p-эквивалентны. Но это невозможно, так как среди неразложимых компонент представления Γ' не содержится неразложимое представление

$$a \to \begin{pmatrix} \widetilde{\varepsilon} & \langle 1 \rangle \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, силовские p-подгруппы H_{p^t} и $\widetilde{G}_{p^t}$ группы $GL(n, R_p)$ не сопряжены.

2. Пусть $n = p^t(p-1)$, где $t > 1$. Легко видеть, что если η — первообразный корень степени p^2 из 1, то

$$(F_p(\eta) : F_p) = p^d(p-1), \quad 0 \leqslant d \leqslant 1. \tag{8}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $(F_p(\eta) : F_p) = p(p-1)$. Обозначим через H_{p^t} силовскую p-подгруппу группы $GL(n, R_p)$, содержащую циклическую группу $\langle A \rangle$ порядка p^2, где

$$A = \begin{pmatrix} \widetilde{\eta} & \langle 1 \rangle & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad \langle 1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\widetilde{\eta}$ — сопровождающая матрица для $\Phi_{p^2}(x)$. Докажем, что подгруппы H_{p^t} и $\widetilde{G}_{p^t} = \langle \widetilde{\xi} \rangle \wr N_{p^t}$ не сопряжены в $GL(n, R_p)$. Предположим, что они сопряжены. Тогда существует такая матрица $C \in GL(n, R_p)$, что $C^{-1}AC = \widetilde{A}_1$, где $A_1 \in G_{p^t}$, $\widetilde{A}_1 \in \widetilde{G}_{p^t}$. Из мономиальности группы G_{p^t} получаем, что найдется такая матрица $C_1 \in GL(p^t, R_p[\xi])$, что

$$C_1^{-1} A_1 C_1 = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_s \end{pmatrix} = A_2,$$

где B_i — матрица одного из таких видов:

$$(\alpha), \quad \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ E_{p-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ E_{p^2-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$(\alpha^{p^2} = 1,\ \beta^p = 1,\ E_j$ — единичная матрица порядка j). Следовательно, R_p-представление $\Gamma : b \to A$ циклической группы $H = \langle b \rangle$ порядка p^2 R_p-эквивалентно представлению Γ' вида

$$\Gamma' : b \to \Gamma'(b) = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_l \end{pmatrix},$$

где $\Gamma_i : b \to D_i$ — неразложимое R_p-представление группы $H = \langle b \rangle$ степени $n_i \in \{1,\ p-1,\ p,\ p(p-1),\ p^2\}$. Но это невозможно, так как среди неразложимых компонент представления Γ есть неразложимое представление степени $p(p-1)+1$. Отсюда вытекает, что при $d = 1$ (см. (8)) теорема доказана.

Пусть далее $(F_p(\eta) : F_p) = p - 1$, т. е. $d = 0$ (см. (8)). Тогда $\Phi_{p^2}(x) = f_1(x) \ldots f_p(x)$, где $f_i(x)$ — неприводимый полином степени $p-1$ над R_p с единичным коэффициентом при старшем члене ($i = 1, \ldots, p$). Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_1 & \langle 1 \rangle & 0 \\ 0 & \tilde{\eta}_2 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad \langle 1 \rangle = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\tilde{\eta}_i$ — сопровождающая матрица для $f_i(x)$, $i = 1, 2$. Рассуждая, как и в случае $d = 1$, получаем, что и при $d = 0$ существуют несопряженные силовские p-подгруппы группы $GL(n, R_p)$.

3. Пусть $n = p(p-1)$. Если $\Phi_{p^2}(x)$ — приводимый полином над R_p, то доказательство аналогично случаю 2, когда $d = 0$ (см. 8)).

Пусть далее $\Phi_{p^2}(x)$ — неприводимый полином над R_p. Обозначим через H_p силовскую p-подгруппу группы $GL(p(p-1), R_p)$, содержащую абелеву подгруппу $T = \langle A_1, A_2 \rangle$ порядка p^2, где

$$A_1 = (\tilde{\varepsilon} \otimes E_p), \quad A_2 = \begin{pmatrix} A_2' & 0 \\ 0 & E_r \end{pmatrix}, \quad A_2' = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon} & E_{p-1} \\ 0 & E_{p-1} \end{pmatrix},$$

E_r — единичная матрица порядка r, $\tilde{\varepsilon} \otimes E_p$ — тензорное произведение матриц $\tilde{\varepsilon}$ и E_p. Предположим, что силовские p-подгруппы $\tilde{G}_p = \langle \tilde{\varepsilon} \rangle \wr N_p$ и H_p группы $GL((p-1)p, R_p)$ сопряжены. Тогда существует такая матрица $C \in GL((p-1)p, R_p)$, что $C^{-1} H_p C = \tilde{G}_p$. Следовательно,

$$C^{-1} A_1 C = \tilde{B}_1, \quad C^{-1} A_2 C = \tilde{B}_2, \tag{9}$$

где $B_i \in G_p = \langle \varepsilon \rangle \wr N_p$, $\tilde{B}_i \in \tilde{G}_p$, $i = 1, 2$. Легко видеть, что существует такая матрица $C_1 \in GL(p, R_p[\varepsilon])$, что $C_1^{-1} B_1 C_1 = D_1$, $C_1^{-1} B_2 C_1 = D_2$, где D_2 — одна из матриц

$$V_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon^{r_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon^{r_p} \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ E_{p-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$1 \leqslant r_i \leqslant p; \qquad i = 1, \ldots, p.$$

В случае $D_2 = V_1$ из (9) вытекает, что для некоторой матрицы $C_2 \in GL(p(p-1), R_p)$ получаем $C_2^{-1} A C_2 = \tilde{V}_1$. Но это невозможно, так как

R_p-представления $a \to A_2$ и $a \to \widetilde{V}_1$ группы $H_1 = \langle a \rangle$ порядка p не эквивалентны над R_p.

Пусть далее $D_2 = V_2$. Тогда из условия $V_2 D_1 = D_1 V_2$ находим $D_1 = \varepsilon^k E_p$, $1 \leqslant k < p$. Обозначим через $H = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle$, $a_1^p = a_2^p = 1$, абелеву группу типа (p, p). Очевидно, отображение $\Gamma : a_1 \to D_1$, $a_2 \to V_2$ является неразложимым $R_p[\varepsilon]$-представлением группы H. Отсюда вытекает, что $\Gamma' : a_1 \to \widetilde{D}_1$, $a_2 \to \widetilde{V}_2$ — неразложимое R_p-представление группы H, R_p-эквивалентное представлению $\Gamma : a_i \to A_i$, $i = 1, 2$. Но так как Γ — разложимое R_p-представление группы H, то полученное противоречие показывает, что подгруппы H_p и $\widetilde{G}_p$ не сопряжены в $GL(p(p-1), R_p)$.

4. Пусть $n = (F_p(\varepsilon) : F_p)$, $\varepsilon^p = 1$, $\varepsilon \neq 1$. Тогда в силу леммы 1 $\widetilde{G} = \langle \widetilde{\xi} \rangle$, $\xi^{p^r} = 1$, $r \geqslant 1$, будет силовской p-подгруппой группы $GL(n, R_p)$.

а). Пусть $F_p(\varepsilon) \neq T_p(\xi)$. Тогда $L = R_p[\xi]$ не является кольцом всех целых элементов поля $F_p(\varepsilon)$. Обозначим через t простой элемент кольца R_p. Из [11] вытекает, что в идеале $V = tL + (\xi - 1)L$ кольца L реализуется такое R_p-представление $\Gamma : a \to A$ циклической группы $H = \langle a \rangle$ порядка p^r $(ax = \xi x,\ x \in V)$, что группы $\langle \widetilde{\xi} \rangle$ и $\langle A \rangle$ не сопряжены в $GL(n, R_p)$.

б). Пусть $F_p(\varepsilon) = T_p(\xi)$. Тогда $R_p[\xi]$ — кольцо всех целых элементов поля $F_p(\varepsilon)$. Циклическая группа $H = \langle a \rangle$ порядка p_r обладает точно s неприводимыми неэквивалентными R_p-представлениями степени n: $\Delta_i : a \to \widetilde{\xi}_i$, $i = 1, \ldots, s$, где $f_i(\xi_i) = 0$ (см. (5)). Легко показать, что подгруппы $\langle \widetilde{\xi}_i \rangle$, $i > 1$, и $\langle \widetilde{\xi}_1 \rangle$ сопряжены в $GL(n, R_p)$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть F_p — конечное расширение поля p-адических чисел $\mathbf{Q}_p$, T_p — поле инерции поля F_p и R_p — кольцо всех целых элементов поля F_p, $p \neq 2$. Силовские q-подгруппы группы $GL(n, R_p)$, $n > 1$, попарно сопряжены тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий;* 1) $q \neq p$; 2) $q = p$, $n = (F_p(\varepsilon) : F_p)$, $\varepsilon^p = 1$, $\varepsilon \neq 1$, *и* $F_p(\varepsilon) = T_p(\xi)$, *где* $\langle \xi \rangle$ — *силовская p-подгруппа группы* $F_p(\varepsilon)^*$; 3) $q = p$ *и* $n < (F_p(\varepsilon) : F_p)$.

Доказательство теоремы 2 вытекает из предложения 2, леммы 3 и теоремы 1.

1. *Супруненко Д. А.* Линейные p-группы // Докл. АН БССР.— 1960.— **4**, № 6.— С. 233—235.
2. *Вольвачев Р. Т.* p-Подгруппы Силова полной линейной группы // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1963.— 27, № 5.— С. 1031—1054.
3. *Конюх В. С.* О линейных p-группах // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.— 1987.— № 1.— С. 3—8.
4. *Leedham-Green C. R., Plesken W.* Some remarks of sylow subgroups of general linear groups // Math. Z.— 1986.— **191**.— P. 529—535.
5. *Платонов В. П.* Теория алгебраических линейных групп и периодические группы // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1966.— 30, № 3.— С. 573—620.
6. *Залесский А. Е.* Силовские p-подгруппы полной линейной группы над телом // Там же.— 1967.— **31**, № 5.— С. 1149—1158.
7. *Гудивок П. М., Кирилюк А. А.* Силовские p-подгруппы полной линейной группы над дискретно нормированными кольцами // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1979.— № 5.— С. 326—329.
8. *О конечных* подгруппах группы $CL(n, \mathbb{Z})$ / П. М. Гудивок, А. А. Кирилюк, В. П. Рудько, А. И. Циткин // Кибернетика.— 1982.— № 6.— С. 71—82.
9. *Ващук Ф. Г., Гудивок П. М.* Целочисленные p-адические представления конечных абелевых p-групп // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1986.— № 1.— С. 3—6.
10. *Гудивок П. М.* О силовских подгруппах полной линейной группы над кольцом целых чисел // Алгебра и анализ.— 1990.— 2, № 6.— С. 121—128.
11. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.— М. : Наука, 1969.— 668 с.
12. *Reiner I.* Module extensions and blocks // J. Algebra.— 1967.— N 5.— P. 157—163.
13. *Боревич З. И., Фаддеев Д. К.* Теория гомологий в группах // Вестн. Ленингр. ун-та.— 1959.— № 7.— С. 72—87.

Получено 10.01.91