УДК 519.45

В. И. СЕНАШОВ, канд. физ.-мат. наук (ВЦ СО АН СССР, Красноярск)

Группы с условием минимальности для не почти слойно конечных подгрупп

Доказана теорема, характеризующая в классе периодических групп без инволюций класс почти слойно конечных групп: любая сопряженно бипримитивно конечная группа без инволюций, удовлетворяющая условию минимальности для не почти слойно конечных подгрупп, почти слойно конечна.

Доведена теорема, що характеризує в класі періодичних груп без інволюцій клас майже шарово скінченних груп: будь-яка спряжено біпримітивно скінченна група без інволюцій, яка задовольняє умову мінімальності для не майже шарово скінченних підгруп, майже шарово скінченна.

Группа G удовлетворяет условию сопряженно бипримитивной конечности, если для любой конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу.

Слойно конечные группы впервые появились в работах С. Н. Черникова, где и получили полное описание [1]. Автором ранее был получен следующий результат [2, 3]: периодическая группа тогда и только тогда является слойно конечной, когда она сопряженно бипримитивно конечна и в ней любая локально разрешимая подгруппа слойно конечна. В настоящей работе продолжается изучение вопроса о том, как свойства подгрупп влияют на строение группы. Подобные вопросы в нашей стране первым рассматривал О. Ю. Шмидт (см., например, [4]).

Определения. Напомним определения специальных терминов, использующихся при доказательстве основного результата.

Подгруппа H группы G называется *бесконечно изолированной* в G, если H содержит централизаторы всех своих элементов простых порядков, которые имеют бесконечные пересечения с H.

Подгруппа H группы G называется *сильно изолированной* в G, если H содержит централизаторы всех своих элементов простых порядков.

Группа называется *слойно конечной*, если множество ее элементов любого данного порядка конечно [1].

Группа называется *почти слойно конечной*, если она является конечным расширением слойно конечной группы.

Группа удовлетворяет *условию минимальности для не почти слойно конечных подгрупп*, если любая ее убывающая цепочка подгрупп обрывается на почти слойно конечной группе.

Группа называется *сопряженно бипримитивно конечной*, если для любой конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу [5]. (Ситуация, когда в группе G все подгруппы гр (a, a^g), $g \in G$, конечны для ее *фиксированного* элемента a простого порядка, рассматривалась в [6].)

Известные результаты и вспомогательные утверждения. 1. *Всякая сопряженно бипримитивно конечная группа с условием минимальности для подгрупп является черниковской группой* [7].

2. Теорема Черникова. *Если бесконечная периодическая локально разрешимая группа имеет конечную силовскую p-подгруппу по некоторому простому числу, то ее максимальный нормальный делитель, не содержащий p-элементов, имеет в ней конечный индекс* [1].

3. *Любая почти слойно конечная p-группа является черниковской* [1].

4. Теорема Карганолова. *Локально разрешимая группа с черниковскими силовскими подгруппами обладает полной частью, являющейся прямым произведением квазициклических групп* [8].

5. *Если в сопряженно бипримитивно конечной группе G локально конечная нормальная подгруппа R слойно конечна, то фактор-группа G/R также сопряженно бипримитивно конечна* (см., например, [2]).

6. *Если в группе все подгруппы почти слойно конечны, то и в фактор-группе все подгруппы почти слойно конечны.*

Доказательство предложения 6 очевидно.

7. *Всякая сопряженно бипримитивно конечная группа без инволюций, удовлетворяющая условию минимальности для абелевых подгрупп, является черниковской* [10].

8. *Периодическая сопряженно бипримитивно конечная группа без инволюций тогда и только тогда является слойно конечной, когда в ней все локально конечные подгруппы слойно конечны* [2].

9. *Пусть T — группа, D — ее локально конечная подгруппа с черниковскими силовскими подгруппами; A, S—некоторые подгруппы из T. Если D обладает такими подгруппами F, R ($R \subseteq F$), что $|D:R| < \infty$ и $A, D < N_T(F)$, $S, D < N_T(R)$, то в D существует подгруппа X конечного индекса в D и $A, S, D \subset N_T(X)$* [11].

10. Теорема Прюфера. *Абелева p-группа конечного периода разлагается в прямую сумму циклических групп* (см., например, [12]).

11. *Абелева p-группа тогда и только тогда является черниковской группой, когда ее нижний слой конечен* (см., например, [1]).

12. *Множество простых делителей порядков элементов бесконечной нечерниковской почти слойно конечной группы бесконечно.*

Доказательство. Предположим, что предложение неверно и G — группа-контрпример. Тогда множество $\pi(G)$ простых делителей порядков элементов группы G конечно. В этом случае любая абелева подгруппа из G разлагается в прямое произведение конечного числа силовских подгрупп. По предложению 3 силовские подгруппы — черниковские, значит G удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп. Получили противоречие с предложением 7. Предложение доказано.

13. *Пусть G — группа, H — ее подгруппа, a — некоторый элемент простого порядка $p \neq 2$ из H, удовлетворяющие условиям:*

а) *(G, H) — пара Фробениуса, т. е. $H \cap g^{-1}Hg = 1$ для любого $g \in G \setminus H$;*

б) *для любого $g \in G \setminus H$ группа* гр $(a, g^{-1}ag)$ *конечна.*

Тогда $G = F_p \leftthreetimes H$, *где* F_p — *периодическая группа, не содержащая p-элементов, а* H *либо обладает единственной инволюцией, либо* $H = N_G(a)$ [13].

14. *В локально конечной группе с черниковскими силовскими подгруппами силовские p-подгруппы сопряжены* [11].

15. *Периодическая почти локально разрешимая группа с почти регулярным элементом простого порядка почти нильпотентна* [14].

16. Теорема Файта — Томпсона. *Конечная группа нечетного порядка разрешима* [15].

17. Теорема Брауэра. *Пусть* G — *конечная группа вида* $G = O_{p'}(G)R$, *где* R — *элементарная абелева подгруппа порядка* p^2. *Тогда* $O_{p'}(G)$ *содержится в подгруппе, порожденной централизаторами неединичных элементов из* R [16].

18. Лемма Фраттини. *Пусть* G — *конечная группа,* H — *нормальный делитель,* A — *силовская p-подгруппа из* H. *Тогда* $G = H \cdot N_G(A)$ [12].

19. *В черниковской p-группе лишь конечное число несопряженных элементов имеет конечные централизаторы* [9].

Основной результат. Теорема. *Всякая сопряженно бипримитивно конечная группа без инволюций либо почти слойно конечна, либо содержит собственную не почти слойно конечную подгруппу.*

Заметим, что в теореме условие сопряженно бипримитивной конечности отбросить нельзя ввиду известных примеров А. Ю. Ольшанского.

Доказательство теоремы проведем от противного. Пусть она неверна и G — контрпример к ней. Выделим этапы 1—13 доказательства теоремы, которые назовем леммами.

Лемма 1. *G не может быть p-группой.*

Доказательство. Пусть G является p-группой. Среди ее элементарных абелевых подгрупп, очевидно, найдется максимальная подгруппа R. Если R — бесконечная подгруппа, то она не может быть собственной подгруппой G из-за почти слойной конечности всех собственных подгрупп группы G. По предложению 10 G разлагается в прямое произведение циклических подгрупп. Следовательно, в ней существует подгруппа конечного индекса, по условию являющаяся почти слойно конечной. Противоречие. Значит, максимальная элементарная абелева подгруппа R группы G конечна. Это значит, что любая абелева подгруппа из G имеет конечный нижний слой. Тогда по предложению 11 абелевы подгруппы из G удовлетворяют условию минимальности. Отсюда вытекает по предложению 7, что G должна быть черниковской группой, что невозможно ввиду выбора контрпримера. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2. *Силовские p-подгруппы в G — черниковские.*

Доказательство. Ввиду леммы 1 силовские p-подгруппы являются собственными подгруппами в G. Значит, они почти слойно конечны. Учитывая, что это p-группы, по предложению 3 получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 3. *Группа G не локально конечна.*

Доказательство. Пусть группа G локально конечна. По теореме Файта—Томпсона она локально разрешима и по лемме 2 ее силовские p-подгруппы — черниковские. Тогда по предложению 4 G обладает полной частью A, разлагающейся в прямое произведение квазициклических подгрупп. Ввиду выбора контпримера $G \neq A$. По определению полной части в фактор-группе G/A силовские p-подгруппы конечны. Если G/A — бесконечная группа, то по предложению 2 G/A содержит собственную нормальную подгруппу конечного индекса, полный прообраз которой, очевидно, является подгруппой конечного индекса в G. Если G/A конечна, то снова в G нашлась собственная подгруппа конечного индекса. По условию теоремы эта подгруппа является почти слойно конечной, но тогда почти слойно конечной будет и сама группа G. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 4. *Среди групп, являющихся контрпримером к теореме, существует группа G, обладающая единичным локально конечным радикалом.*

Доказательство. Если локально конечный радикал $L(G) \neq 1$, то рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G/L(G)$. Она уже обладает только единичным локально конечным радикалом $L(\overline{G})$. Действительно, если $L(\overline{G}) \neq 1$, то полный прообраз $L(\overline{G})$ в группе G по теореме Шмидта локально конечен и, очевидно, является нормальной подгруппой в G. Противоречие с определением локально конечного радикала. Таким образом, группу $\overline{G}$ можно выбрать в качестве контрпримера к теореме. По предложениям 5, 6 она удовлетворяет всем условиям теоремы и, по доказанному, ее локально конечный радикал тривиален. Лемма доказана.

В дальнейшем считаем в соответствии с леммой 4, что в G локально конечный радикал тривиален.

Лемма 5. *Пусть F, M — две бесконечные максимальные почти слойно конечные подгруппы группы G, R_F и R_M — их слойно конечные радикалы. Тогда $R_F \cap R_M = 1$.*

Доказательство. Пусть $b \in R_F \cap R_M$, $b \neq 1$. Если $R_F \cap R_M$ имеет конечные индексы в F и M, то по предложению 9 и лемме 3 получаем противоречие с максимальностью F.

Пусть тогда для одной из подгрупп, например, для M, $|M : R_M \cap \cap R_F| = \infty$. Подгруппа $C = C_G(b)$ ввиду свойств слойно конечных групп пересекается с F и M по подгруппам конечного индекса. По лемме 3 C — собственная подгруппа в G. Тогда она почти слойно конечна по выбору контрпримера. Слойно конечный радикал R_C группы C, очевидно, также пересекается с F и M по подгруппам конечного индекса. Так как $|M : : R_C \cap M| < \infty$, а $|M : R_F \cap M| = \infty$, то R_C не лежит в F. Ввиду слойной конечности группы R_G, в ней найдется подгруппа B такая, что $F \cap R_C = F \cap B$, $|B : F \cap B| < \infty$. По предложению 9 существует подгруппа $T \leqslant B \cap F$, в нормализатор которой входят подгруппы F и B. Из-за максимальности подгруппы F получаем $G = N_G(T)$. Но группа G неединичным локально конечным радикалом не обладает по лемме 3. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 6. *Среди собственных нечерниковских подгрупп группы G найдется хотя бы одна, не являющаяся слойно конечной.*

Доказательство. Действительно, если это не так, то ввиду слойной конечности собственных подгрупп по предложению 8 и лемме 3 получаем противоречие с выбранным контрпримером. Лемма доказана.

По предложению 1 все собственные подгруппы группы G не могут быть черниковскими, так как в этом случае сама группа G была бы черниковской, и, значит, почти слойно конечной. Значит, в G найдется собственная нечерниковская подгруппа X. Не нарушая общности рассуждений, будем считать ввиду леммы 6, что группа X не слойно конечна. По лемме Цорна и лемме 3 среди всех нечерниковских собственных не слойно конечных подгрупп найдется максимальная. Зафиксируем за этой подгруппой в дальнейшем обозначение H.

Лемма 7. *H является бесконечно изолированной подгруппой.*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно и найдется элемент $a \in H$ простого порядка, для которого $C_G(a)$ не лежит в H и в то же время $|C_G(a) \cap H| = \infty$. Очевидно, пересечение $C_G(a) \cap R_H = D$ бесконечно. Включим $C_G(a)$ в максимальную почти слойно конечную подгруппу B. Тогда $D \leqslant H \cap B$. Так как $|H : R_H| < \infty$, то и индекс $|D : R_H \cap D|$ конечен. Аналогично, $|D : R_B \cap D| < \infty$. Рассмотрим пересечение $T = (R_H \cap D) \cap (R_B \cap D)$. Поскольку пересечение подгрупп конечного индекса в группе само имеет конечный индекс в ней, индекс $|D : T|$ конечен. Следовательно, пересечение $R_H \cap R_B$ нетривиально и по лемме 5 $B = H$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть b — элемент простого порядка и пересечения $C_G(b) \cap H$, $C_G(b) \cap H^g$ — бесконечны. Тогда $H = H^g$.*

Доказательство. По лемме 7 $C_G(b) \leqslant H$ и $C_G(b) \leqslant H^g$. Следовательно, $C_G(b) \leqslant H \cap H^g$. Так как $C_G(b)$ бесконечен, то $R_H \cap C_G(b)$ — бесконечная группа и $|C_G(b) : R_H \cap C_G(b)| < \infty$. Аналогично $|C_G(b) : R_{H^g} \cap$

$\bigcap C_G(b)| < \infty$. Тогда пересечение $R_H \bigcap R_{H^g}$ обладает неединичным элементом. Используя лемму 5, отсюда получаем доказываемое утверждение. Лемма доказана.

Лемма 9. *В H найдется элемент a простого порядка с конечным централизатором $C_H(a)$.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна и централизаторы всех элементов простых порядков из H бесконечны в H. Тогда по лемме 7 H является сильно изолированной подгруппой в G.

Покажем, что для группы G и ее подгруппы H можно применить предложение 13. Действительно, условие б) предложения 13 выполняется ввиду сопряженно бипримитивной конечности G. Покажем, что выполняется условие а). Допустим противное: для некоторого элемента $g \in G \diagdown H$ пересечение $H \bigcap g^{-1}Hg$ содержит неединичный элемент b. Ввиду предположения $C_H(b)$ бесконечен. По лемме 7 $C_G(b)$ содержится в H. В то же время, $g^{-1}Hg$ — также сильно изолированная подгруппа и $C_G(b) \subseteq g^{-1}Hg$. Так как $C_G(b)$ бесконечен, то H, $g^{-1}Hg$ пересекаются по своим слойно конечным подгруппам конечного индекса. Отсюда по лемме 5 $H = g^{-1}Hg$. Так как группа G не является локально конечной по лемме 3, получили противоречие с тем, что H — максимальная почти слойно конечная подгруппа.

Теперь, применяя предложение 13, приходим к противоречию с тем, что G не обладает нетривиальным локально конечным радикалом. Лемма доказана.

Лемма 10. *Подгруппа H почти нильпотентна.*

Доказательство. Справедливость леммы очевидным образом вытекает из леммы 3 и предложения 15. Лемма доказана.

Лемма 11. *В группе H найдется лишь конечное число элементов простого порядка, с точностью до сопряженности, имеющих конечные централизаторы в H.*

Доказательство. Так как H почти слойно конечна, представим ее в виде произведения $H = R_H \cdot K$, где R_H — слойно конечный радикал группы H, K — ее конечная подгруппа. Простые делители порядков элементов из $H \diagdown R_H$ делят $|H : R_H|$ и являются подмножеством $\pi(K)$. Все элементы из R_H по лемме Дицмана обладают бесконечными централизаторами. Поэтому почти регулярные элементы простых порядков находятся в $H \diagdown R_H$.

Пусть r — элемент простого порядка q из H с конечным централизатором $C_H(r)$. Рассмотрим содержащую его силовскую q-подгруппу Q из H. По лемме 2 Q — черниковская группа. Если она конечна, то в ней число элементов простого порядка конечно. Пусть она бесконечна. Ввиду строения черниковской q-группы (см. предложение 19) в ней число несопряженных элементов простого порядка q с конечными централизаторами конечно. Тогда по предложению 14 число таких элементов в H также конечно. Теперь, замечая, что $\pi(K)$ — конечное множество, получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 12. *В H найдется элемент b с бесконечным централизатором, в котором нет элементов с конечными централизаторами.*

Доказательство. По лемме 11 множество $h_1, h_2, \ldots, h_l$ всех несопряженных элементов с конечными централизаторами из H конечно. Тогда $\mathfrak{M} = \bigcup_{i=1}^{l} \pi(G_G(h_i))$ — конечное множество. Следовательно, существует элемент b такого достаточно большого порядка $p \in \pi(H)$ (множество $\pi(H)$ бесконечно что $p \notin \mathfrak{M}$. Очевидно, это и будет искомый элемент. Лемма доказана.

Замечание. Ввиду строения бесконечной почти слойно конечной группы H будем считать, не нарушая общности рассуждений, что число p выбрано так, что оно не делит индекс $|H : R_H|$, где R_H — слойно конечный радикал H.

В дальнейшем будем считать, что a — элемент из H простого порядка, который удовлетворяет лемме 12, а его порядок p выбран согласно замечанию, сделанному выше.

Лемма 13. *Простое число p можно выбрать так, чтобы силовские p-подгруппы в $L_g = \mathrm{гр}(a, a^g)$, $g \in G \setminus H$, были циклическими.*

Доказательство. Так как H — почти нильпотентная группа по лемме 10, то она имеет вид $H = L(H) \cdot K$, где $L(H)$ — нильпотентный радикал группы H, K — ее конечная подгруппа.

Рассмотрим подгруппы вида $L_g = \mathrm{гр}(a, a^g)$, $g \in G \setminus H$. Ввиду сопряженно бипримитивной конечности G подгруппы L_g конечны. Обозначим через S силовскую p-подгруппу из L_g, содержащую элемент a. Так как S, будучи конечной p-группой, обладает нетривиальным центром, то выбираем элемент b простого порядка из $Z(S)$. Ввиду леммы 12 $C_H(b)$ бесконечен. Тогда по лемме 7 $C_G(b) \leqslant H$. Следовательно, S лежит в H. Пусть S не является циклической подгруппой. Обозначим элементарную абелеву подгруппу порядка p^2 из S, содержащую элемент a, через R. Рассмотрим подгруппу $O_{p'}(L_g) \leftthreetimes R$ ($O_{p'}(L_g) \neq 1$ ввиду предложения 16). Согласно предложению 17

$$O_{p'}(L_g) \leqslant \mathrm{гр}(C_G(r) \mid r \in R^{\#}).$$

Как отмечалось выше, элементы r из $R^{\#}$ имеют бесконечные централизаторы в H и в силу леммы 7 лежат в H вместе с $O_{p'}(L_g)$. Подгруппа R содержится в H ввиду включения $R \subset C_G(a)$. Таким образом, имеем $O_{p'} \leftthreetimes (L_g)\ R \subset H$.

Ввиду выбора p подгруппа R содержится в нильпотентном радикале $L(H)$ подгруппы H. Пусть Q — силовская q-подгруппа из $Q_{p'}(L_g)$. По предложению 18 Q выберем таким образом, чтобы Q нормализовалось подгруппой R. Если $Q < L(H)$, то, очевидно, $Q \times R$. Если q — делитель индекса $|H : L(H)|$, то по определению нильпотентного радикала R нормализуется подгруппой Q. Таким образом, опять получаем $Q \times R$. Так как это рассуждение проходит для любого $q \in \pi(O_{p'}(L_g))$, то заключаем, что $O_{p'}(L_g) < C_G(a)$. Отсюда и ввиду выбора элемента a все элементы из $O_{p'}(L_g)$ имеют в H бесконечные централизаторы, по лемме 7 содержащиеся в H. Фиксируем произвольный элемент $c \neq 1$ из $O_{p'}(L_g)$. Как показано выше, $a \in C_G(c) \leqslant H$. Проведя аналогичные рассуждения относительно подгруппы H^g вместо H и элемента a^g вместо a, видим, что $a^g \in C_G(c)$, $c \in O_{p'}(L_g)$. Таким образом, $a^g \in H$. Ввиду выбора p, $|G_G(a^g) \cap H| = \infty$. Очевидно, $|C_G(a^g) \cap H^g| = \infty$. Значит, по лемме 18 $H = H^g$ для любых $g \in G \setminus H$. Противоречие с тем, что G не обладает нетривиальным локально конечным радикалом. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. В силу леммы 13 считаем, не нарушая общности рассуждений, что найдется элемент $a \in H$ порядка p такого, что силовская p-подгруппа в L_g—циклическая. Так как $O_{p'}(L_g) < L_g$, то рассмотрим фактор-группу $L_g/O_{p'}(L_g)$. Очевидно, она имеет порядок p и, следовательно, $L_g = O_{p'}(L_g) \leftthreetimes (a)$.

Отсюда, повторив для группы $O_{p'}(L_g) \leftthreetimes (a)$ рассуждения из доказательства леммы 13 относительно $O_{p'}(L_g) \leftthreetimes R$, докажем, что $O_{p'}(L_g) \times (a)$. Тогда $(a) = (a^g)$. Противоречие с тривиальностью локально конечного радикала в G. Теорема доказана.

1. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами систем подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
2. *Сенашов В. И.* Характеризация слойно конечных групп в классе периодических групп // Алгебра и логика.— 1985.— 24, № 5.— С. 608—617.
3. *Сенашов В. И.* Характеризация слойно конечных групп // Там же.— 1989.— 28, № 6.— С. 687—704.
4. *Шмидт О. Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб.— 1924.— 31.— С. 366—372.
5. *Шунков В. П.* Об одном классе p-групп // Алгебра и логика.— 1970.— 9, № 4.— С. 484—496.
6. *Шунков В. П.* M_p-группы.— М. : Наука, 1990.— 160 с.

7. *Шунков В. П.* Группы с инволюциями. Ч. 3.— Красноярск, 1986.— 25 с.— (Препринт/ ВЦ СО АН СССР; № 12).
8. *Каргаполов М. И.* Локально конечные группы со специальными силовскими p-подгруппами: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Пермь, 1955.— 12 с.
9. *Шунков В. П.* О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика.— 1970.— 9, № 5.— С. 579—615.
10. *Остыловский А. Н.* Локальная конечность некоторых групп с условием минимальности для абелевых подгрупп // Там же.— 1977.— 16, № 12.— С. 63—73.
11. *Шунков В. П.* О локально конечных группах конечного ранга // Там же.— 1971.— 10, № 12.— С. 199—225.
12. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп: 3-е изд.— М. : Наука, 1982.— 288 с.
13. *Созутов А. И., Шунков В. П.* Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы // Мат. сб.— 1976.— 100, № 4.— С. 495—508.
14. *Хухро Е. И.* Нильпотентные периодические группы с почти регулярным автоморфизмом простого порядка // Алгебра и логика.— 1987.— 26, № 4.— С. 502—517.
15. *Feit W., Thompson J. G.* Solvability of groups of odd order // Pacif. J. Math.— 1963.— 13, N 3.— P. 775—1029.
16. *Brauer R.* Somme applications of theory of block of characters of finite groups, II // J. Algebra.— 1964.— 1.— P. 307—334.

Получено 28.12.90