УДК 519.4

В. А. РОМАНЬКОВ, канд. физ.-мат. наук (ВЦ СО АН СССР, Омск)

Критерии примитивности системы элементов свободной метабелевой группы

Указаны критерии дополняемости произвольной системы элементов до множества свободных порождающих свободной метабелевой группы.

Вказані критерії доповнюваності довільної системи елементів до множини елементів, що вільно породжують вільну метабелеву групу.

1. Формулировка результатов. Пусть G_n — свободная в некотором многообразии группа ранга n. Система элементов $\bar{g} = \{g_1, \ldots, g_m\}$, $m \leqslant n$, группы G_n называется примитивной, если $\bar{g}$ может быть дополнена до базиса, т. е. до множества свободных порождающих группы G_n.

ISSN 0041-6053. Укр. мат. журн., 1991, т. 43, № 7—8

Обозначим через F_n свободную группу ранга n с базисом $\bar{f}=\{f_1, \ldots, f_n\}$, через $M_n = F_n/F_n''$ — свободную метабелеву группу ранга n с соответствующим базисом $\bar{x}=\{x_1, \ldots, x_n\}$ и, наконец, через $A_n = F_n/F_n' = M_n/M_n'$ — свободную абелеву группу ранга n с соответствующим базисом $\bar{a}=\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Пусть $\Lambda_n = \mathbb{Z}A_n = \mathbb{Z}[a_1^{\pm 1}, \ldots, a_n^{\pm 1}]$ обозначает групповое кольцо группы A_n или, что то же самое, кольцо лорановых многочленов от $a_1, \ldots, a_n$. Полагаем $\beta_i = a_i - 1$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда $\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} \Lambda_n\beta_i$ — фундаментальный идеал кольца Λ_n.

Пусть $\partial/\partial x_i$ — частное дифференцирование Фокса кольца $\mathbb{Z}M_n$ со значениями в кольце Λ_n, $i = 1, \ldots, n$ (подробнее см. в п. 2). Для произвольной системы элементов $\bar{g}=\{g_1, \ldots, g_m\}$ группы M_n обозначим через $J_{\bar{x}}(\bar{g}) = (\partial g_i/\partial x_j)$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$, якобиеву матрицу значений частных производных Фокса.

Цель работы — доказать формулируемые ниже критерии примитивности системы элементов группы M_n.

Критерий 1 (Е. И. Тимошенко [1]). *Система элементов $\bar{g}=\{g_1, \ldots, g_m\}$, $m \leqslant n$, группы M_n примитивна тогда и только тогда, когда идеал, порожденный в кольце Λ_n всеми минорами порядка m матрицы $J_{\bar{x}}(\bar{g})$, совпадает со всем кольцом Λ_n.*

Е. И. Тимошенко сформулировал критерий 1 и доказал его в случае $m \leqslant n-3$. Кроме того, он направил в печать работу, в которой доказательство распространяется также на случай $m = n-1$. Отметим, что в своем разборе случая $m \leqslant n-3$ Е. И. Тимошенко существенно опирался на теорему Суслина—Квиллена—Суона о свободе проективных модулей над кольцами лорановых многочленов [2].

Ключевым для разбора случая $m = n-2$ является доказательство критерия 1 при $m = 1$, $n = 3$. Здесь уже не применима теорема Суслина—Квиллена — Суона. Это доказательство приведено в работе автора «Примитивные элементы свободных групп ранга 3», направленной в печать. В нем использован метод, развитый автором в [3, 4], позволяющий исследовать группы автоморфизмов свободных метабелевых групп ранга $n \geqslant 3$. Основной результат настоящей работы — доказательство критерия 1 в случае $m = n-2$, $n \geqslant 4$.

Критерий 2. *Система элементов $\bar{g}=\{g_1, \ldots, g_m\}$, $m \leqslant n$, группы M_n примитивна тогда и только тогда, когда существует матрица B размера $n \times m$ над кольцом Λ_n такая, что $J_{\bar{x}}(\bar{g})B = E$, где E — единичная матрица размера $m \times m$.*

В случае $m = n$ критерий 2 совпадает с теоремой Бахмута [5].

Отметим, что аналогичное критерию 2 утверждение о примитивности системы элементов группы F_n с заменой M_n на F_n, A_n на M_n и Λ_n на $\mathbb{Z}M_n$ доказал У. У. Умирбаев (статья находится в печати). Им использовались глубокие факты из теории концов групп, не имеющие известных аналогов в теории разрешимых групп.

Критерий 3. *Система элементов $\bar{g}=\{g_1, \ldots, g_m\}$, $m \leqslant n$, группы M_n примитивна тогда и только тогда, когда существуют дифференцирования Фокса $D_i: \mathbb{Z}M_n \to \Lambda_n$ такие, что $D_i(g_j) = \delta_i^j$ (символ Кронекера).*

Теорема эквивалентности. *Критерии 1, 2 и 3 равносильны между собой.*

Конечно, теорема эквивалентности следует из критериев. Однако доказательство в дальнейшем строится таким образом, что теорема эквивалентности устанавливается в первую очередь и используется для доказательства критериев.

Следствие. *Проблема распознавания примитивности системы элементов $\bar{g}=\{g_1, \ldots, g_m\}$, $m \leqslant n$, группы M_n алгоритмически разрешима.*

2. Предварительные сведения. Следующие определения и свойства можно найти в [6, 7].

Дифференцированием Фокса кольца $\mathbb{Z}M_n$ со значениями в Λ_n называется отображение $D:\mathbb{Z}M_n \to \Lambda_n$, удовлетворяющее следующим свойствам:

$$D(1)=0, \quad D(\gamma+\delta)=D(\gamma)+D(\delta), \quad D(\gamma\delta)=D(\gamma)\,\varepsilon(\delta)+\overline{\gamma}D(\delta),$$

где $\gamma,\ \delta \in \mathbb{Z}M_n$, $\varepsilon:\mathbb{Z}M_n \to \mathbb{Z}$ — гомоморфизм тривиализации, $\overline{\gamma}$ — образ элемента γ относительно естественного гомоморфизма $\mathbb{Z}M_n \to \Lambda_n$.

Частные дифференцирования Фокса существуют и однозначно определяются условиями $\partial x_i/\partial x_j = \delta_i^j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Если D — дифференцирование Фокса, $\gamma \in \Lambda_n$, то γD — дифференцирование Фокса, определяемое формулой $(\gamma D)(\delta) = \gamma D(\delta)$, $\delta \in \mathbb{Z}M_n$.

Сумма дифференцирований очевидным образом также является дифференцированием. Произвольное дифференцирование Фокса может быть задано формулой $D = \gamma_1\partial/\partial x_1 + \ldots + \gamma_n\partial/\partial x_n$, где $\gamma_i \in \Lambda_n$, $i = 1, \ldots, n$, —подходящие коэффициенты.

Основное тождество для частных дифференцирований имеет вид

$$\partial\delta/\partial x_1\beta_1 + \ldots + \partial\delta/\partial x_n\beta_n = \overline{\delta} - \varepsilon(\delta), \tag{1}$$

где $\delta \in \mathbb{Z}M_n$ — произвольный элемент.

Элементы $g,\ f \in M_n$ равны между собой тогда и только тогда, когда равны все их производные: $\partial g/\partial x_i = \partial f/\partial x_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Если выполнено равенство $\gamma_1\beta_1 + \ldots + \gamma_n\beta_n = a - 1$, где $a \in A_n$, $\gamma_i \in \Lambda_n$, $i = 1, \ldots, n$, то найдется единственный элемент $g \in M_n$, для которого верны равенства $\partial g/\partial x_i = \gamma_i$, $i = 1, \ldots, n$. В этом случае из (1) получаем $\overline{g} = a$.

Если $y_1, \ldots, y_k$ — элементы группы M_n, $g = g(y_1, \ldots, y_k)$ — произвольное слово от этих элементов, то можно формальным образом вычислять значения частных производных $\partial g/\partial y_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Справедливо правило дифференцирования композиции

$$\partial g(y_1, \ldots, y_k)/\partial x_j = \sum_{i=1}^{k} \partial g/\partial y_i \cdot \partial y_i/\partial x_j, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Коммутант M_n' является модулем над кольцом Λ_n, действие в котором индуцировано сопряжениями элементами группы M_n. Для $g, f \in M_n$ записываем $g^f = fgf^{-1}$, $(g, f) = gfg^{-1}f^{-1}$.

При $g \in M_n'$, $a \in A_n$ имеем по определению $g^a = g^c$, где $c \in M_n$ — любой прообраз a относительно естественного гомоморфизма $M_n \to A_n$. Если $\alpha = l_1c_1 + \ldots + l_tc_t$, $l_i \in \mathbb{Z}$, $c_i \in A_n$, $i = 1, \ldots, t$; $g \in M_n'$, то по определению $g^\alpha = (g^{c_1})^{l_1} \ldots (g^{c_t})^{l_t}$. При этом верны формулы $\partial g^\alpha/\partial x_j = \alpha\partial g/\partial x_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Сформулируем известное утверждение, необходимое в дальнейшем.

Теорема Бине—Коши (см., например, [8]). *Пусть A, B — прямоугольные матрицы над произвольным коммутативным ассоциативным кольцом Λ размеров $m \times n$ и $n \times m$ соответственно. Если $m \leqslant n$ и $AB = C$, то справедлива формула*

$$\det C = \sum_{\overline{k}} A(\overline{k})\, B^t(\overline{k}),$$

где $\overline{k} = (k_1, \ldots, k_m)$, $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_m \leqslant n$, $D(\overline{k})$ означает минор порядка m матрицы D с m строками, вычисленный для столбцов с номерами из $\overline{k}$, t — операция транспонирования матрицы.

Лемма 1. *Выполнимость условий критериев 1 и 2 для системы элементов $\overline{g} = \{g_1, \ldots, g_m\}$, $m \leqslant n$, группы M_n не зависит от выбора базиса $\overline{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$.*

Доказательство. Пусть $\overline{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ — другой базис группы M_n. По теореме Бахмута [5] матрица $T_{\overline{yx}} = (\partial y_i/\partial x_j)$ обратима. Равенство

$J_{\overline{x}}(\overline{g}) = J_{\overline{y}}(\overline{g})\, T_{\overline{y}\overline{x}}$, вытекающее из (2), делает утверждение леммы, касающееся критерия 2, очевидным. Утверждение леммы о критерии 1 следует из теоремы Бине — Коши. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если условия критериев 1 и 2 выполнены для системы элементов $\overline{g} = \{g_1, \ldots, g_m\}$, $m \leqslant n$, то они выполнены также для любой ее подсистемы.*

Доказательство очевидно.

Будем говорить, что $\overline{g} = \{g_1, \ldots, g_m\}$, $m \leqslant n$, — система IA-элементов группы M_n, если $g_i = u_i x_i$, $u_i \in M'_n$, $i = 1, \ldots, m$.

Лемма 3. *Если $\overline{g} = \{g_1, \ldots, g_m\}$, $m \leqslant n$, — примитивная система IA-элементов группы M_n, то $\overline{g}$ дополняема до базиса, являющегося системой IA-элементов группы M_n.*

Доказательство. Пусть $g_1, \ldots, g_m, g_{m+1}, \ldots, g_n$ — базис группы M_n. Тогда элементы $\overline{g}_1 = a_1, \ldots, \overline{g}_m = a_m, \overline{g}_{m+1}, \ldots, \overline{g}_n$ образуют базис группы A_n. С помощью элементарных преобразований, т. е. замены одного из элементов обратным или умножением одного из элементов на другой, этот базис переводится в базис $\overline{a}$. При этом можно ограничиться использованием преобразований, не изменяющих первые m элементов. Применяя соответствующие нильсеновы преобразования к базису $g_1, \ldots, g_m, g_{m+1}, \ldots, g_n$, получаем искомый базис из IA-элементов группы M_n. Лемма доказана.

Для доказательства основного результата работы важное значение имеет следующий известный факт.

Квадратная размера $n \times n$ матрица $A = (\alpha_{ij})$ над кольцом Λ_n тогда и только тогда совпадает с якобиевой матрицей $J_{\overline{x}}(\overline{g})$ системы $\overline{g} = \{g_1, \ldots$ $\ldots, g_n\}$ IA-элементов, являющейся базисом группы M_n, когда A обратима, т. е. $\det A = a$, $a \in A_n$, и ее строки удовлетворяют равенствам

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_j = \beta_i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Пусть $g = u x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$, $u \in M'_n$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, n$, — произвольный элемент группы M_n. Прямое вычисление показывает, что

$$\varepsilon(\partial g/\partial x_i) = k_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Лемма 4. *Если выполнены условия критерия 1 или критерия 2 для системы элементов $\overline{g} = \{g_1, \ldots, g_m\}$, $m \leqslant n$, группы M_n, то система элементов $\overline{\overline{g}} = \{\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_m\}$ примитивна в группе A_n.*

Доказательство. Как известно, базис $\overline{a}$ группы A_n можно перевести элементарными преобразованиями в такой базис $\overline{a}' = \{a'_1, \ldots, a'_n\}$, что будут выполняться равенства

$$\overline{g}_i = (a'_i)^{l_i}, \quad l_i \in \mathbb{Z}, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Предположим, что система $\overline{\overline{g}}$ не дополняется до базиса группы A_n. Тогда хотя бы одно из чисел l_i отлично от ± 1. Применив соответствующие нильсеновы преобразования к базису $\overline{x}$, получим базис $\overline{x}' = \{x'_1, \ldots$ $\ldots, x'_n\}$, для которого верны равенства $g_i = u_i (x'_i)^{l_i}$, $u_i \in M'_n$, $i = 1, \ldots, m$.

Применяя гомоморфизм тривиализации ε к элементам матрицы $J_{\overline{y}}(\overline{g})$, ее минорам и индуцированный гомоморфизм к равенству $J_{\overline{y}}(\overline{g})\, B = E$, видим, что относительно базиса $\overline{y}$ условия критериев 1 и 2 не выполнены. По лемме 1 этого не может быть. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть A — матрица размера $m \times n$ над коммутативным ассоциативным кольцом Λ. Если $m \leqslant n$ и все миноры порядка m матрицы A порождают кольцо Λ, как идеал, то существует такая матрица $B = (\beta_{ij})$ размера $n \times m$ над Λ, что $AB = E$, где E — единичная матрица размера m.*

Доказательство. В обозначениях теоремы Бине — Коши существуют такие элементы $f_{\bar{k}} \in \Lambda$, $\bar{k} = (k_1, \ldots, k_m)$, $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_m \leqslant n$, что

$$\sum_{\bar{k}} A(\bar{k}) f_{\bar{k}} = 1. \tag{4}$$

Пусть $A = (\alpha_{ij})$, тогда после формального приведения подобных в (4) и соответствующих обозначений получаем равенства

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{ji} = 1, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{5}$$

Заметим, что левая часть (4) меняет знак при перемене мест двух строк матрицы A. Значит, наряду с (5) выполнены также равенства

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{jl} = 0, \quad l \neq i, \qquad l, i = 1, \ldots, m.$$

Матрица $B = (\beta_{ji})$ является искомой. Лемма доказана.

Пусть гомоморфизм $\nu_k : \Lambda_n \to \Lambda_k$ задан образами порождающих элементов по правилу

$$\nu_k(a_i) = a_i, \quad i = 1, \ldots, k; \qquad \nu_k(a_j) = 1, \quad j = k+1, \ldots, n.$$

Тогда любой элемент $\gamma \in \Lambda_n$ однозначно записывается в виде

$$\gamma = \gamma_{(1)} + \gamma_{(2)}, \tag{6}$$

где $\gamma_{(1)} \in \Lambda_k$, $\gamma_{(2)} \in I_k = \ker \nu_k = \text{ид}(\beta_{k+1}, \ldots, \beta_n)$.

Лемма 6. *Пусть A — матрица размера $m \times r$, $m \leqslant r$, над кольцом Λ_n, строки которой сравнимы с соответствующими строками единичной матрицы размера r по модулю идеала I_k, $k \leqslant n$, определенного выше. Если все миноры порядка m матрицы A порождают, как идеал, кольцо Λ_n, то матрица A дополняема до матрицы C из конгуэнц-подгруппы $SL_r(\Lambda_n, I_k)$.*

Доказательство. При $r \geqslant 3$ по теореме Суслина — Квиллена — Суона и при $r = 2$ очевидным образом матрица A дополняема до квадратной размера r матрицы B над кольцом Λ_n определителя 1. Применив к B гомоморфизм, индуцированный ν_k, видим, что нижняя правая клетка P образа порядка $r - m$ имеет определитель 1. Домножим B слева на обратную к матрице $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, P)$. Затем для получившейся матрицы выпишем разложения некоторых ее элементов по правилу (6)

$$\beta_{m+li} = \beta_{m+li(1)} + \beta_{m+li(2)}, \qquad l = 1, \ldots, n-m; \quad i = 1, \ldots, m.$$

Умножим полученную матрицу слева на произведение трансвекций $t_{m+li}(-\beta_{m+li(1)})$ в произвольном порядке. В итоге получим искомую матрицу C, что доказывает лемму.

3. Доказательства основных утверждений. Доказательство теоремы эквивалентности. Пусть выполнено условие критерия 2, т. е. справедливо равенство

$$J_{\bar{x}}(\bar{g})\, B = E. \tag{7}$$

Тогда по теореме Бине—Коши $1 = \det E$ принадлежит идеалу, порожденному минорами порядка m матрицы $J_{\bar{x}}(\bar{g})$, т. е. выполнено условие критерия 1.

Наоборот, если выполнено условие критерия 1, то согласно лемме 5 выполнено условие критерия 2.

Обозначим в равенстве (7) $B = (\beta_{ij})$. Полагаем

$$D_j = \beta_{1j}\partial/\partial x_1 + \ldots + \beta_{nj}\partial/\partial x_n, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Тогда $D_j(g_i) = \delta_i^j$, $i, j = 1, \ldots, m$, т. е. выполнено условие критерия 3.

Наоборот, если существуют дифференцирования Фокса D_j, $j = 1, \ldots, m$, удовлетворяющие условию критерия 3, то, представив их в виде

$$D_j = \beta_{1j}\partial/\partial x_1 + \ldots + \beta_{nj}\partial/\partial x_n, \quad \beta_{ij} \in \Lambda_n, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m,$$

получим матрицу $B = (\beta_{ij})$, для которой $J_{\overline{x}}(\overline{g}) B = E$, т. е. выполнены условия критерия 2. Теорема доказана.

Доказательство критериев в случае $m = n - 2$, $n \geqslant 4$. Как отмечалось в п. 1, справедливость критерия 1, а значит, всех остальных критериев по теореме эквивалентности, в случаях $m \leqslant n - 3$, $m = n - 1$ и $m = 1$, $n = 3$ установлена соответственно Е. И. Тимошенко и автором.

Используя лемму 4 и применяя нильсеновы преобразования, предполагаем, что $\overline{g}$ является системой IA-элементов. По лемме 2 и индукционным соображениям после необходимого изменения базиса группы M_n можно считать, что $g_1 = u_1 x_1$, $g_2 = x_2, \ldots, g_m = x_m$, $u_1 \in M'_n$. Считаем, что $m \geqslant 2$, так как случай $m = 1$, $n = 3$ уже рассмотрен в другой работе автора. При сделанных предположениях, согласно условиям критерия 1 кольцо Λ_n порождается как идеал элементами $\partial u_1/\partial x_1 + 1$, $\partial u_1/\partial x_{m+1}, \ldots, \partial u_1/\partial x_n$.

Пусть $\nu: \Lambda_n \to \mathbb{Z}[a_1^{\pm 1}, a_{m+1}^{\pm 1}, \ldots, a_n^{\pm 1}]$ — гомоморфизм, заданный правилом

$$\nu(a_1) = a_1, \quad \nu(a_i) = 1, \quad j = 2, \ldots, m, \quad \nu(a_{m+l}) = a_{m+l}, \quad l = 1, \ldots, n - m.$$

Как следствие из (1) применением ν получаем равенство

$$((\partial u_1/\partial x_1)^\nu + 1)\beta_1 + (\partial u_1/\partial x_{m+1})^\nu \beta_{m+1} + \ldots + (\partial u_1/\partial x_n)^\nu \beta_n = \beta_1. \qquad (8)$$

Тогда, как отмечалось в п. 2, найдется единственный элемент $v_1 = v_1(x_1, x_{m+1}, \ldots, x_n) \in M'_n$, для которого верны равенства

$$\partial v_1/\partial x_1 = (\partial u_1/\partial x_1)^\nu, \quad \partial v_1/\partial x_{m+l} = (\partial u_1/\partial x_{m+l})^\nu, \qquad l = 1, \ldots, n - m.$$

При этом производные $\partial v_1 x_1/\partial x_1$, $\partial v_1 x_1/\partial x_{m+l}$, $l = 1, \ldots, n - m$, порождают кольцо $\Lambda = \mathbb{Z}[a_1^{\pm 1}, a_{m+1}^{\pm 1}, \ldots, a_n^{\pm 1}]$, как идеал. По индукции найдутся такие элементы $v_{m+l}x_{m+l} \in \langle x_1, x_{m+1}, \ldots, x_n\rangle \leqslant M_n$, $v_{m+l} \in M'_n$, $l = 1, \ldots, n - m$, что система элементов $v_1 x_1, v_{m+1}x_{m+1}, \ldots, v_n x_n$ является базисом группы $M_{n-m+1} = \langle x_1, x_{m+1}, \ldots, x_n\rangle$. На матричном языке это означает обратимость матрицы $P = (\partial v_i x_i/\partial x_j)$, $i, j = 1, m + 1, \ldots, n$. Следовательно, матрица Q порядка n, полученная из P вставкой строк и столбцов с номерами $2, \ldots, m$, совпадающих с соответствующими строками и столбцами единичной матрицы, также обратима. При этом матрица Q совпадает с якобиевой матрицей перехода от базиса $\overline{x}$ к базису $\{v_1 x_1, x_2, \ldots, x_m, v_{m+1}x_{m+1}, \ldots, v_n x_n\}$.

Первая строка матрицы $J'_{\overline{x}}(\overline{g}) = J_{\overline{x}}(\overline{g})Q^{-1}$ сравнима с первой строкой единичной матрицы по модулю идеала $I = \ker \nu = \text{ид}(\beta_2, \ldots, \beta_m)$, а остальные строки совпадают с соответствующими строками единичной матрицы. При этом элементы, стоящие на позициях 11, $1m + 1, \ldots, 1n$, порождают кольцо Λ_n, как идеал.

По лемме 6 (с некоторым изменением нумерации базисных элементов) матрица $I'_{\overline{x}}(\overline{g})$ дополняема до матрицы определителя 1 над кольцом Λ_n, на позициях ij, $i = m + 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, которой стоят элементы из I, если $i \neq j$, и элементы сравнимые с 1 по модулю идеала I, если $i = j$. Поскольку определитель получающейся матрицы не зависит от элементов, стоящих на позициях ij, $i = m + 1, \ldots, n$; $j = 2, \ldots, m$, их можно выбирать произвольно. Очевидно, что их можно выбрать так, что элементы произвольной строки получающейся матрицы будут удовлетворять аналогу равенств (3), т. е. в скалярном произведении с вектором $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ дадут элемент β_i, где i — номер строки. Это значит, что полученная матрица является якобиевой матрицей некоторого базиса IA-элементов группы M_n. Доказательство закончено.

Справедливость следствия вытекает из алгоритмической разрешимости проблемы существования решений у произвольной системы линейных уравнений над Λ_n, доказанной Е. И. Тимошенко [9].

1. *Тимошенко Е. И.* О включении данных элементов в базис свободной метабелевой группы.— Новосибирск, 1988.— 26 с.— Деп в ВИНИТИ; № 2699-В.
2. *Суслин А. А.* Алгебраическая K-теория // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия / ВИНИТИ.— 1982.— 20.— С. 71—152.
3. *Романьков В. А.* Группы матриц вычетов // Пробл. взаимосвязи абстракт. и прикл. алгебры.— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985.— С. 35—52.
4. *Романьков В. А.* Группы автоморфизмов свободных метабелевых групп // Там же.— С. 53—80.
5. *Bachmuth S.* Automorphisms of free metabelian groups // Communs Pure and Appl. Math.— 1968.— 21.— P. 605—629.
6. *Кроуэлл П., Фокс Р.* Введение в теорию узлов.— М. : Мир, 1967.— 348 с.
7. *Мельников О. В., Ремесленников В. Н., Романьков В. А.* Группы // Общая алгебра.— М.: Наука, 1990.— Т. 1.— 591 с.
8. *Ланкастер П.* Теория матриц.— М. : Наука, 1978.— 280 с.
9. *Тимошенко Е. И.* Некоторые алгоритмические вопросы для метабелевых групп // Алгебра и логика.— 1973.— 12, № 2.— С. 232—240.

Получено 13.12.90