УДК 512.542

Н. Ф. КУЗЕННЫЙ, канд. физ.-мат. наук (НПО «Горсистемотехника», Киев),
С. С. ЛЕВИЩЕНКО, канд. физ.-мат. наук (Киев. пед. ин-т)

Конечные группы Шмидта и их обобщения

Рассматриваются наиболее непосредственные обобщения конечных групп Шмидта — конечных ненильпотентных групп, все собственные подгруппы которых нильпотентны. В качестве следствий доказываются утверждения, подтверждающие зависимость строения всей группы от наличия в ней той или иной системы подгрупп Шмидта. В частности, доказано, что конечная группа дисперсивна, если в ней все подгруппы Шмидта сверхразрешимы.

Розглядаються найбільш безпосередні узагальнення скінченних груп Шмідта — скінченних ненільпотентних груп, всі власні підгрупи яких нільпотентні. Як наслідки доводяться твердження, які підтверджують залежність будови всієї групи від наявності в ній тієї чи іншої системи підгруп Шмідта. Зокрема, доведено, що скінченна група дисперсивна, якщо в ній всі підгрупи Шмідта надрозв'язні.

1. Введение. В 1924 г. О. Ю. Шмидт опубликовал работу [1], в которой ввел в рассмотрение и изучал класс конечных ненильпотентных групп, в которых всякая собственная подгруппа нильпотентна. Впоследствии эти группы получили название групп Шмидта, или конечных минимальных ненильпотентных групп, или S-групп, и изучением их строения занимались многие авторы (см., например, библиографию в работе Л. А. Шеметкова [2]). Наиболее полно результаты о группах Шмидта изложены в работах Л. Редеи [3, 4] и Ю. А. Гольфанда [5]. Трудно переоценить значение работы [1]. Здесь особо следует отметить следующий факт: любая конечная ненильпотентная группа содержит хотя бы одну подгруппу Шмидта. Поэтому свойства самой группы существенно зависят от наличия той или иной системы шмидтовских подгрупп.

Обширное направление в теории конечных групп составляют исследования, посвященные различным обобщениям групп Шмидта (см., например, библиографию в работе [2]). Этому направлению принадлежит и настоящая работа. В п. 2 приводятся известные результаты о группах Шмидта и их обобщениях. В п. 3 рассмотрены различные свойства S^*-, S^{**}-групп, обобщающих группы Шмидта.

S^* (S^{**}-)-группой называется конечная ненильпотентная группа, в которой всякая подгруппа непримарного индекса является нильпотентной (нильпотентной или группой Шмидта). Если в определении S^* (S^{**}-)-группы условие нильпотентности заменить на условие абелевости, цикличности, то получим M^* (M^{**}-)-, C^*(C^{**}-)-группы соответственно [6]. В п. 3 указаны некоторые свойства и таких групп. Некоторые важные следствия приведены в п. 4 настоящей работы.

Везде в дальнейшем число $\delta_x(y)$ будет обозначать показатель числа y по модулю числа x. Через P, Q, R, S будем обозначать соответственно некоторые фиксированные силовские p-, q-, r-, s-подгруппы конечной группы.

2. Группы Шмидта и простейшие их обобщения. Строение групп Шмидта и их свойства изучались в работах [1, 3—13]. Используя результаты этих работ можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Конечная группа G тогда и только тогда является группой Шмидта, когда она разлагается в полупрямое произведение $G = P \rightthreetimes Q$ своих инвариантной силовской p-подгруппы P порядка p^α, $\alpha \geqslant 1$, и неинвариантной циклической силовской q-подгруппы $Q = \langle b \rangle$ порядка q^β, $\beta \geqslant 1$, и удовлетворяет следующим условиям:*

1) $Z(G) = \Phi(G) = \Phi(P) \times \langle b^q \rangle$;

2) $G' = P, P' = \Phi(P); G'' = P'; \exp P' \leqslant p$;

3) *если* $P' \neq 1$, *то* $Z(P) = P' = \Phi(P)$;

4) *либо экспонента P равна p, либо P — неабелева 2-группа экспоненты 4;*

5) *если* $|P'| = p^\gamma$, *то* $\alpha - \gamma = \delta_q(p)$, *причем* $\alpha \leqslant \frac{3}{2}(\alpha - \gamma)$, *т. е.* $\gamma \leqslant \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$ *и при* $\alpha - \gamma$ *нечетном* $\gamma = 0$, *а P — абелев минимальный нормальный делитель в G;*

6) *если* $a \in P \setminus \Phi(P)$, *то* $G = \langle a, b \rangle = \langle a^{-1}ba, b \rangle$;

7) *G имеет точно два класса максимальных подгрупп:*

а) $\{P \times \langle b^q \rangle\}$;

б) $\{\Phi(P) \times \langle a^{-1}b\,a \rangle \mid a \in P \setminus \Phi(P)\}$;

8) *всякая инвариантная в G p-подгруппа либо совпадает с P, либо содержится в $\Phi(P)$;*

9) $C_p(\langle b \rangle) = \Phi(P)$ *и* $|P| = p$ *при* $|P : \Phi(P)| = p$.

Отметим, что в этой теореме условия 1—9 не являются не независимыми, а формулируются лишь с целью охвата как можно большего числа свойств групп Шмидта. Существует много и других свойств и критериев, определяющих группы Шмидта. Приведем некоторые из них.

Предложение 1. *Для конечной ненильпотентной группы G следующие условия эквивалентны:*

1) *G — группа Шмидта;*

2) *G — группа, в которой все максимальные подгруппы нильпотентны;*

3) *G — группа, в которой всякая собственная непримарная подгруппа нильпотентна;*

4) *G — группа, в которой всякая собственная бипримарная подгруппа нильпотентна;*

5) *G — группа, в которой существует хотя бы одна подгруппа примарного индекса и все такие подгруппы нильпотентны* [14];

6) $G = P \rightthreetimes Q$, $|P'| = p^\gamma$, $\gamma < \alpha - \gamma$, $\alpha - \gamma = \delta_q(p)$, *всякий элемент из Q, порядок которого меньше q^β, принадлежит $C_G(P)$* [7];

7) $G = P \rightthreetimes Q$, $Q = \langle b \rangle$, $C_G(\langle b \rangle) = \langle b \rangle Z(G) = \langle b \rangle \Phi(G)$, $|G : Z(G)| = p^\delta q$, $\delta = \delta_q(p)$ [7];

8) $G = P \rightthreetimes Q, Q = \langle b \rangle$, $\Phi(G) = \langle b^q \rangle \times G''$, $|G'| < p^\delta$, $\delta = \delta_q(p)$, $G/\Phi(G)$ — *ненильпотентная группа порядка $p^\delta q$ с инвариантной (элементарной абелевой) подгруппой порядка p^δ* [7];

9) $G = P \rightthreetimes Q$, $Q = \langle b \rangle$, $b^q \in C_G(P)$, $\Phi(P) \rightthreetimes \langle b \rangle$ — *нильпотентная и максимальная в G подгруппа* [15];

10) *G имеет такую нильпотентную максимальную подгруппу B, что $N_G(B) = C_G(B)$ и для любой собственной подгруппы H из B $N_G(H) = G$;* $\langle B, x^{-1}Bx \rangle = G$, *если* $x \overline{\in} N_G(H)$ [12];

11) *G — не p-разложимая pd-группа, все собственные подгруппы которой p-разложимы* [16].

Изучение строения групп Шмидта продолжается и в настоящее время. Основное внимание при этом уделяется их инвариантной силовской подгруппе вообще и при некоторых ограничениях. Такой подход восходит к самому О. Ю. Шмидту, который установил, что при $P'=1$ вся группа G является группой Миллера — Морено.

П р е д л о ж е н и е 2 [17]. *Если в группе Шмидта инвариантный множитель P является минимальной неабелевой подгруппой, то P — либо группа кватернионов, либо неабелева группа порядка p^3 экспоненты p.*

П р е д л о ж е н и е 3 [18]. *Если в инвариантном множителе P группы Шмидта все собственные подгруппы метациклические, то P — группа одного из типов:*

1) *P — элементарная абелева группа порядка p или p^2;*
2) *P — группа кватернионов;*
3) *P — неабелева группа порядка p^3 экспоненты p.*

Рассмотрим некоторые простейшие обобщения групп Шмидта. Так, С. А. Чунихин [19] исследовал S_p-группы — конечные ненильпотентные pd-группы, все собственные pd-подгруппы которых нильпотентны (напомним, что группа, порядок которой делится на число p, называется pd-группой).

Т е о р е м а 2 [19]. *Конечные ненильпотентные pd-группы, в которых все собственные pd-подгруппы нильпотентны, исчерпываются pd-группами Шмидта и прямыми произведениями группы порядка p на не pd-группу Шмидта.*

Так как в группах Шмидта все максимальные подгруппы нильпотентны, то естественным обобщением групп Шмидта является класс групп, в которых условие нильпотентности налагается на все 2-максимальные подгруппы. Разрешимые группы такого рода изучены В. А. Белоноговым [7], а неразрешимые — М. Судзуки [20] и З. Янко [21].

Т е о р е м а 3 [20, 21]. *Конечные неразрешимые группы, в которых все 2-максимальные подгруппы нильпотентны, исчерпываются группами A_5 и $SL(2, 5)$.*

Из теоремы 2 видно, что S_p-группы являются S^*-группами. Так как в конечной разрешимой группе все максимальные подгруппы имеют примарный индекс, то класс S^*-групп содержит все конечные разрешимые группы, в которых каждая 2-максимальная подгруппа нильпотентна.

3. S^*- и S^{**}-г р у п п ы. S^*-группы описывает следующая теорема.

Т е о р е м а 4 [17]. *S^*-группы исчерпываются группами следующих типов:*

1) *G — недисперсивная группа порядка $p^\alpha q$, $\alpha \geqslant 3$;*

2) $G = P \leftthreetimes Q,\ Q = \langle b \rangle,\ b^q \in Z(G),\ Q \ntriangleleft G$;

3) $G = P \leftthreetimes Q$, *Q — нециклическая группа,* $Q = \langle b \rangle Q_1,\ \langle b \rangle \cap Q_1 = \langle b^q \rangle$, $P \leftthreetimes \langle b \rangle$ *— группа Шмидта* $C_Q(P) = Q_1$;

4) $G = P \leftthreetimes Q,\ Q = \langle b \rangle Q_1, |b| = q^{\beta_1},\ 2 \leqslant \beta_1 \leqslant \beta,\ \langle b \rangle \cap Q_1 = \langle b^{q^{\beta_2}} \rangle,\quad 2 \leqslant \leqslant \beta_2 \leqslant \beta_1,\quad C_Q(P) = Q_1,\quad P \leftthreetimes \langle b^{q_2^{\beta-1}} \rangle$ *— группа Шмидта;*

5) $G = P \times (Q \leftthreetimes R)$, $Q \leftthreetimes R$ *— группа Шмидта;*

6) $G = (P \times Q) \leftthreetimes R$, $P \leftthreetimes R$, $Q \leftthreetimes R$ *— группы Шмидта;*

7) $G = P \leftthreetimes (Q \times R)$; $P \leftthreetimes Q$, $P \leftthreetimes R$ *— группы Шмидта.*

Как видно из этой теоремы, S^*-группы разрешимы, являются бипримарными или трипримарными группами и все, кроме первого типа, дисперсивны.

Замена условия нильпотентности на условие абелевости (цикличности) подгрупп непримарного индекса сильно влияет на строение изучаемой группы, в особенности ее силовских подгрупп. Это видно из следующих теорем.

Т е о р е м а 5 [17]. *M^*-группы исчерпываются группами следующих типов:*

1) $G = P \times Q$, *P — группа Миллера—Морено, Q — абелева группа либо группа Миллера—Морено;*

2) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle d \rangle \leftthreetimes \langle c \rangle,\ |a| = |b| = 2,\ |c| = 2^{\alpha-2},\ \alpha \geqslant 3,\ |d| = 3$, $ab = ba,\ d^{-1}ad = ab,\ d^{-1}bd = a,\ c^{-1}ac = ab,\ c^{-1}bc = b,\ c^{-1}dc = d^2$, *причем* $Z(G) = \langle c^2 \rangle$ *и* $G/Z(G) \cong S_4$;

3) $G = P \leftthreetimes Q$, $Q = \langle b \rangle$, $b^q \in Z(G)$, $Q \ntriangleleft G$, P — *абелева группа либо группа Миллера—Морено;*

4) $G = P \leftthreetimes Q$, Q — *нециклическая абелева группа либо группа Миллера—Морено,* $Q = \langle b \rangle Q_1$, $\langle b \rangle \cap Q_1 = \langle b^q \rangle$, $P \leftthreetimes \langle b \rangle$ — *группа Миллера — Морено либо группа Шмидта, в которой P-группа кватернионов либо неабелева группа порядка p^3 экспоненты p,* $C_Q(P) = Q_1$;

5) $G = P \leftthreetimes Q$, $Q = \langle b \rangle Q_1$, $|b| = q^{\beta_1}$, $2 \leqslant \beta_1 \leqslant \beta$, $\langle b \rangle \cap Q_1 = \langle b^{q^{\beta_2}} \rangle$, $2 \leqslant \beta_2 \leqslant \beta_1$, $C_Q(P) = Q_1$, Q — *абелева группа либо группа Миллера — Морено;* $P \leftthreetimes \langle b^{q^{\beta_2 - 1}} \rangle$ — *группа Миллера — Морено либо группа Шмидта, в которой P — неабелева группа порядка p^3 экспоненты p;*

6) $G = P \times (Q \leftthreetimes R)$; $Q \leftthreetimes R$ — *группа Миллера—Морено,* P — *абелева группа;*

7) $G = (P \times Q) \leftthreetimes R$; $P \leftthreetimes R$, $Q \leftthreetimes R$ — *группы Миллера—Морено;*

8) $G = P \leftthreetimes (Q \times R)$; $P \leftthreetimes Q$, $P \leftthreetimes R$ — *группы Миллера—Морено.*

Теорема 6 [22]. *C^*-группы исчерпываются группами следующих типов:*

1) $G = P \times Q$, P — *минимальная нециклическая группа,* Q — *циклическая или минимальная нециклическая группа;*

2) $G = P \leftthreetimes Q$, $Q = \langle b \rangle$, $b^q \in Z(G)$, $Q \ntriangleleft G$, P — *циклическая либо минимальная нециклическая группа;*

3) $G = P \leftthreetimes Q$, P — *группа кватернионов,* $Q = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = 3$, $P \leftthreetimes \langle a \rangle$ — *группа Шмидта,* $b \in Z(G)$;

4) $G = P \leftthreetimes Q$, P — *элементарная абелева группа порядка p или p^2,* $Q = \langle b \rangle$, $P \leftthreetimes \Phi(Q)$ — *группа Миллера—Морено;*

5) $G = P \leftthreetimes Q$, P — *элементарная абелева группа порядка p или p^2,* $Q = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = q$, $P \leftthreetimes \langle a \rangle$ — *группа Миллера—Морено,* $b \in Z(G)$;

6) $G = P \times (Q \leftthreetimes R)$, P — *циклическая группа,* $Q \leftthreetimes R$ — *минимальная нециклическая группа;*

7) $G = (P \times Q) \leftthreetimes R$; $P \leftthreetimes R$, $Q \leftthreetimes R$ — *минимальные нециклические группы;*

8) $G = P \leftthreetimes (Q \times R)$; $P \leftthreetimes Q$, $P \leftthreetimes R$ — *минимальные нециклические группы.*

Как видно из теорем 4—6, классы S^*-, M^*-, C^*-групп значительно шире классов минимальных ненильпотентных, минимальных неабелевых, минимальных нециклических групп соответственно. Однако все группы из этих классов разрешимы и даже в большинстве случаев дисперсивны. Наложение того же условия нильпотентности (абелевости, цикличности) только на собственные подгруппы всех подгрупп непримарного индекса изучаемой группы приводит к классам S^{**}-, M^{**}-, C^{**}-групп, уже содержащим и неразрешимые группы.

Теорема 7 [23]. *Неразрешимые S^{**}-группы исчерпываются группами следующих типов:* 1) $G \cong \mathrm{PSL}(2, 5)$; 2) $G \cong \mathrm{PSL}(2, 7)$; 3) $G \cong \mathrm{SL}(2, 5)$; 4) $G \cong \mathrm{SL}(2: 7)$.

Заметим, что список неразрешимых M^{**} (C^{**}-)-групп состоит из групп типов 1, 3, 4 (типов 1, 3) теоремы 7.

Для разрешимых S^{**}-групп справедлива теорема.

Теорема 8. *Конечная разрешимая ненильпотентная группа с нильпотентными 3-максимальными подгруппами является S^{**}-группой.*

Доказательство. Пусть G — исследуемая группа и H — ее подгруппа непримарного индекса. Так как в разрешимой группе всякая максимальная подгруппа имеет примарный индекс, то H не является максимальной подгруппой в группе G. Но тогда всякая собственная подгруппа из H содержится в некоторой 3-максимальной подгруппе группы G, а потому является нильпотентной группой. Из этого следует, что H — либо нильпотентная группа, либо группа Шмидта, а G — S^{**}-группа. Теорема доказана.

Справедлива аналогичная теорема для разрешимых M^{**} (C^{**}-)-групп.

Теорема 9. *Конечная разрешимая непримарная (соответственно* *нециклическая) группа с исключительно абелевыми (соответственно циклическими) 3-максимальными подгруппами является M^{**} (соответственно C^{**}-)-группой.*

Несмотря на кажущуюся близость обобщения групп, даже разрешимые S^{**}-группы имеют довольно сложное устройство (см. теоремы 4.2.1, 4.3.1, 4.4.1, 4.5.1 из работы [6]). Например, только бипримарных дисперсивных S^{**}-групп выделено 11 неизоморфных типов, а недисперсивных бипримарных — 3 типа. Вообще же S^{**}-группы не более чем четырепримарны и все разрешимые небипримарные дисперсивны. Среди дисперсивных небипримарных S^{**}-групп выделено 33 типа, в том числе трипримарных — 25, четырепримарных — 8. Замена условия нильпотентности на условие абелевости (соответственно цикличности) упрощает структуру изучаемых групп, однако строение таких групп остается довольно сложным. Для примера приведем следующую теорему.

Теорема 10 [22]. *Бипримарные ненильпотентные C^{**}-группы исчерпываются группами следующих типов:*

а) *дисперсивные:* $G = P \leftthreetimes Q$, $|P| = p^{\alpha}$, $\alpha \geqslant 1$, $|Q| = q^{\beta}$, $\beta \geqslant 1$, *и выполняется одно из условий:*

1) $P = \langle a \rangle$, $Q = \langle b \rangle$, $C_Q(P) = \langle b^q \rangle$, $\alpha + \beta \geqslant 5$;

2) $\alpha = 2$, $Q = \langle b \rangle$, $C_Q(P) = \langle b^{q^{\beta_1}} \rangle$, $\beta_1 \leqslant 2 < \beta$;

3) $\alpha = 2$, $Q = \langle b \rangle$, $C_Q(P) = \langle b^{q^{\beta_1}} \rangle$, $2 < \beta_1 \leqslant \beta$, P — *минимальный нормальный делитель в* $P \leftthreetimes \langle b^{q^{\beta_1 - 2}} \rangle$;

4) $\alpha = 3$, $Q = \langle b \rangle$, $\beta \geqslant 2$, $P \leftthreetimes \langle b^{q^{\beta - 1}} \rangle$ — *группа Шмидта*;

5) $\alpha = 2$, $Q = \langle b \rangle \leftthreetimes \langle d \rangle$, $|b| = q^2$, $|d| = q$, $[b, d] \in \langle b^q \rangle$, $C_Q(P) = \langle b \rangle$, $P \leftthreetimes \langle d \rangle$ — *группа Миллера—Морено*;

6) $\alpha = 2$, Q — *группа кватернионов, если* $C_Q(P) = 1$, *то* P — *минимальный нормальный делитель во всякой подгруппе порядка* 2^2p^2;

7) Q — *обобщенная группа кватернионов порядка* 16, $\alpha = 1$;

8) P — *группа кватернионов*; $Q = \langle b \rangle$, $\beta \geqslant 2$;

9) G — *нециклическая группа*, $2 \leqslant \alpha + \beta \leqslant 4$;

10) P — *группа кватернионов*, $Q = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = 3$, $P \leftthreetimes \langle a \rangle$ — *группа Шмидта*, $b \in Z(G)$;

б) *недисперсивные:*

11) $G = A(\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle)$, $|a| = 3$, $|b| = 4$, A — *группа кватернионов*; $A \leftthreetimes \langle a \rangle$, $\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$ — *группы Шмидта*, $A \cdot \langle b \rangle$ — *обобщенная группа кватернионов*;

12) $G \cong S_4$.

Из всех приведенных теорем видно, что в основе описания изучаемых групп всегда лежат группы Шмидта.

4. Некоторые следствия. Приведем некоторые результаты, подтверждающие зависимость свойств изучаемых групп от свойств их подгрупп Шмидта.

Следствие 1. *Конечная группа дисперсивна, если в ней все подгруппы Шмидта сверхразрешимы.*

Доказательство. Пусть G — исследуемая группа. Если G — дисперсивна, то все доказано. Пусть G — недисперсивная группа и H — ее минимальная недисперсивная подгруппа. Ясно, что H является группой из теорем 3.2.2, 3.3.2 и 3.4.1 работы [6].

Пусть H — группа из теоремы 3.2.2. Тогда $H = A(Q \leftthreetimes \langle b \rangle)$, где подгруппы A, Q, $\langle b \rangle$ удовлетворяют одному из условий 1—3 этой теоремы. Ясно, что $Q \leftthreetimes \langle b \rangle$ — ненильпотентная группа. Так как всякая подгруппа Шмидта из $Q \leftthreetimes \langle b \rangle$ сверхразрешима, то $\delta_p(q) = 1$ и, значит, $q > p$. В силу ненильпотентности подгруппы $A \leftthreetimes Q$ в ней существует подгруппа Шмидта с инвариантной силовской p-подгруппой и неинвариантной силовской q-подгруппой. Так как эта подгруппа сверхразрешима по условию теоремы, то $\delta_q(p) = 1$ и потому $p > q$. Полученное противоречие показывает, что H не может быть группой из теоремы 3.2.2.

Пусть H — группа из теоремы 3.3.2. Тогда в H существует подгруппа Шмидта с инвариантной силовской p-подгруппой и неинвариантной силовской q-подгруппой, где p — наименьший простой делитель порядка H и, значит, $p < q$. По условию настоящей теоремы выделенная группа Шмидта сверхразрешима и потому $1 = \delta_q(p)$, т. е. $p > q$. Полученное противоречие показывает, что H не может быть группой из теоремы 3.3.2 .

Пусть, наконец, H — группа из теоремы 3.4.1. Все группы из этой теоремы имеют четный порядок и содержат подгруппу Шмидта с инвариантной силовской 2-подгруппой и неинвариантной силовской q-подгруппой. Понятно, что $\delta_q(2) > 1$. Однако по условию настоящей теоремы $1 = \delta_q(2)$, что невозможно. Таким образом, не может быть и группой из теоремы 3.4.1. Полученное во всех возможных случаях противоречие показывает, что G — дисперсивная группа. Следствие доказано.

Очевидным следствием из этой теоремы является следующий критерий сверхразрешимости конечных A-групп (конечную группу называют A-группой, если в ней все силовские подгруппы абелевы).

Следствие 2. *Конечная A-группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда минимальный нормальный делитель всякой ее неединичной подгруппы имеет простой порядок.*

1. *Шмидт О. Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб.— 1924.— **31**, № 3.— С. 366—372.
2. *Шеметков Л. А.* О. Ю. Шмидт и конечные группы // Укр. мат. журн.— 1971.— **23**, № 5.— С. 586—590.
3. *Redei L.* Das «Schiefe Product» in der Gruppen theorie // Comment. math. helv.— 1947.— **20**.— S. 225—267.
4. *Redei L.* Die endlichen einetufig nichtnilpotenten Gruppen // Publ. math.— 1956.— **4**.— S. 303—324.
5. *Гольфанд Ю. А.* О группах, все подгруппы которых специальные // Докл. АН СССР.— 1948.— **60**, № 8.— С. 1313—1315.
6. *Левищенко С. С., Кузенный Н. Ф.* Группы с условиями дисперсивности для подгрупп.— Киев : Киев. пед. ин-т, 1985.— 96 с.
7. *Белоногов В. А.* Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами // Мат. заметки.— 1968.— **3**, № 1.— С. 21—32.
8. *Мазуров В. Д.; Сыскин С. А.* О конечных группах со специальными силовскими подгруппами // Там же.— 1974.— **14**, № 2.— С. 217—222.
9. *Нагребецкий В. Т., Адамов С. Н.* О группах автоморфизмов групп Шмидта // Мат. зап. Урал. ун-та.— 1970.— 7, № 3.— С. 133—136.
10. *Пуусемп П. А.* Об автоморфизмах групп Шмидта // Тр. Таллин. политехн. ин-та.— 1983.— № 554.— С. 165—168.
11. *Iwasawa K.* Über die Structur der endlichen Gruppen, deren echte Untegruppen sämtlich nilpotent sind // Proc. Phys. Math. Soc.— 1941.— **23**.— S. 1—4.
12. *Niemenmaa M.* A characterization of minimal non-nilpotent groups // Arch. Math.—1982.— **38**, N 5.— P. 385—387.
13. *Журтов А. Х., Сыскин С. А.* О группах Шмидта // Сиб. мат. журн.— 1987.— **28**, № 2.— С. 71—78.
14. *Левіщенко С. С.* Скінченні нenільпотентні групи з деякими заданими системами нільпотентних підгруп // Допов. АН УРСР. Сер. А.— 1974.— № 1.— С. 35—37.
15. *Левищенко С. С., Кузенный Н. Ф.* Конечные бипримарные дисперсивные группы, в которых всякая подгруппа непримарного индекса нильпотентна либо является группой Шмидта // Исслед. групп с заданными системами подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981.— С. 93—104.
16. *Чунихина И. К., Чунихин С. А.* О p-разложимых группах // Мат. сб.— 1944.— **15**, № 2.— С. 325—342.
17. *Левищенко С. С.* Конечные группы с нильпотентными подгруппами непримарного индекса // Некоторые вопросы теории групп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1975.— С. 197—217.
18. *Левищенко С. С., Семко Н. Н.* Конструктивное описание конечных несверхразрешимых групп, у которых все 2-максимальные подгруппы метациклические // Исслед. групп с ограничениями для подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1988.— С. 42.
19. *Чунихин С. А.* О группах с наперед заданными подгруппами // Мат. сб.— 1938.— **4**, № 3.— С. 521—530.
20. *Suzuki M.* On a class of dobly transitive groups // Ann. Math.— 1962.— **75**, N 1.— P. 105—145.
21. *Janko Z.* Endliche Gruppen mit lauter nilpotenten zweimaximalen Untergruppen // Math. Z.— 1962.— **79**, N 5.— S. 422—424.
22. *Левищенко С. С.* Группы с некоторыми системами дисперсивных подгрупп.— Киев, 1984.— 60 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.11).
23. *Левищенко С. С., Кузенный Н. Ф.* Недисперсивные группы с некоторыми системами дисперсивных подгрупп.— Киев, 1984.— 47 с.— (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 84.35).

Получено 29.01.91