УДК 512.54

Л. С. КАЗАРИН, д-р физ.-мат. наук (Ярослав. ун-т)

Факторизации конечных групп разрешимыми подгруппами

Изучаются конечные группы, все композиционные факторы которых являются известными простыми группами.

Вивчаються скінченні групи, всі композиційні фактори яких є відомими простими групами.

В настоящей статье приведено доказательство некоторых результатов о K-группах, представимых в виде произведения своих разрешимых подгрупп, анонсированных ранее в [1]. Под K-группой, следуя [2], понимаем конечную группу, все композиционные факторы которой — «известные» простые группы. Перечень последних можно найти, например, в [2]. Вполне возможно, что класс K-групп совпадает с классом всех конечных групп. В частности, теоремы 1—3, приводимые ниже, решают несколько известных задач о группах с факторизацией по модулю классификации конечных простых групп.

Теорема 1. *Пусть K-группа G представима в виде произведения таких своих разрешимых подгрупп A, B и C, что $G = AB = AC = BC$. Тогда G — разрешимая группа.*

Теорема 1 дает решение задачи 6.37 из [3]. Из нее вытекает также решение известной задачи Кегеля.

Теорема 2. *Пусть K-группа G представима в виде произведения таких своих попарно перестановочных подгрупп $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n \geqslant 2$, что A_iA_j — разрешимая подгруппа для любых $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Тогда G — разрешимая группа.*

Теорема 3. *K-группа G, представимая в виде произведения двух своих разрешимых подгрупп нечетных индексов, разрешима.*

Теорема 3 является решением задачи В. С. Монахова 8.48 из [3].

Принятые обозначения, в основном, стандартны. Буква p используется только для обозначения простых чисел. Через S_n (A_n) обозначена симметрическая (знакопеременная) группа перестановок степени n. Запись $G = XY$, где X и Y — подгруппы G, означает, что группа G — произведение X и Y; $\mathrm{Aut}(X)$ — группа автоморфизмов группы X; $\mathrm{Out}(X)$ — группа внешних автоморфизмов группы X; $\prod_{i=1}^{k} X_i$ — прямое произведение групп $X_1, X_2, \ldots, X_k$.

Необходимые сведения о порядках групп автоморфизмов конечных простых групп можно найти в [2]. Все рассматриваемые группы предполагаются конечными.

1. Вспомогательные результаты. Лемма 1 (теорема Диксона [4, с. 213]). *Пусть $G \cong \mathrm{PSL}(2, q)$, q — степень p, $\varepsilon = (q-1, 2)^{-1}$, X — максимальная разрешимая подгруппа группы G. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

а) $|X| = \varepsilon q(q-1)$ *и X — нормализатор силовской p-подгруппы группы G;*

б) $|X| = 2\varepsilon(q \pm 1)$ *и X — диэдральная группа;*

в) $X \cong A_4$ *или* S_4.

Лемма 2. *Пусть X — максимальная неприводимая разрешимая подгруппа группы $\mathrm{GL}(3, q)$. Тогда ее порядок равен одному из следующих чисел: $6(q-1)^3$, $3(q^3-1)$, $216(q-1)$.*

Доказательство следует из теоремы 6, § 21 из [5].

Лемма 3. *Пусть $G \cong \mathrm{PSL}(n, q)$, $H = \mathrm{Out}(G)$. Тогда $|H| = d(n, q-1)\log_p q$, где q — степень p, $d = 1$ при $n = 2$ и $d = 2$ при $n > 2$.*

Доказательство. См. [2, с. 317—318].

Лемма 4 [6]. *Пусть конечная K-группа G представима в виде произведения двух своих разрешимых подгрупп. Тогда любой простой неабелев композиционный фактор группы G изоморфен одной из сле-*

дующих групп: PSU $(3, 8^2)$; M_{11}; PSL $(4, 2)$; PSp $(4, 3)$; PSL $(2, q)$, $q > 3$; PSL $(3, q)$, $q < 9$.

В дальнейшем множество простых групп, изоморфных группам, фигурирующим в заключении леммы 4, будем обозначать через $\mathfrak{M}$.

Лемма 5. *Пусть $G \cong$ PSU $(3, 8^2)$. Тогда максимальная разрешимая подгруппа группы G, порядок которой делится на 19, имеет порядок $19 \cdot 3$.*

Доказательство. Группа $X \cong$ SU $(3, 8^2)$ содержится в $R =$ GL $(3, 8^2)$. При этом элемент u порядка 19 из $X \leqslant R$ действует неприводимо на естественном модуле группы R. Согласно лемме 2 максимальная разрешимая подгруппа Y группы R, содержащая элемент порядка 19, будет иметь порядок $(8^6 - 1)\, 3$. Учитывая, что $Z(R) \leqslant Y$, $|Z(R)| = 8^2 - 1$, $|Z(R) \cap X| = 3$ и $R =$ SL $(3, 8^2)\, N_R(\langle u \rangle)$, получаем заключение леммы.

Лемма 6. *Пусть $G \cong$ PSp $(4, 3)$. Если порядок максимальной разрешимой подгруппы X группы G делится на 5, то $|X|$ делит $2^5 \cdot 5$.*

Доказательство. Порядок G равен $3^4 \cdot 2^6 \cdot 5$. Очевидно, что $Y =$ Sp $(4, 3)$ вкладывается в $R =$ GL $(4, 3)$ и элемент порядка 5 из Y действует неприводимо на естественном R-модуле. Применяя лемму 1.18 из [6], получаем заключение леммы 6.

Лемма 7. *Пусть $G \cong$ PSL $(4, 2)$. Если порядок максимальной разрешимой подгруппы X группы G делится на 7, то $|X|$ делит $2^4 \cdot 7 \cdot 3$.*

Доказательство следует из леммы 1.17 из [6].

Лемма 8 [7]. *Пусть X — максимальная разрешимая подгруппа группы $G \cong M_{11}$. Если $|X|$ делится на 11, то $|X| = 55$.*

Лемма 9. *Пусть группа G обладает факторизациями вида $G = X_1 X_2 = X_2 X_3 = X_1 X_3$, где X_1, X_2, X_3 — подгруппы групп G. Тогда*

$$|X_1 \cap X_2|\,|X_1 \cap X_3|\,|G : X_1| = |X_1|\,|X_2 \cap X_3|.$$

Доказательство. См. лемму 2.1 из [6].

Лемма 10. *Пусть группа $G = X_1 X_2$, где X_1, X_2 — максимальные разрешимые подгруппы группы G. Если G имеет такую нормальную подгруппу $N = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_k$, $k \geqslant 1$, что G/N — разрешимая группа, $G \leqslant$ Aut (N) и $N_1, N_2, \ldots, N_k$ — изоморфные простые неабелевы группы, то $|N_j|$ делит $|X_1 \cap N_j|\,|X_2 \cap N_j|\,|$ Out $(N_j)\,|$ для любого $j \leqslant k$.*

Доказательство. Пусть L_{ij} — проекция $N \cap X_i$ на N_j, $i = 1, 2$; $j = 1, 2, \ldots, k$. Очевидно, что L_{ij} — разрешимая группа для любых $i \leqslant 2$, $j \leqslant k$. Поэтому $L_i = L_{i1} \times L_{i2} \times \ldots \times L_{ik}$ — разрешимая подгруппа группы N, содержащая $N \cap X_i$ и допустимая относительно X_i, $i = 1, 2$. По выбору X_i имеем $L_i = N \cap X_i$ и $L_{ij} = N_j \cap X_i$ для любых $i \leqslant 2$, $j \leqslant k$. Отметим также, что если $N_r^a = N_l$ для некоторых $r, l \leqslant k$ и $a \in X_i$, $i = 1, 2$, то $L_{ir}^a = L_{il}$.

Зафиксируем $N_j = R$ для некоторого $j \leqslant k$ и выберем такие наименьшие подгруппы U, V групп X_1, X_2 соответственно, что выполнены одновременно следующие условия: $R \cap X_1 \leqslant U$, $R \cap X_2 \leqslant V$ и $UV = VU \geqslant R$.

Покажем сначала, что $S = R^U = R^V$. Рассуждая от противного, допустим, что $S = R^U \not\geqslant R^V$. Тогда $M = SU = (M \cap V)\, U$ в силу тождества Дедекинда и перестановочности U и V. Очевидно, что $R \leqslant M \leqslant UV$ и $R \cap V = (M \cap V) \cap R$. Так как $S = R^M = R^U$ не содержит R^V, то $|M \cap V| < |V|$, что противоречит выбору подгрупп U, V.

Итак, можно считать, что $S = R^U = R^V = R^T$, где $T = UV = SU = SV$. Очевидно, что S — минимальная нормальная подгруппа группы T, представимая в виде $S = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_t$, $t \leqslant k$, где $R = M_1, M_2, \ldots, M_t$ — изоморфные простые неабелевы группы. Нетрудно убедиться (см. замечание в конце первого абзаца доказательства), что $U \cap M_i$ сопряжена с $U \cap M_j$ для любых $i, j \leqslant t$. Кроме того, $T/S \cong U/U \cap S$ — разрешимая группа. Поэтому $C = C_T(S)$ — разрешимая нормальная подгруппа группы T, причем $T/C \leqslant \mathrm{Aut}\,(SC/C) \cong \mathrm{Aut}\,(S)$.

Используя стандартное соглашение о крышках ($\overline{T} = T/C$, $\overline{S} = SC/C$ и т. д.), имеем $\overline{T} \leqslant \mathrm{Aut}\,(\overline{S})$, $\overline{T} = \overline{UV} = \overline{SU} = \overline{SV}$, причем $\overline{S} = \overline{M}_1 \times \ldots \times \overline{M}_t$,

$\bar{S} \cap \bar{U} = \prod_{i=1}^{t} (\bar{M}_i \cap \bar{U})$. Нетрудно убедиться, что $\bar{T}$ вкладывается в группу $\mathrm{Aut}(\bar{M}_1) \mathrm{wr}\, \Gamma$, где Γ — разрешимая транзитивная группа перестановок степени t (см. также аналогичное рассуждение в лемме 2.3 из [6]). Пусть K — такая наибольшая подгруппа из $\bar{T}$, что $\bar{M}_l^x = \bar{M}_l$ для любого $l \leqslant t$ и $x \in K$. Очевидно, что $K \leqslant \prod_{i=1}^{t} \mathrm{Aut}(\bar{M}_i)$. Таким образом, можно считать, что $\bar{T}/K \cong \Gamma$ и на основании леммы 9 заключаем, что $|\bar{M}_1|^t = |R|^t$ делит

$$|\bar{T} : K|\,|K : \bar{S}|\,|\bar{S} \cap \bar{U}|\,|\bar{S} \cap \bar{V}|.$$

Учитывая, что $|\bar{S} \cap \bar{U}| = |\bar{R} \cap \bar{U}|^t = |\bar{R} \cap \bar{X}_1|^t$, получаем, что $|R|^t$ делит $|\mathrm{Out}(R)|^t |R \cap X_1|^t |R \cap Y_2|^t |\Gamma|$.

Теперь достаточно показать, если простое число r делит $|R|^t$, то оно делит $|\mathrm{Out}(R)|^t |R \cap X_1|^t |R \cap X_2|^t$, а затем применить индукцию.

Допустим, от противного, что $r \in \pi(R)$, но r не делит $|R \cap X_1|\,|R \cap X_2|\,\mathrm{Out}(R)|$. Тогда r^t делит $|\bar{T} : K| = |\Gamma|$. Но Γ — разрешимая транзитивная группа перестановок степени t. По формуле 5.9.2 из [8] наивысшая степень числа r, делящая порядок симметрической группы степени t, равна r^m, где $m = [t/r] + [t/r^2] + \ldots + [t/r^s]$, причем $r^{s+1} > t$ и $r^s \leqslant t$. Отсюда $m < t/r \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{-1}$ для любого простого r. Следовательно, r^t не делит $|\Gamma|$. Получили противоречие. Применение индукции завершает доказательство леммы 10.

2. Доказательство основных результатов. Доказательство теоремы 1. Пусть группа $G = X_1X_2 = X_1X_3 = X_2X_3$, где X_1, X_2, X_3 — ее разрешимые подгруппы. Предположим, что G является контрпримером наименьшего порядка к заключению теоремы 1. Если $R \neq 1$ — нормальная подгруппы группы G, то очевидно, что G/R удовлетворяет условию теоремы 1 и $|G/R| < |G|$. По выбору G группа G/R разрешима. Отсюда следует, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и N неразрешима. В частности, $N = N_1 \times N_2 \times \ldots \times \ldots \times N_k$, $k \geqslant 1$, где $N_1, N_2, \ldots, N_k$ — изоморфные простые неабелевы группы и $G \leqslant \mathrm{Aut}(N)$. Не ограничивая общности, можно считать, что, X_1, X_2, X_3 — максимальные разрешимые подгруппы группы G. По лемме 10

$$|N_1| \text{ делит } |\mathrm{Out}(N_1)|\,|N_1 \cap X_i|\,|N_1 \cap X_j| \qquad (1)$$

для любых $1 \leqslant i \neq j \leqslant 3$.

По лемме 4 $N_1 \in \mathfrak{M}$. Пусть $r \in \pi(N_1) \setminus \pi(\mathrm{Out}(N_1))$. Применяя (1), видим, что существуют по меньшей мере два таких индекса $i \neq j$, что r делит и $|X_i \cap N_1|$, и $|X_j \cap N_1|$.

Покажем, что r можно выбрать таким образом, что соотношение (1) быстро приведет к противоречию. Для $N_1 \cong \mathrm{PSU}(3, 8^2)$ положим $r = 19$. Для $N_1 \cong \mathrm{PSp}(4, 3)$ $r = 5$. Для $N_1 \cong \mathrm{PSL}(4, 2)$ $r = 7$. Для $N_1 \cong M_{11}$ $r = 11$. Для $N_1 \cong \mathrm{PSL}(3, 2)$ $r = 7$. Для $N_1 \cong \mathrm{PSL}(3, 3)$ $r = 13$. Для $N_1 \cong \mathrm{PSL}(3, 5)$ $r = 31$. Для $N_1 \cong \mathrm{PSL}(3, 4)$ $r = 7$. Для $N_1 \cong \mathrm{PSL}(3, 7)$ $r = 19$. Для $N_1 \cong \mathrm{PSL}(3, 8)$ $r = 73$.

Используя леммы 2, 3, 5—8 легко убедиться, что все указанные выше группы должны быть исключены. Продемонстрируем схему рассуждений только на примерах групп $\mathrm{PSU}(3, 8^2)$ и $\mathrm{PSL}(3,3)$.

Пусть $N_1 \cong \mathrm{PSU}(3, 8^2)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $r = 19$ делит $|N_1 \cap X_1|$ и $|N_1 \cap X_2|$. Из (1) и леммы 5 следует, что $|N_1 \cap X_1|\,|N_1 \cap X_2|$ делит $(19 \cdot 3)^2$ и $|N_1|$ делит $9 \cdot 19^2 \cdot 3^2$, что, очевидно, не так.

Если $N_1 \cong \mathrm{PSL}(3, 3)$, то $r = 13$ и в силу леммы 2 можно считать, что числа $|N_1 \cap X_1|$ и $|N_1 \cap X_2|$ делят $3 \frac{(3^3 - 1)}{(3 - 1)} = 3 \cdot 13$. В силу (1) $|N_1|$ делит $2 \cdot 3^2 \cdot 13^2$, что неверно.

Итак, из списка $\mathfrak{M}$ остались лишь группы PSL $(2, q,)$ где q — степень p. В этом случае использование леммы 1 вместе с соотношением (1) приводит к противоречию по той же схеме.

Доказательство теоремы 2. Пусть группа $G = A_1A_2 \ldots \ldots A_n$, $n \geqslant 2$, где $A_iA_j = A_jA_i$ — разрешимая группа для любых $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Введем подгруппы $X_1 = A_2A_3 \ldots A_n$, $X_2 = A_1A_3 \ldots A_n$ и $X_3 = A_1A_2A_4 \ldots A_n$. Если $n = 2$, то теорема, очевидно, верна. Если $n > 2$, то по индукции можно считать, что группы X_1, X_2, X_3 разрешимы. Теперь из $X_1X_2 = X_1X_3 = X_2X_3 = G$ и теоремы 1 следует справедливость теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Пусть группа G представима в виде произведения двух разрешимых подгрупп A и B нечетных индексов и является контрпримером наименьшего порядка к заключению теоремы 3. Если $1 \neq R \lhd G$, то нетрудно показать, что группа G/R удовлетворяет условию и заключению теоремы 3. Отсюда следует, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N. При этом N неразрешима, $G \leqslant \mathrm{Aut}(N)$ и $N = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_k$, $k \geqslant 1$, где $N_1, N_2, \ldots, N_k$—изоморфные простые неабелевы группы, По лемме 4 $N_1 \in \mathfrak{M}$. Применяя лемму 10, имеем

$$|N_1| \text{ делит } |\mathrm{Out}(N_1)|\,|N_1 \cap A|\,|N_1 \cap B|. \tag{2}$$

Так как $|G : A| \equiv 1 \pmod 2$, то $|AN : A| \equiv 1 \pmod 2$. Очевидно, что $|AN : A \cap N| = |AN : A|\,|A : A \cap N|$. По теореме об изоморфизмах $AN/N \cong A/A \cap N$. Отсюда $|AN : A| = |N : A \cap N|$. Следовательно, $|N : A \cap N|$ — нечетное число. Применяя то же самое рассуждение к N вместо G, $A \cap N$ вместо A и N_1 вместо N, получаем $|N_1 : A \cap N_1|$ — нечетное число. Аналогично, $|N_1 : N_1 \cap B|$ — нечетное число.

Теперь с помощью (2) и лемм 1—3, 5—8 легко исключить все группы из списка $\mathfrak{M}$. Покажем, например, как это делается для группы $N_1 \cong$ PSp $(4, 3)$.

Из соотношения (2) следует, что $5 \in \pi(N_1)$ и делит $|N_1 \cap A|\,|N_1 \cap B|$. По лемме 6 порядок максимальной разрешимой подгруппы X группы N_1 с $5 \in \pi(X)$ делит $2^5 \cdot 5$. Так как индекс X в N_1 четен, то получаем противоречие. Остальные случаи исключаются аналогично. Теорема 3 доказана.

1. *Казарин Л. С.* Произведения разрешимых групп // IX Всесоюзн. симп. по теории групп: Тез. докл. (18—20 сент. 1984 г.).— М., 1984.— С. 98—99.
2. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы.— М. : Мир, 1985.— 350 с.
3. *Коуровская* тетрадь (нерешенные вопросы теории групп): Изд-е 8. / В. Я. Блощицын, Ю. И. Мерзляков, В. А. Чуркин.— Новосибирск, 1982.— 116 с.
4. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I.— Berlin : Springer, 1967.
5. *Супруненко Д. А.* Группы матриц.— М. : Наука, 1972.— 351 с.
6. *Казарин Л. С.* О группах, представимых в виде произведения двух своих разрешимых подгрупп // Communs Algebra.— 1986.— **14**.— P. 1001—1066.
7. *Сыскин С. А.* Абстрактные свойства простых спорадических групп // Успехи мат. наук.— 1980.— 35, № 215.— С. 181—212.
8. *Холл М.* Теория групп.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 468 с.

Получено 20.11.90