УДК 517.911

А. Е. ЗЕРНОВ, канд. физ.-мат. наук (Одес. политехн. ин-т)

# Решение сингулярной задачи Коши неявного вида

Доказано существование непрерывно дифференцируемых решений задачи Коши

$$\sum_{k=l}^{m} a_k (x')^k + bx + f(t, x, x') = 0, \quad x(0) = 0,$$

где $2 \leqslant l \leqslant m$, $a_l \neq 0$, исследовано их асимптотическое поведение при $t \to +0$.

Доведено існування неперервно диференційовних розв'язків задачі Коші

$$\sum_{k=l}^{m} a_k (x')^k + bx + f(t, x, x') = 0, \quad x(0) = 0,$$

де $2 \leqslant l \leqslant m$, $a_l \neq 0$, досліджено їх асимптотичну поведінку при $t \to +0$.

Вопросы существования решений дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных, рассмотрены, в [1, с. 22; 2—4, с. 95; 5; 6]. О разрешимости задачи Коши см., например, [7, с. 47, 185; 4, с. 107, 168, 403; 8, с. 5; 9, с. 11, 52, 246].

Рассмотрим задачу Коши

$$\sum_{k=l}^{m} a_k (x')^k + bx + f(t, x, x') = 0, \tag{1}$$

$$x(0) = 0; \tag{2}$$

здесь $2 \leqslant l \leqslant m$, $a_l, \ldots, a_m, b$ — постоянные, $a_l \neq 0$, $f: D \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция,

$$D = \{(t, x, y): 0 < t \leqslant \tau, \quad |x| \leqslant rt, |y| \leqslant r\}$$

($\tau, r$ — постоянные, $r > 0$). Предположим, что

1) $|f(t, x, y)| \leqslant \alpha(t)$, $\forall (t, x, y) \in D$, где $\alpha: (0, \tau] \to (0, +\infty)$ — непрерывная функция, $\lim\limits_{t\to+0} \alpha(t) = 0$;

2) $|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leqslant (L + \lambda(t))(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$, $(t, x_i, y_i) \in D$, $i = 1, 2$, $L \geqslant 0$—постоянная, $\lambda: (0, \tau] \to [0, +\infty)$ — непрерывная функция, $\lim\limits_{t\to+0} \lambda(t) = 0$;

3) Существует $\lim\limits_{t\to+0} \dfrac{\alpha(t)}{t} = \sigma$, $0 \leqslant \sigma \leqslant +\infty$; если $\sigma = +\infty$ или если $\sigma < +\infty$, $b = 0$, то $\alpha$ — непрерывно дифференцируемая функция и $\alpha'(t) \geqslant 0$ при $t \in (0, \tau]$.

Решением задачи (1), (2), определенным при $t \in (0, \delta]$ ($\delta$ — постоянная, $0 < \delta \leqslant \tau$) будем называть непрерывно дифференцируемую функцию $x: (0, \delta] \to \mathbb{R}$, которая при $t \in (0, \delta]$ удовлетворяет уравнению (1) и неравенствам

$$|x(t)| < rt, \quad |x'(t)| < r, \tag{3}$$

причем

$$\lim_{t\to+0} x(t) = 0. \tag{4}$$

Пусть $c$ — любой ненулевой действительный корень уравнения

$$\sum_{k=l}^{m} a_k c^k = 0, \tag{*}$$

удовлетворяющий условию $|c| < r$. Предположим, что $K_1 + L < |K_2|$, где постоянные $K_1, K_2$ определяются равенствами

$$K_1 = \Big| \sum_{k=l+1}^{m} k a_k c^{k-1} \Big|, \quad K_2 = l a_l c^{l-1}.$$

Обозначим $\mathfrak{U}_c(\rho, M)$ множество непрерывно дифференцируемых функций $x: (0, \rho] \to \mathbb{R}$, каждая из которых при $t \in (0, \rho]$ удовлетворяет неравенствам

$$|x(t) - ct| \leqslant Mt\beta(t), \quad |x'(t) - c| \leqslant M\beta(t), \tag{5}$$

где $\rho, M$ — постоянные, $M > 0$, $0 < \rho \leqslant \tau$, а функция $\beta: (0, \tau] \to \mathbb{R}$ определяется равенством

$$\beta(t) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{если } \sigma = +\infty, \text{ или если } \sigma < +\infty, \ b = 0, \\ t, & \text{если } \sigma < +\infty, \ b \neq 0. \end{cases}$$

Теорема. *Существуют постоянные $\rho$, $M$ такие, что задача* (1), (2) *имеет единственное решение, определенное при $t \in (0, \rho]$ и принадлежащее множеству $\mathfrak{A}_c(\rho, M)$.*

Доказательство. Вначале выбираем $\rho$, $M$. Не будем выписывать здесь неравенства, определяющие этот выбор; отметим лишь, что $\rho$

достаточно мало, $M$ достаточно велико и что выбор $\rho$, $M$ обеспечивает законность всех последующих вычислений. Пусть $\mathfrak{B}$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\| x \| = \max_{t \in [0,\rho]} (| x(t) | + | x'(t) |)$$

(в точках $t = 0$, $t = \rho$ рассматриваются односторонние производные). Обозначим через $U$ подмножество $\mathfrak{B}$, каждый элемент $x : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ которого удовлетворяет при $t \in (0, \rho]$ неравенствам (5), причем $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. Можно считать, что при $t \in (0, \rho]$ для всех $x \in U$ выполнены неравенства (3).

Преобразуем уравнение (1) к виду

$$x' = c - \frac{1}{K_2} \left( bx + f(t, x, x') + a_l \sum_{k=2}^{l} C_l^k c^{l-k} (x' - c)^k + \sum_{k=l+1}^{m} a_k ((x')^k - c^k) \right)$$

и рассмотрим уравнение

$$x' = c - \frac{1}{K_2} \Big( bx + f(t, u(t), u'(t)) + a_l \sum_{k=2}^{l} C_l^k c^{l-k} (u'(t) - c)^k + \\ + \sum_{k=l+1}^{m} a_k ((u'(t))^k - c^k) \Big), \qquad (6)$$

где $u \in U$ — произвольная фиксированная функция.

Решением задачи (6), (2), определенным при $t \in (0, \delta]$, $0 < \delta \leqslant \rho$, будем называть непрерывно дифференцируемую функцию $x : (0, \delta] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую при $t \in (0, \delta]$ уравнению (6) и неравенствам (3) и удовлетворяющую условию (4). Если $(t, x) \in D_0$, где

$$D_0 = \{(t, x) : 0 < t \leqslant \rho, | x | < rt\},$$

то для уравнения (6) выполнены условия теоремы существования и единственности решения и непрерывной зависимости решений от начальных данных. Следуя Ф. Хартману [9, с. 52], введем понятие точки строгого выхода.

Определение. *Пусть*

$$\Phi = \{(t, x) : 0 < t \leqslant \delta, | x - g_1(t) | = g_2(t)\},$$
$$G = \{(t, x) : 0 < t \leqslant \delta, | x - g_1(t) | < g_2(t)\},$$

*где* $\delta > 0$ *— постоянная,* $g_i : (0, \delta] \to \mathbb{R}$ *— непрерывные функции,* $i = 1, 2$. *Пусть* $G_0$ *— открытое* $(t, x)$*-множество,* $G \cup \Phi \subset G_0$, *а* $F : G_0 \to \mathbb{R}$ *— непрерывная функция. Тогда точка* $(t_0, x_0) \in \Phi$ *называется точкой строгого выхода для множества* $G$ *по отношению к уравнению* $x' = F(t, x)$, *если для каждого решения этого уравнения, удовлетворяющего начальному условию* $x(t_0) = x_0$, *существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что а) если* $0 < t_0 < \delta$, *то* $(t, x(t)) \overline{\in} \bar{G}$ *для* $t_0 - \varepsilon < t < t_0$ *и* $(t, x(t)) \in G$ *для* $t_0 < t < t_0 + \varepsilon$; *б) если* $t_0 = \delta$, *то* $(t, x(t)) \overline{\in} \bar{G}$ *для* $\delta - \varepsilon < t < \delta$ ($\bar{G}$ *— замыкание множества* $G$).

Положим

$$\Phi_1 = \{(t, x) : t \in (0, \rho], | x - ct | = Mt\beta(t)\},$$
$$D_1 = \{(t, x) : t \in (0, \rho], | x - ct | < Mt\beta(t)\},$$
$$H = \{(t, x) : t = \rho, | x - c\rho | < M\rho\beta(\rho)\}.$$

Можно считать, что $\overline{D}_1 \setminus \{(0, 0)\} \subset D_0$. Определим функцию $\mathcal{A}_1 : D_0 \to \mathbb{R}$ равенством

$$\mathcal{A}_1(t, x) = (x - ct)^2 (t\beta(t))^{-2}$$

и обозначим через $a_1 : D_0 \to \mathbb{R}$ производную $\mathcal{A}_1$ в силу уравнения (6). Легко видеть, что $a_1(t, x) < 0$ при $(t, x) \in \Phi_1$. Отсюда следует такое утверждение.

Утверждение 1. *Все точки* $\Phi_1$ — *точки строгого выхода для* $D_1$ *по отношению к уравнению* (6).

Действительно, пусть $P(t_0, x_0) \in \Phi_1$ — произвольная точка, а $J_p$ : $(t, x_p(t))$ — интегральная кривая (6), проходящая через точку $P$. Очевидно,

$$\mathcal{A}_1(t_0, x_P(t_0)) = M^2, \quad a_1(t_0, x_P(t_0)) < 0.$$

Поэтому для $t_0 < \rho$ существует такое $\varepsilon > 0$, $\varepsilon = \varepsilon(t_0)$, что

$$\operatorname{sign}(\mathcal{A}_1(t, x_P(t)) - \mathcal{A}_1(t_0, x_P(t_0))) = -\operatorname{sign}(t - t_0), \quad |t - t_0| < \varepsilon,$$

т. е.

$$\operatorname{sign}(|x_P(t) - ct|(t\beta(t))^{-1} - M) = -\operatorname{sign}(t - t_0), \quad |t - t_0| < \varepsilon.$$

Если же $t_0 = \rho$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$\mathcal{A}_1(t, x_P(t)) > \mathcal{A}_1(\rho, x_P(\rho)), \quad \rho - \varepsilon < t < \rho,$$

т. е.,

$$|x_P(t) - ct|(t\beta(t))^{-1} > M, \quad \rho - \varepsilon < t < \rho.$$

Тем самым утверждение 1 доказано, из него следует утверждение 2.

Утверждение 2. *Хотя бы одна из интегральных кривых уравнения* (6), *пересекающих* $H$, *определена при* $t \in (0, \rho]$ *и лежит в* $D_1$ *при* $t \in (0, \rho]$.

Действительно, рассмотрим любую интегральную кривую $J : (t, x(t))$ уравнения (6), пересекающую $\Phi_1$. Согласно утверждению 1 $J$ необходимо пересекает $\overline{H}$. Определим отображение $\psi : \Phi_1 \to \overline{\mathrm{H}}$, сопоставляя каждой точке $P \in \Phi_1$ точку $\psi(P) \in \overline{H}$, принадлежащую той же интегральной кривой (6), что и точка $P$. Пусть $\psi(\Phi_1)$ — множество образов всех точек $\Phi_1$. Отображение $\psi$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно. Поэтому образ $\psi(\Phi_1)$ незамкнутого множества $\Phi_1$ незамкнут. Следовательно, множество $\Omega = \overline{H} \setminus \psi(\Phi_1)$ непусто. Пусть $J_u : (t, x_u(t))$ — интегральная кривая (6), проходящая через точку множества $\Omega$. Очевидно, $J_u$ примыкает к точке $(0, 0)$, оставаясь в $D_1$ при всех $t \in (0, \rho]$. Утверждение 2 доказано.

Из утверждения 2 следует существование решения уравнения (6) $x_u : (0, \rho] \to \mathbb{R}$, определенного при $t \in (0, \rho]$ и удовлетворяющего условию

$$|x_u(t) - ct| < Mt\beta(t), \quad t \in (0, \rho].$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$|x_u'(t) - c| < M\beta(t), \quad t \in (0, \rho].$$

Утверждение 3. $J_u : (t, x_u(t))$ — *это единственная интегральная кривая уравнения* (6), *пересекающая* $H$ *и лежащая в* $D_1$ *при всех* $t \in (0, \rho]$.

Действительно, рассмотрим однопараметрическое семейство кривых

$$\Phi_2(\nu) = \{(t, x) : t \in (0, \rho], |x - x_u(t)| = \nu t\}; \tag{7}$$

здесь $\nu$ — параметр, $0 < \nu \leqslant \nu_0$, где $\nu_0 = \frac{1}{3}(r - |c|)$. Положим

$$D_2(\nu) = \{(t, x) : t \in (0, \rho], |x - x_u(t)| < \nu t\}, \quad 0 < \nu \leqslant \nu_0.$$

Можно считать, что

$$\overline{D_2(\nu_0)} \setminus \{(0, 0)\} \subset D_0, \quad \overline{D}_1 \setminus \{(0, 0)\} \subset D_2(\nu_0).$$

Поэтому через каждую точку $(t, x) \in \overline{D}_1 \setminus \{(0, 0)\}$, удовлетворяющую условию $x \neq x_u(t)$, проходит единственная кривая семейства (7). Определим функцию $\mathcal{A}_2 : D_0 \to \mathbb{R}$ равенством

$$\mathcal{A}_2(t, x) = (x - x_u(t))^2 t^{-2}$$

и обозначим через $a_2 : D_0 \to \mathbb{R}$ производную $\mathcal{A}_2$ в силу уравнения (6). Нетрудно убедиться в том, что $a_2(t, x) < 0$ для всех точек $(t, x) \in \overline{D_2(\nu_0)} \setminus$

$\setminus\{(0, 0)\}$, удовлетворяющих условию $x \neq x_u(t)$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. *Для любого* $\nu \in (0, \nu_0]$ *все точки* $\Phi_2(\nu)$ — *точки строгого выхода для* $D_2(\nu)$ *по отношению к уравнению* (6).

Доказательство утверждения 4 аналогично доказательству утверждения 1.

Пусть $P^*(t^*, x^*)$ — любая фиксированная точка множества $\overline{D}_1 \setminus \{(0, 0)\}$ такая, что $x^* \neq x_u(t^*)$. Тогда $P^* \in \Phi_2(\nu^*)$ для некоторого $\nu^* \in (0, \nu_0]$. Пусть $I^* : (t, x^*(t))$ — интегральная кривая (6), проходящая через точку $P^*$. На основании утверждения 4 $I^*$ лежит вне $D_2(\nu^*)$ при всех допустимых $t < t^*$. С другой стороны, существует такое $t^{**} \in (0, \rho)$, что все точки $(t, x) \in \overline{D}_1 \setminus \{(0, 0)\}$, для которых $t \leqslant t^{**}$, принадлежат $D_2(\nu^*)$. Положим $t_* = \min\{t^*, t^{**}\}$. Очевидно, $I^*$ лежит вне $\overline{D}_1 \setminus \{(0, 0)\}$ при $t \in (0, t_*]$. Утверждение 3 доказано.

Доопределим $x_u$, $x'_u$ при $t = 0$ по непрерывности, полагая $x_u(0) = 0$, $x'_u(0) = 0$. Тогда функция $x_u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ принадлежит множеству $U$. Определим оператор $T : U \to U$, полагая $(Tu)(t) = x_u(t)$ для всех $u \in U$.

Утверждение 5. $T : U \to U$ — *сжимающий оператор*.

Действительно, пусть $u_i \in U$, $i = 1, 2$, — произвольные фиксированные функции и $Tu_i = x_i$, $i = 1, 2$. Если $u_1 = u_2$, то и $x_1 = x_2$, $t \in [0, \rho]$. Далее полагаем, что

$$\| u_1 - u_2 \| = h, \quad h > 0.$$

При $t \in (0, \rho]$ решения $x_1, x_2$ обращают соответствующие уравнения (6) в тождества, из которых следует

$$|x'_1(t) - x'_2(t)| \leqslant \frac{|b|}{|K_2|} \max_{t \in [0, \rho]} |x_1(t) - x_2(t)| + \left(\frac{K_1 + L}{|K_2|} + \omega_1(t)\right) h, \; t \in [0, \rho], \tag{8}$$

где $\omega_1 : (0, \rho] \to (0, +\infty)$ — некоторая непрерывная функция, $\lim\limits_{t \to +0} \omega_1(t) = 0$. С другой стороны,

$$|x_1(t) - x_2(t)| = \left| \int_0^t (x'_1(s) - x'_2(s))\, ds \right| \leqslant \int_0^t |x'_1(s) - x'_2(s)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\rho |x'_1(s) - x'_2(s)|\, ds, \quad t \in [0, \rho],$$

и потому ввиду (8)

$$\max_{t \in [0, \rho]} |x_1(t) - x_2(t)| \leqslant \frac{|b|\rho}{|K_2|} \max_{t \in [0, \rho]} |x_1(t) - x_2(t)| + \left(\frac{K_1 + L}{|K_2|} + \omega_1(t)\right) \rho h.$$

По предположению $\rho$ столь мало, что $|b|\rho < |K_2|$. Поэтому

$$\max_{t \in [0, \rho]} |x_1(t) - x_2(t)| \leqslant K_3 \rho h, \tag{9}$$

где $K_3 > 0$ — некоторая постоянная. Из (8), (9) вытекает

$$|x'_1(t) - x'_2(t)| \leqslant \left(\frac{K_1 + L}{|K_2|} + \frac{K_3}{|K_2|} |b| \rho + \omega_1(t)\right) h, \quad t \in [0, \rho].$$

Следовательно,

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x'_1(t) - x'_2(t)| \leqslant \left(\frac{K_1 + L}{|K_2|} + \omega_2(t)\right) h, \quad t \in [0, \rho],$$

где функция $\omega_2 : (0, \rho] \to (0, +\infty)$ определяется равенством

$$\omega_2(t) = \left(\frac{|b|}{|K_2|} + 1\right) K_3 \rho + \omega_1(t).$$

Положим

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{K_1 + L}{|K_2|} + 1\right).$$

Так как $K_1 + L < |K_2|$, то $0 < \theta < 1$. По предположению $\rho$ столь мало, что

$$\omega_2(t) < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{K_1 + L}{|K_2|}\right) \text{ при } t \in (0, \rho].$$

Поэтому

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \leqslant \theta h, \quad t \in [0, \rho],$$

откуда

$$\max_{t \in [0,\rho]} (|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)|) \leqslant \theta h,$$

т. е. $\| x_1 - x_2 \| \leqslant \theta h$ или, окончательно, $\| Tu_1 - Tu_2 \| \leqslant \theta \| u_1 - u_2 \|$, где $0 < \theta < 1$. Проведенные рассуждения не зависят от выбора $u_i \in U$, $i = 1, 2$. Утверждение 5 доказано.

Для завершения доказательства теоремы остается применить к оператору $T : U \to U$ принцип Банаха сжатых отображений (см., например, [10, с. 389]).

В заключение заметим, что задача (1), (2) имеет по крайней мере столько решений, сколько уравнение (*) имеет различных ненулевых действительных корней, удовлетворяющих условию $|c| < r$.


1. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 304 с.
2. *Вітюк О. Н.* Про двосторонні наближення до розв'язку систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, нерозв'язних відносно похідних // Допов. АН УРСР. Сер. А.— 1965.— № 3.— С. 284—287.
3. *Витюк А. Н.* Обобщенная задача Коши для системы дифференциальных уравнений, не решенной относительно производных // Дифференц. уравнения.— 1971.— 7, № 9. — С. 1575—1580.
4. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений.— Минск : Наука и техника, 1972.— 664 с.
5. *Зернов А. Е.* О решении одной системы сингулярных дифференциальных уравнений, частично разрешенной относительно производных // Мат. заметки.— 1978.— 24, № 3.— С. 349—357.
6. *Рудаков В. П.* О существовании и единственности решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, частично разрешенных относительно производных // Изв. вузов. Математика.— 1971.— № 9.— С. 79—84.
7. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Наука, 1975.— 240 с.
8. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.— Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1975.— 352 с.
9. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1970.— 720 с.
10. *Треногин В. А.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1970.— 496 с.


Получено 06.03.90