УДК 513.88:517.948.3

Г. С. ПОЛЕТАЕВ, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Парное уравнение типа свертки с ядрами из различных банаховых алгебр

Изучено парное интегральное уравнение типа свертки с ядрами, порождаемыми функциями из разных банаховых алгебр типа $L_1(-\infty, \infty)$ с весом, и определяемый уравнением оператор. Установлены теоремы о разрешимости и нетеровости, формулы представления решений и резольвентного ядра, формулы для вычисления характеристики и индекса соответствующего оператора.

Вивчено парне інтегральне рівняння типу згортки з ядрами, що породжуються функціями з різних банахових алгебр типу $L_1(-\infty, \infty)$ з вагою, та визначений рівнянням оператор. Установлені теореми про розв'язність і нетеровість, формули зображення розв'язків та резольвентного ядра, формули для обчислення характеристики та індекса відповідного оператора.

К решению интегральных уравнений с ядрами, зависящими от разности аргументов, приводит, в частности, ряд задач математической и теоретической физики, астрофизики, теории упругости, теории волноводов, разведочной геофизики. Краткую историю изучения таких уравнений типа свертки, как уравнение Винера — Хопфа, парное интегральное и соответствующее транспонированное уравнения можно найти в работах Ф. Д. Гахова, М. Г. Крейна, В. И. Смагиной, В. И. Смирнова, Г. Н. Чеботарева, Ю. И. Черского и др.

В [1] отмечено, что парные интегральные уравнения вида

$$\begin{aligned}\varphi(t)-\int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)\,\varphi(s)\,ds=f(t), \quad -\infty<t<0,\\ \varphi(t)-\int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s)\,\varphi(s)\,ds=f(t), \quad 0<t<\infty,\end{aligned} \tag{1}$$

возникают, например, при нахождении потенциала наэлектризованного диска.

Далее будем рассматривать уравнение (1) относительно неизвестной функции $\varphi(t)$ и порождаемый уравнением (1) оператор, полагая, что при некоторой постоянной $c>0$ $k_1(t)$, $k_2(t)\exp(ct)\in L_1(-\infty, \infty)$ $(\equiv L)$.

В принятых обозначениях уравнение (1) можно записать в виде

$$p^-\{\varphi*[\delta-k_1]\}(t)=f^-(t), \quad p^+\{\varphi*[\delta-k_2]\}(t)=f^+(t), \quad -\infty<t<\infty. \tag{2}$$

Заметим, что к случаю $k_1(t)$, $k_2(t)\exp(ct)\in L$ легко приводится такой: $k_j(t)\exp(c_jt)\in L$, $j=1, 2$. Если же $c<0$, то возникают трудности, подобные указанным в [1—3]. Этот случай без дополнительных существенных ограничений пока не исследован.

Как и для интегральных уравнений типа Винера — Хопфа [4], получающихся из (1) при $k_1(t)=0$, $-\infty<t<\infty$; $f(t)=0$, $t<0$, теория уравнений вида (1) оказывается гораздо сложнее, чем для простейших уравнений типа свертки

$$\varphi(t)-\int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)\,\varphi(s)\,ds=f(t), \quad -\infty<t<\infty. \tag{3}$$

Условие

$$1-\int_{-\infty}^{\infty} k(t)\,e^{i\lambda t}\,dt\neq 0, \quad -\infty<\lambda<\infty,$$

является необходимым и достаточным для однозначной разрешимости в $L_1(-\infty, \infty)$ интегрального уравнения (3) с ядром и произвольной правой частью из того же пространства. Это можно показать с помощью теоремы Винера [4] или теории нормированных колец Гельфанда. Однако для уравнений (1) указанного условия недостаточно. Область значений определяемого левой частью уравнения (1) оператора в соответствующих пространствах может не совпадать со всем пространством. Каждое из уравнений (1) справедливо лишь на полуоси и сам оператор может быть определен лишь на подпространстве.

Известно [5], что в достаточно общей постановке интегральное уравнение (1), по-видимому, впервые изучалось И. М. Рапопортом [6]. Наиболее полную теорию интегрального уравнения (1) и уравнения типа свертки с двумя ядрами, трактуемого с точки зрения теории операторов как транспонированное к (1) с ядрами из L, в целом классе E банаховых пространств построили М. Г. Крейн и И. Ц. Гохберг в работе [5]. Левые части парного и транспонированного к нему уравнений типа свертки порождают при этом «взаимно сопряженные» операторы [5]. Однако в рассматриваемом далее случае доказанные в [5] теоремы не применимы. Свертка функций, с помощью преобразования Фурье которой в [5] формулируются результаты, может не существовать.

В близкой к рассматриваемой далее постановке, но в других пространствах, уравнения (1), как и уравнения типа свертки с двумя ядрами, исследовались в работах Ф. Д. Гахова и Ю. И. Черского [1—3, 7] при дополнительных ограничениях типа требования гельдеровости некоторых функций. Эти исследования основаны на связи уравнений (1) с некоторой задачей Римана, возникающей при преобразованиях Фурье предварительно подготовленных уравнений. Указанные этапы решения в настоящей статье не используются. В работах автора [8, 9] дополнительные ограничения сняты, установлены теоремы существования при единственном условии (5), получены формулы для отыскания решений в соответствующем случае, формула, характеризующая связь решений уравнения (1) с правой частью, равной формальной единице кольца $\widetilde{L}\,(=\{\alpha\delta+k\},\ \alpha\in\mathbb{C},\ k\in L)$, с решениями этого уравнения с произвольной правой частью $\widetilde{f}$, обладающей свойством

$$\widetilde{f}=\beta\delta+f\quad(\beta\in\mathbb{C};\quad f(t),\ e^{ct}f(t)\in L).$$

Доказательства результатов для уравнения (1) имеются в работах [8, 9]. Как и для уравнений типа свертки с двумя ядрами, доказательства проводятся без предварительного преобразования Фурье исходных уравнений, основаны на сочетании модификации методов из [4, 5] с основными положениями теории банаховых алгебр [10, 11].

1. Обозначения и вспомогательные результаты.

1. Следуя [9], для любой функции $k(t)$, $-\infty<t<\infty$, положим $k_{\mp}(t)=k(t)$, $\mp t>0$, $k_{\mp}(t)=0$, $\mp t<0$. Символом $L_{(c)}\,(=L_{(c)}(-\infty,\infty))$, $c\in\mathbb{R}$, будем обозначать банахову алгебру всех комплекснозначных измеримых функций $k(t)$, $-\infty<t<\infty$, таких, что $e^{ct}k(t)\in L$. Роль умножения в $L_{(c)}$ играет свертка. Она обозначается знаком $*$. Норма в $L_{(c)}$ вводится формулой $\|k\|_{L_{(c)}}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|k(t)|e^{ct}dt$. Положим $L_{a\cap b}:=L_{(a)}\cap L_{(b)}$; $a,b\in\mathbb{R}_1$. В частности, $L_{c\cap c}=L_{(c)}$. Можно показать, что $L_{a\cap b}$ — банахова алгебра относительно нормы $\|k\|_{L_{a\cap b}}=\|k_+\|_{L_{(\max(a,b))}}+\|k_-\|_{L_{(\min(a,b))}}$ и свертки в качестве умножения при обычном смысле сходимости интегралов. Через $L^{\mp}$, $L^{\mp}_{(c)}$, $L^{\mp}_{a\cap b}$ обозначим подалгебры функций из L, $L_{(c)}$, $L_{a\cap b}$, соответственно, которые обращаются в нуль при $\pm t>0$.

2. Пусть $\delta\,(=\delta(t))$ — формальный элемент такой, что $\delta*\delta=\delta$, $\delta*k=k*\delta=k$, $k\in L^{+}_{(-|c|)}\oplus L^{-}_{(|c|)}$, а A — любая из алгебр L, $L^{\mp}$, $L_{(c)}$, $L^{\pm}_{(c)}$, $L_{a\cap b}$, $L^{\mp}_{a\cap b}$. Элемент δ играет роль мультипликативной единицы алгебры A, при этом $\delta\,\overline{\in}\,A$. Формальным присоединением этой единицы к A образуем банахову алгебру $\widetilde{A}$. Норма в $\widetilde{A}$ вводится по формуле $\|g\|_{\widetilde{A}}=|\alpha|+\|k\|_A$, $g=\alpha\delta+k$; $\alpha\in\mathbb{C}$, $k\in A$.

Алгебра $\widetilde{L}\,(\widetilde{L}_{(c)})$ не имеет радикала [8—10] и, следовательно, изоморфна некоторому кольцу непрерывных функций [10]. Поэтому элементы рассматриваемых множеств часто будем называть функциями. Обратный для обратимого в $\widetilde{A}$ элемента $g \in \widetilde{A}$ будем обозначать g'. Возможен случай, когда элемент $g \in \widetilde{A}$, обратимый в $\widetilde{A}$ или нет, имеет обратный в некоторой другой алгебре. Тогда чтобы уточнить, какой именно обратный для g рассматривается, будем применять индексы, ассоциированные с алгеброй, содержащей этот обратный. Например, для $g^+ \in \widetilde{L}^+_{0\cap c}$ символ $[g^+]'_{0\cap c}$ обозначает обратный, принадлежащий $\widetilde{L}_{0\cap c}$, а символ $[g^+]'_{c+}$ — обратный, принадлежащий $\widetilde{L}^+_{(c)}$. Введем проекторы $p^{\mp}: \widetilde{L}^+_{(-|c|)} + \widetilde{L}^-_{(|c|)} \to \widetilde{L}^{\mp}_{(\pm|c|)}$, действующие по формуле $p^{\mp}(\alpha\delta + k) = \alpha\delta + k_{\mp}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in L^+_{(-|c|)} \oplus L^-_{(|c|)}$. Для любой функции $g = \alpha\delta + k$, $k \in A$, положим $g^{\mp} = p^{\mp} g$. Очевидно, $g^{\mp} = \alpha\delta + k_{\mp}$.

3. Если $k \in A$, то через $K(\zeta)$ будем обозначать интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t)\, e^{i\zeta t} dt$, рассматриваемый при тех ζ, для которых он существует.

Следующие утверждения вытекают из общих результатов [10] о кольцах абсолютно интегрируемых функций с весом.

Вариант теоремы Винера в $\widetilde{L}_{(c)}$. *Для обратимости в* $\widetilde{L}_{(c)}$ *элемента* $\alpha\delta + k$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in L_{(c)}$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $\alpha[\alpha + K(\zeta)] \neq 0$, $\operatorname{Im}\zeta = -c$; $-\infty < \operatorname{Re}\zeta < \infty$.

Вариант теоремы Винера в $\widetilde{L}^{\mp}_{(c)}$. *Для обратимости в* $\widetilde{L}^{\mp}_{(c)}$ *элемента* $\alpha\delta + k_{\mp}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $k_{\mp} \in L^{\mp}_{(c)}$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $\alpha[\alpha + K_{\mp}(\zeta)] \neq 0$, $\mp \operatorname{Im}\zeta \geqslant +c$; $-\infty < \operatorname{Re}\zeta < \infty$.

2. Факторизация в $\widetilde{L}_{(c)}$.

1. Пусть $g = \alpha\delta + k$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in L_{a\cap b}$ такова, что при некотором $c \in [a, b]$ выполняется условие $\alpha[\alpha + K(\lambda - ic)] \neq 0$, $-\infty < \lambda < \infty$.

Определение 1. *Индексом* g, *элемента* $\widetilde{L}_{(c)}$ (*кратко* $\varkappa[g, c]$ *либо* $\operatorname{ind}[g]_c$) *назовем число, равное индексу функции* $\alpha + K(\lambda - ic)$ *переменной* λ *вдоль сомкнутой вещественной оси* $\{-\infty, \infty\}$, *получающейся из* $[-\infty, \infty]$ *отождествлением концов* [1—5, 7—9, 12—14], *т. е.*

$$\varkappa[g, c] := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d_\lambda [\arg\{\alpha + K(\lambda - ic)\}].$$

В частности, если $g = \delta - k$, $k \in L$, и $1 - K(\lambda) \neq 0$, $-\infty < \lambda < \infty$, то

$$\varkappa[g, 0] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d_\lambda \arg[1 - K(\lambda)].$$

2. Определение 2. *Под факторизацией функции* $g = \delta - k$, $k \in L_{(c)}$, *в* $\widetilde{L}_{(c)}$ *будем понимать представление ее в виде*

$$g = [\delta + \gamma_+] * [\delta + \gamma_-], \quad \gamma_{\mp} \in L^{\mp}_{(c)}. \tag{4}$$

Эту факторизацию назовем «правильной в $\widetilde{L}_{(c)}$*», если хотя бы один из* $\pm$*-факторов* $\delta + \gamma_{\mp}$ *обратим в своей подалгебре* $\widetilde{L}^{\mp}_{(c)}$. *Если оба фактора таковы, то* (4) *назовем «канонической в* $\widetilde{L}_{(c)}$*» факторизацией.*

С помощью изоморфизма соответствующих колец можно перенести в $\widetilde{L}_{(c)}$ факторизационные теоремы М. Г. Крейна ([4], § 2; [8, 9]).

Теорема 1. *Для того чтобы функция* $g = \delta - k$, $k \in L_{-(c)}$, *допускала каноническую в* $\widetilde{L}_{(c)}$ *факторизацию* (4), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$1 - K(\zeta) \neq 0, \quad \operatorname{Im} \zeta = -c; \qquad \varkappa[g, c] = 0.$$

Если g *допускает каноническую в* $\widetilde{L}_{(c)}$ *факторизацию, то последняя является для нее единственной правильной в* $\widetilde{L}_{(c)}$ *факторизацией.*

Теорема 2. *Пусть для* $g = \delta - k$, $k \in L_{(c)}$, *выполнены условия* $1 - K(\zeta) \neq 0$, $\operatorname{Im} \zeta = -c$; $\varkappa[g, c] \neq 0$. *Если* $\varkappa[g, c] > 0$ ($\varkappa[g, c] < 0$), *то, как бы ни были выбраны различные точки* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ ($m \leqslant |\varkappa[g, c]|$) *внутри полуплоскости* $\operatorname{Im} \zeta \geqslant -c$ ($\leqslant -c$) *и натуральные числа* $p_1, \ldots, p_m$ *такие, что* $\sum_{i=1}^{m} p_i = |\varkappa[g, c]|$, *всегда будет существовать единственная правильная факторизация* (4), *при которой функция* $1 + \Gamma_+(\zeta)$ ($1 + \Gamma_-(\zeta)$) *будет иметь внутри полуплоскости* $\operatorname{Im} \zeta \geqslant -c$ ($\operatorname{Im} \zeta \leqslant -c$) *своими нулями кратностей* $p_1, \ldots, p_m$ *точки* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, *и никаких других нулей иметь не будет. Указанными факторизациями исчерпываются все правильные в* $\widetilde{L}_{(c)}$ *факторизации функции* g.

3. Разрешимость парных интегральных уравнений.

1. Предположим, что $k_1 \in L$, $k_2 \in L_{(c)}$, $c > 0$, причем

$$[1 - K_1(\lambda)][1 - K_2(\lambda - ic)] \neq 0, \quad -\infty < \lambda < \infty, \tag{5}$$

а правая часть $f \in L_{0 \cap c}$, будем искать в $L_{0 \cap c}$ решения φ уравнения (1). Пусть решение $\varphi \in K_{0 \cap c}$ существует, тогда оно будет также решением системы

$$\varphi * [\delta - k_1] = f_- + b_+, \quad \varphi * [\delta - k_2] = f_+ + b_-, \tag{6}$$

где $b_+ = \{\varphi * [\delta - k_1]\}_+ (\in L^+)$, $b_- = \{\varphi * [\delta - k_2]\}_- (\in L^-_{(c)})$.

Согласно варианту теоремы Винера в $\widetilde{L}_{(c)}$ при выполнении условия (5) существуют обратные $[\delta - k_1]' \in \widetilde{L}$, $[\delta - k_2]' \in \widetilde{L}_{(c)}$. Нетрудно установить, что эти обратные допускают представления

$$[\delta - k_1]' = \delta + k_1^1, \quad k_1^1 \in L, \quad [\delta - k_2]' = \delta + k_2^1, \quad k_2^1 \in L_{(c)}, \tag{7}$$

и обладают свойством

$$[1 + K_1^1(\lambda)][1 + K_2^1(\lambda - ic)] \neq 0, \quad -\infty < \lambda < \infty. \tag{8}$$

Используя представления (7), из (6) получаем

$$\varphi = [f_- + b_+] * [\delta + k_1^1] = [f_+ + b_-] * [\delta + k_2^1]. \tag{9}$$

Положим

$$\varkappa_1 := \varkappa[\delta - k_1, 0], \quad \varkappa_2 := \varkappa[\delta - k_2, c],$$

т. е.

$$\varkappa_1 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d_\lambda \arg[1 - K_1(\lambda)],$$

$$\varkappa_2 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d_\lambda \arg[1 - K_2(\lambda - ic)]$$

и рассмотрим отдельно возможные случаи. Число $\varkappa = \varkappa_1 - \varkappa_2$ будем называть индексом уравнения (1) и соответствующего однородного уравнения. Заметим, что условие $f \in L_{0 \cap c}$ является необходимым для разрешимости уравнения (1) в $L_{0 \cap c}$, а условие $f \in \widetilde{L}_{0 \cap c}$ — необходимым для разрешимости уравнения (1) в $\widetilde{L}_{0 \cap c}$. Если при $f \in L_{0 \cap c}$ существует решение φ уравнения (1) в $\widetilde{L}_{0 \cap c}$, то необходимо $\varphi \in L_{0 \cap c}$.

2. Уравнение (1) с нулевыми индексами $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Пусть $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$. Тогда

$$\varkappa[\delta + k_1^1, 0] = -\varkappa_1 = 0, \quad \varkappa[\delta + k_2^1, c] = -\varkappa_2 = 0. \tag{10}$$

В силу теоремы 1 условия (8), (10) обеспечивают канонические в $\widetilde{L}$, $\widetilde{L}_{(c)}$ соответственно факторизации элементов $\delta + k_1^1$, $\delta + k_2^1$:

$$\delta + k_1^1 = [\delta + \gamma_{1+}]*[\delta + \gamma_{1-}], \quad \gamma_{1\mp} \in L^{\mp}, \tag{11}$$

$$\delta + k_2^1 = [\delta + \gamma_{2+}]*[\delta + \gamma_{2-}], \quad \gamma_{2\mp} \in L^{\mp}_{(c)}. \tag{12}$$

Используя множители факторизаций (11), (12), образуем функции

$$\delta + x := [\delta + \gamma_{1-}]*[\delta + \gamma_{2+}] \quad (= \varphi_\delta), \tag{13}$$

$$\delta + \omega_+ := [\delta + \gamma_{1+}]*[\delta + \gamma_{2+}]', \quad \delta + \omega_- := [\delta + \gamma_{2-}]*[\delta + \gamma_{1-}]'_{c-};$$

$$\delta + k_{\mp} := [\delta + \gamma_{2\mp}]*[\delta + \gamma_{1\mp}]'.$$

Из (9) с помощью (11), (12) получаем

$$[f_- + b_+]*[\delta + \gamma_{1+}]*[\delta + \gamma_{2+}]' = [f_+ + b_-]*[\delta + \gamma_{2-}]*[\delta + \gamma_{1-}]'. \tag{14}$$

При допущенных предположениях левая и правая части последнего равенства существуют и определяют некоторый элемент из $L_{0\cap c}$. Если провести очевидные (и допустимые !) алгебраические преобразования, а затем применить проекторы $p^{\mp}$, то из (14) получим формулы для определения $b_{\mp}$ [8, 9].

Опираясь на эти формулы и формулы (9), найдем выражение для решения $\varphi \in L_{0\cap c}$ уравнения (1), если только это решение существует. Попутно устанавливается единственность решения в $L_{0\cap c}$ при его существовании. С другой стороны, проверяется, что при допущенных предположениях и любой функции $f \in L_{0\cap c}$ полученными формулами для φ действительно определяется некоторое решение в $L_{0\cap c}$ уравнения (1) с порождающими ядра функциями k_1, k_2 и правой частью f.

При этом установлена такая теорема.

Теорема 3. *Пусть $k_1 \in L$, $k_2 \in L_{(c)}$, $c > 0$, и выполняется условие* (5), *а $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$. Тогда при любой правой части $f \in L_{0\cap c}$ парное интегральное уравнение* (1) *имеет одно и только одно решение $\varphi \in L_{0\cap c}$. Это решение может быть определено по каждой из формул*

$$\varphi(t) = \{f^- + [\delta + k_+]*p^+(f^+*[\delta + k_-] - f^-*[\delta + k_+]')\}*[\delta + k_1^1](t), \tag{15}$$

$$\varphi(t) = \{f^+ + [\delta + k_-]'*p^-(f^-*[\delta + k_+]' - f^+*[\delta + k_-])\}*[\delta + k_2^1](t), \tag{16}$$

$$\varphi(t) = [\delta + x]*\{p^-([\delta + \omega_+]*f^-) - [f^+]^- + p^+([\delta + \omega_-]*f^+)\}(t). \tag{17}$$

Почти не изменяя рассуждений, теорему 3 можно усилить.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда при любой правой части $f \in \widetilde{L}_{0\cap c}$ уравнение* (1) *имеет одно и только одно решение $\varphi \in \widetilde{L}_{0\cap c}$. Его можно определить по каждой из формул* (15) — (17). *Условие $f \in \widetilde{L}_{0\cap c}$ является необходимым для разрешимости уравнения* (1) *в $\widetilde{L}_{0\cap c}$. Если $f \in L_{0\cap c}$, то и $\varphi \in L_{0\cap c}$.*

Следствие 1. *Пусть условия теоремы* 4 *выполнены, тогда единственное в $\widetilde{L}_{0\cap c}$ решение φ_δ уравнения* (1) *с правой частью $f = \delta$ совпадает с функцией $\delta + x$. Решение $\varphi \in \widetilde{L}_{0\cap c}$ уравнения* (1) *с произвольной правой частью $f \in \widetilde{L}_{0\cap c}$ можно определить через φ_δ по формуле*

$$\varphi = \varphi_\delta*\{p^-([\varphi_\delta]'_0*[\delta + k_1^1]*f^-) - [f^+]^- + p^+([\varphi_\delta]'_c*[\delta + k_2^1]*f^+)\}. \tag{18}$$

Замечание. Из (17) следует, что при выполнении условий теоремы 4 решение $\varphi \in \widetilde{L}_{0\cap c}$ уравнения (1) с произвольной правой частью $f(t) = \alpha\delta(t) + g(t)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $g \in L_{0\cap c}$, допускает представление

$$\varphi(t) = f(t) + \alpha x(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_\pi(t, s) g(s)\, ds, \quad -\infty < t < \infty, \tag{19}$$

где резольвентное ядро определяется формулой

$$\gamma_\pi(t, s) = x(t-s) + \eta(-t)\,\omega_+(t-s) + \eta(t)\,\omega_-(t-s) + \int_{-\infty}^{0} x(t-r)\,\omega_+(r-$$

$$-s)\,dr + \int_{0}^{\infty} x(t-r)\,\omega_-(r-s)\,dr, \quad -\infty < t, \quad s < \infty; \tag{20}$$

$$\eta(t) := 1 \text{ при } t \geqslant 0, \quad \eta(t) := 0 \text{ при } t < 0.$$

При $f \in L_{0\cap c}$ формула (20) в рассматриваемых условиях принимает вид

$$\varphi(t) = f(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_\pi(t, s) f(t)\, dt, \quad -\infty < t < \infty.$$

3. Формула (18) справедлива и в более общем случае. Справедлива такая теорема.

Теорема 5 (о связи решений). *Пусть* $k_1 \in L$, $k_2 \in L_{(c)}$; $c > 0$, *и выполнено условие* (5), *а уравнение* (1) *с правой частью* $f = \delta$ *имеет решение* $\varphi_\delta \in \widetilde{L}_{0\cap c}$, *обладающее обратными* $[\varphi_\delta]_0'$ *и* $[\varphi_\delta]_c'$ в $\widetilde{L}$ *и* $\widetilde{L}_{(c)}$ *соответственно.*

Тогда при любой правой части $f \in \widetilde{L}_{0\cap c}$ *одно из решений* $\varphi \in \widetilde{L}_{0\cap c}$ *уравнения* (1) *можно определить по формуле* (18).

4. Уравнение (1) при $\varkappa = 0$. Пусть

$$\varkappa_1 \neq 0, \quad \varkappa_2 \neq 0, \quad \varkappa_1 - \varkappa_2 = 0, \tag{21}$$

а остальные условия прежние (как в теореме 4).

Перейдем от уравнения (1) к эквивалентному

$$p^-\{\sigma * [\delta - v_1]\} = f^-, \quad p^+\{\sigma * [\delta - v_2]\} = f^+, \tag{22}$$

где $v_1 \in L$, $v_2 \in L_{(c)}$:

$$\delta - v_j = [\delta + r] * [\delta - k_j], \quad j = 1, 2, \quad \sigma = \varphi * [\delta + r]',$$

а функция $\delta + r$ любая такая, что

$$\delta + r, \quad [\delta + r]' \in \widetilde{L}_{0\cap c}, \quad \varkappa[\delta + r, 0] = \varkappa[\delta + r, c] = -\varkappa_2.$$

В качестве $\delta + r$ можно взять, например, функцию $\{\delta + 4c\,[e^{-2ct}]_+\}^{-\varkappa_2}$, где подразумевается «сверточное» возведение в степень в алгебре $\widetilde{L}_{0\cap c}$. Если, например, $g, g' \in \widetilde{L}_{0\cap c}$, то $g^2 := g * g$; $g^{-3} = g' * g' * g'$. Легко видеть, что вместе с условием (5) выполняются такие:

$$\begin{gathered} [1 - V_1(\lambda)]\,[1 - V_2(\lambda - ic)] \neq 0, \quad -\infty < \lambda < \infty, \\ \varkappa[\delta - v_1, 0] = \varkappa[\delta + r, 0] + \varkappa[\delta + k_1, 0] = -\varkappa_2 + \varkappa_1 = \varkappa = 0, \\ \varkappa[\delta - v_2, c] = \varkappa[\delta + r, c] + \varkappa[\delta + k_2, c] = -\varkappa_2 + \varkappa_2 = 0. \end{gathered} \tag{23}$$

Следовательно к уравнению (22) применима теорема 4. Она показывает, что это уравнение при любой правой части $f \in \widetilde{L}_{0\cap c}$ имеет единственное решение $\sigma \in \widetilde{L}_{0\cap c}$. Учитывая взаимную однозначность соответствия между решениями уравнения (1) в $\widetilde{L}_{0\cap c}$ и решениями в $\widetilde{L}_{0\cap c}$ построенного уравнения (22) и дополнительные рассуждения [8, 9], получаем такой результат.

Теорема 6. *Пусть* $k_1 \in L$, $k_2 \in L_{(c)}$, $c > 0$, *и выполнены условия* (5), (21). *Тогда при любой правой части* $f \in \widetilde{L}_{0\cap c}$ *парное интегральное уравнение* (1) *имеет одно и только одно решение* $\varphi \in \widetilde{L}_{0\cap c}$. *Это решение можно определить по формуле*

$$\varphi = [\delta + r] * [\delta + y] * \{p^- ([\delta + \theta_+] * f^-) - [f^+]^- + p^+ ([\delta + \theta_-] * f^+)\}, \quad (24)$$

где

$$\delta + \theta_- := [\delta + u_{2-}] * [\delta + u_{1-}]'_{c-}, \quad \delta + \theta_+ := [\delta + u_{1+}] * [\delta + u_{2+}]',$$

$$\delta + y := [\delta + u_{1-}] * [\delta + u_{2+}], \quad \delta + u_{j\mp} -$$

факторы канонических факторизаций

$$[\delta - v_j]' = [\delta + u_{j+}] * [\delta + u_{j-}], \quad j = 1, 2,$$

возможных в силу теоремы 1. *Условия* $f \in \widetilde{L}_{0\cap c}$ *является необходимым для разрешимости уравнения* (1) *в* $\widetilde{L}_{0\cap c}$. Если $f \in L_{0\cap c}$, *то и* $\varphi \in L_{0\cap c}$. *Решение уравнения* (1) *с произвольной правой частью* $f \in \widetilde{L}_{0\cap c}$ *можно определить через решение* $\varphi_\delta \in \widetilde{L}_{0\cap c}$ *этого уравнения с правой частью* $f = \delta$ *по формуле* (18).

5. Уравнение (1) и соответствующее однородное уравнение с отличным от нуля индексом. С помощью соотношений (23) легко убедиться, что при допущенных предположениях один из индексов $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, например, $\varkappa_2$ можно считать равным нулю. Установлены [8, 9] такие результаты.

Теорема 7. *Пусть* $k_1 \in L$, $k_2 \in L_{(c)}$; $c > 0$, *и выполнено условие* (5), *а* $\varkappa_1 > 0$, $\varkappa_2 = 0$. *Если правильная факторизация* (11) *выбрана так, чтобы*

$$1 + \Gamma_{1-}(\zeta) \left(= 1 + \int_{-\infty}^{0} \gamma_{1-}(t) e^{i\zeta t} dt \right) \neq 0, \quad \operatorname{Im} \zeta \leqslant -c,$$

то: *а*) *при любой правой части* $f \in \widetilde{L}_{0\cap c}$ *уравнения* (1) *функция* $\varphi(t) \in \widetilde{L}_{0\cap c}$, *определяемая формулой* (17), [(19), (20)] *является одним из его решений*; *б*) *функция* φ_δ, *определяемая формулами* (13), *является одним из решений в* $\widetilde{L}_{0\cap c}$ *уравнения* (1) *с правой частью* $f = \delta$; *в*) *одно из решений* $\varphi \in \widetilde{L}_{0\cap c}$ *уравнения* (1) *с произвольной правой частью* $f \in \widetilde{L}_{0\cap c}$ *может быть определено через указанную функцию* φ_δ *по формуле* (18).

Используя связь однородного уравнения (18) с уравнением Винера — Хопфа

$$\chi(t) - \int_0^\infty w(t-s)\chi(s)\,ds = 0, \quad t > 0, \quad w(-s) = \delta(s) - [\delta + \gamma_{2+}] * [\delta - k_1](s), \quad (25)$$

получаем такую теорему.

Теорема 8. *Пусть* $k_1 \in L$, $k_2 \in L_{(c)}$, $c > 0$, *и выполнено условие* (5), *а* $\varkappa_2 = 0$. *Тогда для нетривиальной разрешимости в* $L_{0\cap c}$ *однородного уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $\varkappa_1 > 0$. *При выполнении этого условия совокупность всех решений* $\varphi \in \widetilde{L}_{0\cap c}$ *однородного уравнения* (1) *образует в* $L_{0\cap c}$ $\varkappa_1$-*мерное подпространство с базисом* $\{\varphi_i\}_0^{\varkappa_1 - 1}$, *который может быть получен из некоторого* D-*базиса*

*М. Г. Крейна** $\{\chi_i\}_0^{\varkappa_1-1}$ *решений* $\chi_i \in L^+$ $(i=0, \ldots, \varkappa_1-1)$ *уравнени* (25), *состоящего из функций, стремящихся к нулю при* $t \to \infty$, *по фор мулам*

$$\varphi_i(t) = \chi_i(-t) * [\delta(t) + \gamma_{2+}(t)], \quad -\infty < t < \infty; \quad i = 0, \ldots, \varkappa_1 - 1.$$

Если при условиях теоремы 8 индекс $\varkappa$ уравнения (1) положитель ный, то $\varkappa_1 > 0$. В силу свойств индекса $\varkappa[\delta + k_1^1, 0] < 0$. Согласно те ореме 2 функция $1 + \Gamma_{1-}(\zeta)$, $\Gamma_{1-}(\zeta) = \int\limits_{-\infty}^{0} \gamma_{1-}(t) e^{i\zeta t} dt$, определяемая пра вильной факторизацией (11), имеет внутри полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta < 0$ точн $\varkappa_1 = \varkappa$ нулей $\beta_1, \ldots, \beta_{\varkappa_1}$ с учетом их кратностей, которые могут быть на перед заданы. Соответствующей подстановкой в левую часть уравнения (1 можно убедиться в справедливости такой формулы для решений соответ ствующего ему однородного уравнения:

$$\varphi_{\beta_k}(t) = [\delta + x(t)] * [e^{-i\beta_k t}]_+, \quad -\infty < t < \infty, \tag{26}$$

где β_k — произвольный из нулей указанной функции, выбранных так чтобы $\operatorname{Im}\beta_k < -c$.

Полагая в (26) $\beta_k = -(c+k)i$; $k = 1, \ldots, \varkappa$, можно получить бази решений $\{\varphi_k\}_1^{\varkappa}$ однородного уравнения (1) в $L_{0\cap c}$, минуя связь с уравне нием (25):

$$\varphi_k(t) = [\delta + x(t)] * [e^{-(c+k)t}]_+; \qquad k = 1, \ldots, \varkappa, \quad \varkappa > 0. \tag{27}$$

В рассматриваемом случае $\varkappa > 0$, формулу общего решения в $\widetilde{L}_{0\cap c}$ урав нения (1) получаем в виде $\overline{\varphi} = \varphi(t) + \sum\limits_{k=1}^{\varkappa} c_k \varphi_k$, где c_k — произвольны постоянные, $\varphi(t)$ определяется теоремой 7 и формулой (17), а $\varphi_k(t)$ — фор мулами (27), в которых $\delta + x$ строится по формуле (13) при $\beta_k = -(c + k)i$.

Из теоремы 8 непосредственно следует такая теорема.

Теорема 9. *Пусть* $k_1 \in L$, $k_2 \in L_{(c)}$; $c > 0$, *и выполнены услови* (5), $\varkappa_2 = 0$, *а индекс* $\varkappa$ *уравнения* (1) *отрицательный* $(\varkappa_1 =) \ \varkappa < 0$. *Тогд однородное парное уравнение* (1) *не имеет в* $L_{0\cap c}$ *решений, отличных от ну левого.*

Перейдем к рассмотрению неоднородного уравнения (1) при условия теоремы 9.

В этом случае по теореме 1 функция $\delta + k_2^1$ имеет каноническу факторизацию (12), а по теореме 2 функция $\delta + k_1^1$ допускает бесконечн много правильных факторизаций (11).

Вместе с каждой фиксированной правильной в $\widetilde{L}$ факторизацией (11 и данной функцией $f \in \widetilde{L}_{0\cap c}$ будем рассматривать такую функцию: $h_+^f \in L^+ : h_+^f = p^+\{f^+ * [\delta + k_+] - f^- * [\delta + k_-]'\}$ и ее преобразование Фурь $H_+^f(\zeta)$ $(\operatorname{Im}\zeta \geqslant 0)$. Справедлива теорема.

Теорема 10. *Пусть выполнены условия теоремы* 9. *Тогда дл разрешимости в* $\widetilde{L}_{0\cap c}$ *неоднородного уравнения* (1) *с правой часты* $f \in \widetilde{L}_{0\cap c}$ *необходимо, чтобы при любой, и достаточно — при какой-нибуд одной, правильной факторизации* (11) *выполнялись* $|\varkappa_1|$ *дополнительны условий: если* $1 + \Gamma_{1+}(\alpha_k) = 0$, *то* $H_+^f(\alpha_k) = 0$ $(\operatorname{Im}\alpha_k > 0, \ k = 0, \ldots, |\varkappa_1| - 1)$. *При этом каждый нуль* α_k $(\operatorname{Im}\alpha_k > 0)$ *функции* $1 + \Gamma_{1+}(\zeta$ *считается столько раз, какова его кратность.*

Если уравнение (1) *разрешимо в* $\widetilde{L}_{0\cap c}$ *при некотором* $f \in \widetilde{L}_{0\cap c}$, *то ре шение в* $\widetilde{L}_{0\cap c}$ *единственно и может быть определено как по следующе*

* О D-базисе см., например [4, с. 51, 52]; см. также [5, 14].

формуле:

$$\varphi = \{f^- + [\delta + \gamma_{2+}]*[\delta + \gamma_{1+}]_0'*h_+\}*[\delta + k_1^1],$$

так и по формулам (16), (17), *где* $\delta + \gamma_{1\mp}$ — *множители произвольной правильной факторизации* (11). *Условие* $f \in \widetilde{L}_{0\cap c}$ *является необходимым для разрешимости уравнения* (1) *в* $\widetilde{L}_{0\cap c}$. *Если при некотором* $f \in L_{0\cap c}$ *уравнение* (1) *имеет решение* $\varphi \in \widetilde{L}_{0\cap c}$, *то* $\varphi \in L_{0\cap c}$.

Следствие 2. *При выполнении предположений теоремы* 9 *уравнение* (1) *с правой частью* $f = \delta$ *решений в* $\widetilde{L}_{0\cap c}$ *не имеет.*

6. Из теорем 3—10 с учетом того, что условие $\varkappa_2 = 0$ введено без ограничения общности, получается следующий критерий однозначной разрешимости уравнения (1) в $\widetilde{L}_{0\cap c}$.

Предложение 1. *Пусть* $k_1(t)$, $k_2(t)\exp(ct) \in L_1(-\infty, \infty)$; $c > 0$, *и выполнено условие* (5). *Тогда для однозначной разрешимости в* $\widetilde{L}_{0\cap c}$ *уравнения* (1) *при любой правой части* $f \in \widetilde{L}_{0\cap c}$ *необходимо и достаточно, чтобы его индекс равнялся нулю:* $\varkappa = 0$.

При выполнении этого условия единственное в $\widetilde{L}_{0\cap c}$ *решение уравнения* (1) *с произвольной правой частью* $f \in \widetilde{L}_{0\cap c}$ *может быть определено по формуле* (17), *в которой положено*

$$\delta + x := [\delta + \gamma_{1-}]*[\delta + \gamma_{2+}]*[\delta + r] \quad (= \varphi_\delta); \tag{28}$$

$\delta + \gamma_{j\mp}$ — *факторы канонических факторизаций*

$$[\delta + k_j^1]*[\delta + r]_{0\cap c}' = [\delta + \gamma_{j+}]*[\delta + \gamma_{j-}], \quad j = 1, 2; \quad \gamma_{1\mp} \in L^{\mp}, \quad \gamma_{2\mp} \in L_{(c)}^{\mp},$$

а функции $\delta + k_j$, $\delta + \omega_\mp$, $\delta + r$, φ_δ *определены выше.*

Отметим, что при $\varkappa_2 = 0$ следует положить $r = 0$, тогда получим теорему 4. Формулой (28) определяется единственное при условиях теорем 4, 6 решение $\varphi_\delta \in \widetilde{L}_{0\cap c}$ уравнения (1) с правой частью $f = \delta$.

4. Нетеровость оператора $I - K_\pi$. Введенную выше алгебру $L_{0\cap c}$ можно рассматривать, в частности, и как банахово пространство всех комплекснозначных измеримых функций, для которых существует и конечен принимаемый за новую норму в $L_{0\cap c}$ интеграл

$$\| k(t) \|_{L_{0\cap c}} := \int_{-\infty}^{\infty} | k(t) | (1 + e^{ct})\, dt, \quad k \in L_{0\cap c}. \tag{29}$$

Эта норма оказывается топологически эквивалентной указанной в п. 1.

Определяемый левой частью уравнения (1) оператор $I - K_\pi : L_{0\cap c} \to L_{0\cap c}$, действующий по формуле

$$[I - K_\pi]\,\varphi = ([\delta - k_2]*\varphi)^+ + ([\delta - k_1]*\varphi)^-,$$

$\varphi \in L_{0\cap c}$, будет при этом линейным ограниченным оператором, определенным во всем пространстве, и следовательно, замкнутым. Для нормы оператора K_π в $L_{0\cap c}$ справедлива оценка

$$\| K_\pi \|_{L_{0\cap c}} \leqslant 2\,(\| k_1 \|_L + \| k_2 \|_{L_{(c)}}).$$

Для действующего в $L_{0\cap c}$ оператора $I - K_\pi$ сопряженным является действующий в сопряженном пространстве $\overset{*}{L}_{0\cap c}$ оператор $I - K_\pi^\tau$, определяемый в нем левой частью транспонированного к парному (1) интегрального уравнения типа свертки с двумя ядрами

$$\psi(t) - \int_{-\infty}^{0} k_1(s - t)\,\psi(s)\,ds - \int_{0}^{\infty} k_2(s - t)\,\psi(s)\,ds = f(t), \quad -\infty < t < \infty. \tag{30}$$

Оператор $I - K_\pi : L_{0\cap c} \to L_{0\cap c}$, как можно показать, является нормально разрешимым. Это означает, что его область значений замкнута.

Действительно, если $k_1(t)$, $k_2(t)\exp(ct) \in L_1(-\infty, \infty)$; выполнено условие (5), а $\varkappa_2 = 0$, $\varkappa \geqslant 0$, то в силу теорем 3—8 область значений этого оператора совпадает со всем пространством. Если же, при прочих условиях, $\varkappa_2 = 0$, $\varkappa < 0$, то с помощью формулы (17) устанавливаем оценку, справедливую для любого элемента $\varphi \in L_{0\cap c}$ $(=D(I - K_\pi))$:

$$\|\varphi\|_{L_{0\cap c}} \leqslant m \| [I - K_\pi] \varphi \|_{L_{0\cap c}}, \quad \varphi \in L_{0\cap c},$$

с вычисляемой единой для всех $\varphi \in L_{0\cap c}$ постоянной $m > 0$. Эта оценка показывает корректную разрешимость уравнения (1), а также и его нормальную разрешимость [15]. Нетеровость оператора $I - K_\pi$ в $L_{0\cap c}$ означает, что он нормально разрешим (что равносильно нормальной разрешимости уравнения (1) в $L_{0\cap c}$) и его дефектные числа конечны. Нормальная разрешимость оператора $I - K_\pi$ имеет место в силу сказанного. Для установления конечности дефектных чисел доказывается, что решения однородного уравнения (30) в $L_{0\cup -c}$, конечность числа которых показана в [16], совпадают с его решениями в $L^*_{0\cap c}$, а решения в $L_{0\cap c}$ однородного уравнения (1), конечность числа которых следует из теорем 3, 8, 9, совпадают с его решениями в сопряженном к $L_{0\cup -c}$ пространстве.

Следуя указанному пути и учитывая, что условие $\varkappa_2 = 0$ не ограничивает общности, получаем такое предложение.

Предложение 2. *Пусть* $k_1(t)$, $k_2(t)\exp(ct) \in L_1(-\infty, \infty)$; $c > 0$, *и выполняется условие* (5). *Тогда действующий в банаховом пространстве* $L_{0\cap c}$ *линейный ограниченный оператор* $I - K_\pi$ *является нетеровым и имеет d-характеристику* (α, β) [4]:

$$\alpha = \frac{|\varkappa| + \varkappa}{2}, \quad \beta = \frac{|\varkappa| - \varkappa}{2}.$$

Под d-характеристикой [2] оператора $I - K_\pi$ понимается пара его дефектных чисел (α, β):

$$\alpha := \dim \operatorname{Ker} [I - K_\pi] \text{ в } L_{0\cap c},$$

$$\beta := \dim \operatorname{Coker} [I - K_\pi] \text{ в } L^*_{0\cap c}.$$

Индекс оператора $I - K_\pi$ в $L_{0\cap c}$ вычисляется по обычной формуле $\varkappa_{I-K_\pi} = \alpha - \beta$ и совпадает с индексом $\varkappa$ уравнения (1). Для изучаемых парных уравнений и транспонированных к ним уравнений типа свертки с двумя ядрами, как и для уравнений Винера — Хопфа, в отличие от фредгольмовых уравнений, имеет место следующее: если однородное уравнение (1) имеет нетривиальное решение в основном пространстве $L_{0\cap c}$, то соответствующее однородное уравнение (30) не имеет ненулевых решений в сопряженном пространстве $L^*_{0\cap c}$. Если же однородное уравнение (30) имеет в $L_{0\cup -c}$ нетривиальные решения, то однородное парное уравнение (1) не имеет их в сопряженном к $L_{0\cup -c}$ пространстве.

Таким образом, одно из дефектных чисел оператора $I - K_\pi$ и оператора $I - K_\pi^\tau$ всегда равно нулю.

В силу нормальной разрешимости оператора $I - K_\pi$ в $L_{0\cap c}$ условиям разрешимости неоднородного уравнения (1) в $L_{0\cap c}$, указанным в теореме 10, можно придать обычный вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_k(t)\,dt = 0, \quad k = 1, \ldots, |\varkappa|,$$

где $\{\psi_k(t)\}_1^{|\varkappa|}$ — базис решений однородного уравнения (30) в $L^*_{0\cap c}$ [16]. Кратко результат о нетеровости оператора $I - K_\pi$ отражен в [17].

1. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Особые интегральные уравнения типа свертки // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1956.— **20**, № 1.— С. 33—52.
2. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Интегральные уравнения типа свертки // Докл. АН СССР.— 1954.— **99**, № 2.— С. 197—199.
3. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Особые интегральные уравнения типа свертки и площадная задача типа задачи Римана // Учен. зап. Казан. ун-та.— 1954.— **114**, № 8.— С. 21—23.

4. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи мат. наук.— 1958.— 13, вып. 5.— С. 3—120.
5. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* О парном интегральном уравнении и его транспонированном. I // Теорет. и прикл. математика.— 1958.— Вып. 1.— С. 58—81.
6. *Раппопорт И. М.* О некоторых «парных» интегральных и интегро-дифференциальных уравнениях // Сборник трудов института математики АН УССР.— Киев : Ин-т математики АН УССР.— 1949.— 12.— С. 102—118.
7. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки.— М. : Наука, 1978.— 296 с.
8. *Полетаев Г. С.* О парных интегральных уравнениях с ядрами из различных банаховых алгебр.— М., 1973.— 30 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 6426-73Д.
9. *Полетаев Г. С.* О парных интегральных уравнениях с ядрами из различных банаховых алгебр. I // Функцион. анализ.— 1974.— Вып. 3.— С. 134—145.
10. *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца.— М. : Физматгиз, 1960.— 316 с.
11. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца.— М. : Наука, 1968.— 664 с.
12. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.— М. : Физматгиз, 1963.— 379 с.
13. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения.— М. : Наука, 1967.— 508 с.
14. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.— М. : Наука, 1971.— 352 с.
15. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1971.— 104 с.
16. *Полетаев Г. С.* Об уравнении, транспонированном к парному с ядрами из различных банаховых алгебр функций.— М., 1974.— 22 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 1895-74 Д.
17. *Полетаев Г. С.* О парных интегральных уравнениях с ядрами, зависящими от разности аргументов // IV шк. по теории операторов в функцион. пространствах: Тез. докл.— Минск, 1978.— 117 с.

Получено 29.05.90