УДК 517.547.22.519.21.2

А. М. ВИШНЯКОВА, асп. (Харьк. ун-т)

Рост целых хребтовых функций с ограничениями на аргументы нулей

Доказана точная оценка порядка роста целой хребтовой (в смысле Ю. В. Линника) функции, все нули которой расположены в области

$$\{z : |\arg z - \pi/2| < \alpha\} \cup \{z : |\arg z + \pi/2| < \alpha\}, \quad 0 < \alpha \leqslant \pi/2.$$

Доведена точна оцінка порядка зростання цілої хребтової (за Ю. В. Линником) функції, всі нулі якої розташовані в області

$$\{z : |\arg z - \pi/2| < \alpha\} \cup \{z : |\arg z + \pi/2| < \alpha\}, \quad 0 < \alpha \leqslant \pi/2.$$

Целой хребтовой функцией (ц. хр. ф.) называется целая функция $\varphi(z)$, удовлетворяющая условию

$$|\varphi(z)| \leqslant \varphi(i \operatorname{Im} z). \tag{1}$$

Изучение таких функций представляет интерес, в частности, потому, что все целые характеристические функции вероятностных распределений являются ц. хр. ф. [1, с. 42].

Известно [1, с. 51], что непостоянная ц. хр. ф. имеет рост не ниже первого порядка нормального типа, других ограничений на рост нет. В частности, порядком ц. хр. ф. может быть любое число $\rho \geqslant 1$. Однако ограничения на распределение нулей ц. хр. ф. влекут ограничения на ее рост. Наиболее известной теоремой такого вида является следующая теорема.

Теорема Марцинкевича [1, с. 59]. *Если показатель сходимости нулей ц. хр. ф. строго меньше ее порядка $\rho < \infty$, то $\rho \leqslant 2$.*

Эта теорема получила многочисленные обобщения (см. библиографию в [2, 3]) и приложения [4]. Постановка вопроса, рассматриваемого в настоящей статье, возникла в связи с таким результатом.

Теорема А [3]. *Пусть $\varphi(z)$ — ц. хр. ф. конечного порядка ρ, не имеющая нулей в области $G_\alpha = \{z : |\arg z - \pi/2| < \alpha\} \cup \{z : |\arg z + \pi/2| < \alpha\}$, $0 < \alpha \leqslant \pi/2$. Тогда $\rho < \pi/\alpha$, если $0 < \alpha < \pi/4$, и $\rho \leqslant 2$, если $\pi/4 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$.*

Отметим, что в [5] получена точная оценка ρ через α.

Условия, налагаемые на нули ц. хр. ф. в настоящей статье, имеют, по сравнению с ограничениями из теоремы A, «противоположный» характер: предполагаем, что все нули φ находятся в области G_α. Оказывается, это также влечет ограничения на ρ, и мы их точно описываем.

Т е о р е м а 1. *Пусть φ — ц. хр. ф. конечного порядка $\rho \neq 1$, 2, все нули которой лежат в области G_α. Тогда*

$$\alpha \geqslant \alpha_0(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2\rho}, \text{ при } \sin\dfrac{\rho\pi}{2} \geqslant 0; \\[2ex] \dfrac{1}{\rho}\operatorname{arctg}\left[\dfrac{1+\sin^{\rho-1}\dfrac{\pi}{2(\rho-1)}\cos\dfrac{\rho\pi}{2}}{\sin^{\rho-1}\dfrac{\pi}{2(\rho-1)}\left(-\sin\dfrac{\rho\pi}{2}\right)}\right] \text{ при } \sin\dfrac{\rho\pi}{2} < 0. \end{cases}$$

Точность оценки для α показывает следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Для любого $\rho \neq 1$, 2 существует ц. хр. ф. порядка ρ, все нули которой лежат в области G_α, где $\alpha = \alpha_0(\rho)$.*

Ограничение $\rho \neq 1$, 2 в теореме 1 существенно, так как существуют ц. хр. ф. порядков 1 и 2, не имеющие нулей: $\varphi(z) = \exp(i\beta z)$, $\beta \in \mathbb{R}$, и $\varphi(z) = \exp(-\gamma z^2)$, $\gamma > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Построим четную целую функцию, удовлетворяющую условиям теоремы 2. Для построения воспользуемся результатом работы [6]. В [6], по существу, доказано, что если четная ρ-тригонометрически выпуклая функция $h(\theta)$, $\theta \in [-\pi; \pi]$, удовлетворяет условиям 1) $h(\pi/2 + \theta) = h(\pi/2 - \theta)$, $\theta \in [0; \pi/2]$; 2) $h(\pi/2 + \theta) \leqslant h(\pi/2)\cos^\rho(\pi/2 - \theta)$, $\theta \in [0; \pi/2]$; 3) в некоторых окрестностях точек $\theta = \pm\pi/2$ функция h является ρ-тригонометрической, то найдется ц. хр. ф. φ порядка ρ с индикатором $h(\theta)$ вполне регулярного роста, не имеющая нулей во внутренности каждого из углов, в которых индикатор ρ-тригонометричен. Поэтому для доказательства теоремы 2 достаточно построить четную ρ-тригонометрически выпуклую функцию h, удовлетворяющую условиям 1—3 и являющуюся ρ-тригонометрической при $\theta \in (\alpha_0(\rho) - \pi/2; \pi/2 - \alpha_0(\rho))$.

Четную функцию h, удовлетворяющую условию 1, достаточно задавать на отрезке $[0; \pi/2]$. В случае $\sin\dfrac{\rho\pi}{2} \geqslant 0$ зададим h формулой

$$h(\theta) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2\rho}; \\[2ex] \cos\rho\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right), & \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2\rho} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Рассмотрим случай $\sin\dfrac{\rho\pi}{2} < 0$. В этом случае при достаточно малых $a > 0$ графики функций $y_1(\theta) = -a\cos\rho\theta$ и $y_2(\theta) = \cos\rho(\pi/2 - \theta)$ пересекаются в точке, лежащей на интервале $(\pi/2 - \pi/2\rho; \pi/2)$. Точка пересечения лежит тем ближе к $\pi/2$, чем больше $a \geqslant 0$. Максимальное $a \geqslant 0$, при котором функция y_1 удовлетворяет условию $y_1(\theta) \leqslant \cos^\rho(\pi/2 - \theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, равно $a_0 = \sin^{\rho-1}\pi/2(\rho-1)$ (в этом случае кривые $y_1(\theta) = -a_0\cos\rho\theta$ и $\cos^\rho(\pi/2 - \theta)$ касаются в точке $\theta_0 = \pi/2(\rho - 1)$. Легко видеть, что графики функций $y_1(\theta) = -a_0\cos\rho\theta$ и $y_2(\theta) = \cos\rho(\pi/2 - \theta)$ пересекаются в точке

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\rho}\operatorname{arctg}\left[\frac{1+\sin^{\rho-1}\dfrac{\pi}{2(\rho-1)}\cos\dfrac{\rho\pi}{2}}{\sin^{\rho-1}\dfrac{\pi}{2(\rho-1)}\left(-\sin\dfrac{\rho\pi}{2}\right)}\right].$$

Непосредственно проверяется, что функция

$$h(\theta) = \begin{cases} -\sin^{\rho-1}\dfrac{\pi}{2(\rho-1)}\cos\rho\theta, & 0 \leqslant \theta \leqslant \beta, \\[2ex] \cos\rho\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right), & \beta \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

будучи продолженной на $[-\pi; \pi]$ по четности и условию 1, является ρ-тригонометрически выпуклой, удовлетворяет 2, 3 и является ρ-тригонометрической при $\theta \in (\alpha_0(\rho) - \pi/2, \pi/2 - \alpha_0(\rho))$. Теорема 2 доказана.

При доказательстве теоремы 1 используется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть f — целая функция, $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| \leqslant r\}$, $H(\theta) = a\cos\rho\theta + b\sin\rho\theta$ ($\rho > 0$, a, $b \in \mathbb{R}$). Пусть α_1 и α_2, $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant 2\pi$, таковы, что при $\theta = \alpha_1$ и $\theta = \alpha_2$ тождественно по $r \in (1; \infty)$ выполняется*

$$H(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\ln|f(re^{i\theta})| = 0. \tag{2}$$

Тогда при любых $1 \leqslant r < R < \infty$ справедливо неравенство

$$\Big|\int_r^R (H'_\theta(\alpha_1)\ln|f(xe^{i\alpha_1})| - H'_\theta(\alpha_2)\ln|f(xe^{i\alpha_2})|)\,x^{-\rho-1}dx - $$
$$- 2\pi \sum_{\{\alpha_1,\alpha_2,r,R\}} \frac{H(\arg\zeta)}{|\zeta|^\rho}\Big| \leqslant C\frac{\ln M(2R, f)}{R^\rho} + C\frac{\ln M(2r, f)}{r^\rho}, \tag{3}$$

где знак $\sum\limits_{\{\alpha_1,\alpha_2,r,R\}}$ обозначает, что суммирование производится по всем нулям функции f, попавшим в кольцевой сектор $\{z : \alpha_1 < \arg z < \alpha_2, r < |z| < R\}$. Через C здесь и далее обозначаются необязательно одинаковые величины, не зависящие от r, R.

Доказательство. Применим формулу Грина к функциям $\ln|f(z)|$ и $H(\arg z)(|z|^{-\rho} - |z|^\rho R^{-2\rho})$ в области $\{z : \alpha_1 < \arg z < \alpha_2, 1 < |z| < R, R > 1$. Учитывая условие (2), получаем

$$\int_1^R (H'_\theta(\alpha_1)\ln|f(xe^{i\alpha_1})| - H'_\theta(\alpha_2)\ln|f(xe^{i\alpha_2})|)(x^{-\rho-1} - x^{\rho-1}R^{-2\rho})\,dx -$$
$$- 2\pi\sum_{\{\alpha_1,\alpha_2,1,R\}} H(\arg\zeta)(|\zeta|^{-\rho} - |\zeta|^\rho R^{-2\rho}) = C + CR^{-2\rho} -$$
$$- 2R^{-\rho}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \ln|f(Re^{i\theta})|\,H(\theta)\,d\theta. \tag{4}$$

Вычтем из (4) выражение, получающееся заменой в (4) R на r, $1 \leqslant r < R < \infty$. Полученную формулу запишем в виде

$$\int_r^R (H'_\theta(\alpha_1)\ln|f(xe^{i\alpha_1})| - H'_\theta(\alpha_2)\ln|f(xe^{i\alpha_2})|)\,x^{-\rho-1}dx -$$
$$- 2\pi\sum_{\{\alpha_1,\alpha_2,r,R\}} H(\arg\zeta)|\zeta|^{-\rho} = CR^{-2\rho} + Cr^{-2\rho} + \int_1^R (H'_\theta(\alpha_1)\ln|f(xe^{i\alpha_1})| -$$
$$- H'_\theta(\alpha_2)\ln|f(xe^{i\alpha_2})|)\,x^{\rho-1}R^{-2\rho}dx - \int_1^r (H'_\theta(\alpha_1)\ln|f(xe^{i\alpha_1})| -$$
$$- H'_\theta(\alpha_2)\ln|f(xe^{i\alpha_2})|)\,x^{\rho-1}r^{-2\rho}dx + 2\pi\sum_{\{\alpha_1,\alpha_2,1,R\}} H(\arg\zeta)|\zeta|^\rho R^{-2\rho} -$$
$$- 2\pi\sum_{\{\alpha_1,\alpha_2,1,r\}} H(\arg\zeta)|\zeta|^\rho r^{-2\rho} + 2r^{-\rho}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\ln|f(re^{i\theta})|\,H(\theta)\,d\theta -$$
$$- 2R^{-\rho}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\ln|f(Re^{i\theta})|\,H(\theta)\,d\theta. \tag{5}$$

Для окончания доказательства необходимо оценить сверху модуль правой части (5) выражением вида $CR^{-\rho}\ln M(2R, f) + Cr^{-\rho}\ln M(2r, f)$. Будем обозначать $T(r, f)$ неванлинновскую характеристику функции f, $n(r, f)$ — считающую функцию нулей. Для оценки правой части (5) используем известные неравенства теории распределения значений мероморфных функций (см., например, [7], гл. 1):

$$а)\ \left|\int_1^t H_\theta'(\alpha)\ln|f(xe^{i\alpha})|\,x^{\rho-1}t^{-2\rho}dx\right| \leqslant Ct^{-\rho-1}\int_1^t |\ln|f(xe^{i\alpha})||\,dx \leqslant$$

$$\leqslant Ct^{-\rho}\left[T(2t, f) + T\left(2t, \frac{1}{f}\right)\right] \leqslant Ct^{-\rho}\ln M(2t, f) \tag{5.а}$$

(мы воспользовались неравенством (7.5) из [7, с. 55]);

$$б)\ \left|\sum_{\{\alpha_1,\alpha_2,1,t\}} H(\arg\zeta)|\zeta|^\rho t^{-2\rho}\right| \leqslant C\sum_{\{0,2\pi,1,t\}}|\zeta|^\rho t^{-2\rho} =$$

$$= Ct^{-2\rho}\int_1^t x^\rho dn(x, f) \leqslant Ct^{-\rho}n(t, f) \leqslant Ct^{-\rho}t\ln M(2t, f); \tag{5.б}$$

$$в)\ \left|t^{-\rho}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\ln|f(te^{i\theta})|\,H(\theta)\,d\theta\right| \leqslant Ct^{-\rho}\int_0^{2\pi}|\ln|f(te^{i\theta})||\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant Ct^{-\rho}\left[T(t, f) + T\left(t, \frac{1}{f}\right)\right] \leqslant Ct^{-\rho}\ln M(2t, f). \tag{5.в}$$

Применяя оценки (5.а) — (5.в) и тривиальную оценку $t^{-2\rho} \leqslant Ct^{-\rho}\ln M(2t, f)$ при $t = r, R$, получаем утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1. Не умаляя общности, можем считать, что φ — четная функция, $\varphi(0) = 1$. Обозначим $f(z) = \varphi(iz)$. Функция f является четной целой функцией порядка $\rho \neq 1, 2$, $f(0) = 1$, удовлетворяющей условию

$$|f(z)| \leqslant f(\operatorname{Re} z), \tag{6}$$

все ее нули лежат в углах $\{|\arg z| < \alpha\} \cup \{|\arg z - \pi| < \alpha\}$.

I. Рассмотрим случай $\sin\frac{\rho\pi}{2} \geqslant 0$. Предположим, вопреки утверждению теоремы, что $\alpha < \pi/2\rho$.

1. Применим лемму 1, положив $H(\theta) = \sin\rho\theta$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2\pi/\rho$. Условие (2) выполняется, так как $H(0) = H(2\pi/\rho) = 0$. Получаем

$$\int_r^R (\ln|f(x, |\ln|f(xe^{i2\pi/\rho})|)\,x^{-\rho-1}dx - \frac{2\pi}{\rho}\sum_{\{0,\ 2\pi/\rho, r, R\}}\sin(\rho\arg\zeta)|\zeta|^{-\rho} \leqslant$$

$$\leqslant CR^{-\rho}\ln f(2R) + Cr^{-\rho}\ln f(2r). \tag{7}$$

Левую часть (7) обозначим L_1 и оценим снизу, используя (6):

$$L_1 \geqslant \int_r^R (\ln|f(x)| - \ln\left|f\left(x\left|\cos\frac{2\pi}{\rho}\right|\right)\right|x^{-\rho-1}dx -$$

$$-\frac{2\pi}{\rho}\sum_{\{0,\pi/\rho,r,R\}}|\zeta|^{-\rho} \geqslant \left(1 - \left|\cos\frac{2\pi}{\rho}\right|^\rho\right)\int_r^R \ln|f(x)|\,x^{-\rho-1}dx -$$

$$-Cr^{-\rho}\ln f(2r) - \frac{4\pi}{\rho}\sum_{\{0,\alpha,r,R\}}|\zeta|^{-\rho}$$

(мы воспользовались тем, что все нули функции f лежат в углах $\{|\arg z| <$

$< \alpha\} \cup \{|\arg z - \pi| < \alpha\})$. Подставляя последнюю оценку в (7), получаем

$$\left(1-\left|\cos\frac{2\pi}{\rho}\right|^{\rho}\right)\int_r^R \ln|f(x)|\,x^{-\rho-1}dx \leqslant \frac{4\pi}{\rho}\sum_{\{0,\alpha,r,R\}}|\zeta|^{-\rho} +$$

$$+ CR^{-\rho}\ln f(2R) + Cr^{-\rho}\ln f(2r). \qquad (8)$$

2. Применим лемму 1, положив $H(\theta) = \cos\rho\theta$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi/2$. Условие (2) выполняется в силу четности f и (6). Получаем

$$\int_r^R \sin\frac{\rho\pi}{2}\ln|f(ix)|\,x^{-\rho-1}dx - \frac{2\pi}{\rho}\sum_{\{0,\alpha,r,R\}}\cos(\rho\arg\zeta)\,|\zeta|^{\rho} \geqslant$$

$$\geqslant -CR^{-\rho}\ln f(2R) - Cr^{-\rho}\ln f(2r). \qquad (9)$$

Левую часть (9) обозначим L_2. Учитывая, что $\sin\frac{\rho\pi}{2} \geqslant 0$, а $\ln|f(ix)| \leqslant \leqslant \ln|f(0)| = 0$, имеем

$$L_2 \leqslant -\frac{2\pi}{\rho}\cos\rho\alpha\sum_{\{0,\alpha,r,R\}}|\zeta|^{-\rho}.$$

После подстановки в (9) будем иметь

$$\frac{2\pi}{\rho}\cos\rho\alpha\sum_{\{0,\alpha,r,R\}}|\zeta|^{-\rho} \leqslant CR^{-\rho}\ln f(2R) + Cr^{-\rho}\ln f(2r). \qquad (10)$$

3. Подставляя оценку (10) в (8) и учитывая, что при $\rho \neq 1, 2$ выполняется $1 - \left|\cos\frac{2\pi}{\rho}\right|^{\rho} > 0$, имеем

$$\int_r^R \ln|f(x)|\,x^{-\rho-1}dx \leqslant CR^{-\rho}\ln f(2R) + Cr^{-\rho}\ln f(2r). \qquad (11)$$

Прибавив к (11) неравенство

$$\int_R^{2R} \ln|f(x)|\,x^{-\rho-1}dx \leqslant CR^{-\rho}\ln f(2R),$$

после переобозначений получим

$$\int_r^R \ln|f(x)|\,x^{-\rho-1}dx \leqslant CR^{-\rho}\ln f(R) + Cr^{-\rho}\ln f(r). \qquad (12)$$

Воспользуемся теперь следующей леммой.

Лемма 2 [3, с. 9]. *Пусть $u > 0$ — непрерывно дифференцируемая неубывающая функция на $[1, \infty)$, которая для всех r и R, $r < R$, удовлетворяет условию*

$$u(R) - u(r) \leqslant A(Ru'(R) + ru'(r)).$$

Тогда для всех достаточно больших x имеем: 1) если $u(\infty) = \infty$, то $u(x) \geqslant Ax^{\varepsilon}$; 2) если $u(\infty) < \infty$, то $u(\infty) - u(x) \leqslant Ax^{-\varepsilon}$, где ε — некоторое положительное число.

Применяя лемму 2 с $u(x) = \int_1^x \ln|f(t)|\,t^{-\rho-1}dt$, получаем противоречие тому, что функция f имеет порядок ρ.

Итак, в случае $\sin\frac{\rho\pi}{2} \geqslant 0$ будем иметь $\alpha \leqslant \alpha_0(\rho)$.

II. Рассмотрим случай $\sin\frac{\rho\pi}{2} < 0$. Предположим, вопреки утверждению теоремы 1, что $\alpha < \alpha_0(\rho)$.

1. Обозначим $\theta_0 = \pi/2 - \pi/2(\rho - 1)$. Применим лемму 1, положив $H(\theta) = \sin\rho(\theta - \theta_0)$, $\alpha_1 = \theta_0$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$. Условие (2) выполняется в силу (6), четности f и $H(\theta)$. Учитывая, что $\alpha < \alpha_0(\rho) < \theta_0$, имеем

$$\int_r^R \left(\ln|f(xe^{i\theta_0})| - \cos\frac{\rho\pi}{2(\rho-1)}\ln|f(ix)|\right)x^{-\rho-1}dx \geqslant$$
$$\geqslant - CR^{-\rho}\ln f(2R) - Cr^{-\rho}\ln f(2r). \tag{13}$$

Левую часть (13) обозначим L_3 и оценим сверху:

$$L_3 \leqslant \cos^\rho\theta_0 \int_r^R \ln|f(x)|\,x^{-\rho-1}dx - \sin\frac{\pi}{2(\rho-1)}\int_r^R (-\ln|f(ix)|)\,x^{-\rho-1}dx +$$
$$+ Cr^{-\rho}\ln f(2r).$$

Подставив в (13), получим

$$\int_r^R (-\ln|f(ix)|)\,x^{-\rho-1}dx \leqslant \sin^{\rho-1}\frac{\pi}{2(\rho-1)}\int_r^R \ln|f(x)|\,x^{-\rho-1}dx +$$
$$+ CR^{-\rho}\ln f(2R) + Cr^{-\rho}\ln f(2r). \tag{14}$$

Применим формулу (9). Оценивая сверху левую часть (9) с помощью (14), получаем

$$\frac{2\pi}{\rho}\cos\rho\alpha \sum_{\{0,\alpha,r,R\}} |\zeta|^{-\rho} \leqslant -\sin\frac{\rho\pi}{2}\sin^{\rho-1}\frac{\pi}{2(\rho-1)}\int_r^R \ln|f(x)|\,x^{-\rho-1}dx +$$
$$+ CR^{-\rho}\ln f(2R) + Cr^{-\rho}\ln f(2r). \tag{15}$$

2. Покажем, что

$$\int_r^R (-\ln|f(ix)|\,x^{-\rho-1}dx = \sin^{\rho-1}\frac{\pi}{2(\rho-1)}\int_r^R \ln|f(x)|\,x^{-\rho-1}dx +$$
$$+ O(R^{-\rho}\ln f(2R) + r^{-\rho}\ln f(2r)). \tag{16}$$

Используем лемму 1, полагая $H(\theta) = \sin\rho(\theta - \alpha_0(\rho))$, $\alpha_1 = \alpha_0(\rho)$, $\alpha_2 = \pi/2$. Имеем

$$\int_r^R \left(\ln|f(xe^{i\alpha_0(\rho)})| - \cos\rho\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_0(\rho)\right)\ln|f(ix)|\right)x^{-\rho-1}dx \leqslant$$
$$\leqslant CR^{-\rho}\ln f(2R) + Cr^{-\rho}\ln f(2r).$$

Перепишем последнее неравенство в виде

$$\int_r^R \cos\rho\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_0(\rho)\right)\ln|f(ix)|\,x^{-\rho-1}dx \geqslant \int_r^R \ln|f(xe^{i\alpha_0(\rho)})|\,x^{-\rho-1}dx -$$
$$- CR^{-\rho}\ln f(2R) - Cr^{-\rho}\ln f(2r). \tag{17}$$

Применим еще раз лемму 1, положив $H(\theta) = \sin\rho(\theta - \alpha_0(\rho))$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_0(\rho)$. Получаем

$$\int_r^R (\cos(\rho\alpha_0(\rho))\ln|f(x)| - \ln|f(xe^{i\alpha_0(\rho)})|)\,x^{-\rho-1}dx -$$
$$- \frac{2\pi}{\rho}\sum_{\{0,\alpha,r,R\}} \sin\rho(\arg\zeta - \alpha_0(\rho))\,|\zeta|^{-\rho} \leqslant CR^{-\rho}\ln f(2R) + Cr^{-\rho}\ln f(2r). \tag{18}$$

Учитывая, что $\sin\rho(\arg\zeta - \alpha_0(\rho)) \leqslant 0$, получаем из (18)

$$\int_r^R \ln|f(xe^{i\alpha_0(\rho)})|\,x^{-\rho-1}dx \geqslant \cos(\rho\alpha_0(\rho)) \int_r^R \ln|f(x)|\,x^{-\rho-1}dx -$$
$$- CR^{-\rho}\ln f(2R) - Cr^{-\rho}\ln f(2r). \tag{19}$$

Подставляя (19) в (17), используя равенство $\sin^{\rho-1}\dfrac{\pi}{2(\rho-1)} = -\cos(\rho\alpha_0(\rho)) \times$ $\times [\cos\rho(\pi/2 - \alpha_0(\rho))]^{-1}$ и следующее из него неравенство $\cos\rho(\pi/2 -$ $-\alpha_0(\rho)) < 0$, получаем соотношение, отличающееся от (16) тем, что в нем вместо «$=$» стоит «$\geqslant$». Объединяя его с (14), получаем (16).

3. Применим лемму 1, положив $H(\theta) = \sin\rho\theta$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi/2$ будем иметь

$$\int_r^R \left(\ln|f(x)| - \cos\frac{\rho\pi}{2}\ln|f(ix)|\right)x^{-\rho-1}dx - \sum_{\{0,\alpha,r,R\}} \sin(\rho\arg\zeta)\,|\zeta|^{-\rho} \leqslant$$
$$\leqslant CR^{-\rho}\ln f(2R) + Cr^{-\rho}\ln f(2r). \tag{20}$$

Обозначим через L_4 левую часть (20) и оценим ее снизу, пользуясь (16)

$$L_4 \geqslant \left(1 + \cos\frac{\rho\pi}{2}\sin^{\rho-1}\frac{\pi}{2(\rho-1)}\right)\int_r^R \ln|f(x)|\,x^{-\rho-1}dx -$$
$$- \frac{2\pi}{\rho}\sin\rho\alpha \sum_{\{0,\alpha,r,R\}} |\zeta|^{-\rho} - CR^{-\rho}\ln f(2R) - Cr^{-\rho}\ln f(2r).$$

Подставляя в (20), получаем

$$\left(1 + \cos\frac{\rho\pi}{2}\sin^{\rho-1}\frac{\pi}{2(\rho-1)}\right)\int_r^R \ln|f(x)|\,x^{-\rho-1}dx - \frac{2\pi}{\rho}\sin\rho\alpha\sum_{\{0,\alpha,r,R\}}|\zeta|^{-\rho} \leqslant$$
$$\leqslant CR^{-\rho}\ln f(2R) + Cr^{-\rho}\ln(2r). \tag{21}$$

Подставляя в (21) оценку (15), имеем

$$\left(1 + \cos\frac{\rho\pi}{2}\sin^{\rho-1}\frac{\pi}{2(\rho-1)} + \sin\frac{\rho\pi}{2}\sin^{\rho-1}\frac{\pi}{2(\rho-1)}\operatorname{tg}\rho\alpha \times\right.$$
$$\left.\times\int_r^R \ln|f(x)|\,x^{-\rho-1}dx \leqslant CR^{-\rho}\ln f(2R) + Cr^{-\rho}\ln f(2r).\right. \tag{22}$$

Поскольку $\alpha < \alpha_0(\rho)$, имеем

$$1 + \cos\frac{\rho\pi}{2}\sin^{\rho-1}\frac{\pi}{2(\rho-1)} + \sin\frac{\rho\pi}{2}\sin^{\rho-1}\frac{\pi}{2(\rho-1)}\operatorname{tg}\rho\alpha > 0.$$

Рассуждая так же, как в п. I, получаем, что неравенство (22) противоречит тому, что функция f имеет порядок ρ. Таким образом, неравенство $\alpha \leqslant$ $\leqslant \alpha_0(\rho)$ доказано и в случае $\sin\dfrac{\rho\pi}{2} < 0$.

1. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов.— М.: Наука, 1972.— 480 с.
2. *Вишнякова А. М., Островский И. В., Улановский А. М.* Об одной гипотезе Ю. В. Линника // Алгебра и анализ.— 1990.— 2, вып. 4.— С. 1—10.
3. *Вишнякова А. М., Островский И. В.* Аналог теоремы Марцинкевича для целых хребтовых функций, не имеющих нулей в угловой области // Докл. АН УССР.— 1987.— Сер. А, № 9.— С. 8—11.
4. *Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р.* Характеризационные задачи математической статистики.— М. : Наука, 1972.— 510 с.

5. *Вишнякова А. М.* О росте хребтовых функций, не имеющих нулей в угловой области // Аналитические вопросы теории вероятностей и теории операторов.— Киев : Наук. думка, 1990.— С. 1—18.
6. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Индикаторы целых эрмитово позитивных функций конечного порядка // Сиб. мат. журн.— 1982.— 23, № 6.— С. 55—73.
7. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М. : Наука, 1970.— 590 с.

Получено 21.09.90