УДК 512.48

А. А. БОВДИ, д-р физ.-мат. наук (Ужгород. ун-т)

О существовании нормального дополнения группы в мультипликативной группе ее группового кольца

Пусть G — присоединенная группа локально нильпотентной алгебры над кольцом K без делителей нуля характеристики 0. Если порядки элементов группы G не обратимы в K, то нормированная мультипликативная группа группового кольца KG представима в виде полупрямого произведения конгруэнц-подгруппы без кручения и группы G.

Нехай G — приєднана група локально нільпотентної алгебри над кільцем K без дільників нуля характеристики 0. Якщо порядки елементів групи G не оборотні в K, то нормована мультиплікативна група групового кільця KG зображується у вигляді напівпрямого добутку конгруенц-підгрупи без кручення і групи G.

Пусть KG — групповое кольцо группы G над коммутативным кольцом K с единицей и $U(KG)$ — мультипликативная группа кольца KG. Подгруппа

$$V(KG) = \left\{\sum_{g\in G} a_g g \in U(KG) \mid \sum_{g\in G} a_g = 1\right\}$$

называется нормированной мультипликативной группой кольца KG.

В последнее время в теории групповых колец интенсивно исследуется задача, поставленная Деннисом [1] и Сэндлингом, о существовании нормального дополнения группы G в группе $V(KG)$.

Для целочисленных групповых колец ZG конечных метабелевых групп в решении этой задачи достигнуты значительные результаты [2—6]. В большинстве случаев удается доказать, что нормальное дополнение группы G в $V(ZG)$ является группой без кручения. В настоящей работе эта задача рассматривается для бесконечных групп G, при этом существенно используется реализации группы G в качестве присоединенной группы радикального кольца. Вероятно, справедливо предположение, что если K — кольцо без делителей нуля характеристики нуль, G — присоединенная группа радикальной в смысле Джекобсона алгебры над коммутативным кольцом K и порядок ни одного элемента группы G не обратим в кольце K, то группа $V(KG)$ является полупрямым произведением конгруэнц-подгруппы без кручения и группы G. Гипотеза подтверждена результатом Пассмана и Смитта [3] для конечных присоединенных групп, а в п. 2 настоящей работы доказывается для присоединенных групп локально нильпотентных колец. На основании доказанной теоремы получено ряд следствий о существовании нормального дополнения без кручения группы G в $V(Z_pG)$ для целочисленных p-адических групповых колец нильпотентных групп ступени 2.

Приведенные в работе результаты анонсированы ранее автором в [7]. Отметим, что в [8] гипотеза доказана для присоединенных групп обобщенно нильпотентных колец.

1. Некоторые предварительные сведения. Пусть R — радикальное кольцо в смысле Джекобсона. Тогда множество R относительного присоединенного умножения $u\cdot v = u + v - uv$, $u, v \in R$, образует группу, которая называется присоединенной группой кольца R или круговой группой.

Присоединенные группы радикальных колец в теории групповых колец представляют интерес ввиду следующего утверждения.

Лемма 1 [4]. *Пусть K — коммутативное кольцо с единицей и радикальное кольцо R является алгеброй над кольцом K. Если ψ — изоморфизм между группой G и присоединенной группой кольца R, то отображение*

$$\Phi\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = -\sum_{g\in G} a_g \psi(g)$$

на фундаментальном идеале $A(KG)$ кольца KG индуцирует кольцевой гомоморфизм и его ядро M является идеалом кольца KG. Группа $V(KG)$ представима как полупрямое произведение конгруэнц-подгруппы $M^+ = \{u \in V(KG) \mid u - 1 \in M\}$ и группы G.

Лемма 2 [9]. *Пусть отображение $m(u, v)$ прямого произведения $G \times G$ в центр группы G обладает следующими свойствами:*

1) $m(uv, w) = m(u, w)\, m(v, w)$;
2) $m(u, vw) = m(u, v)\, m(u, w)$;
3) $[u, v]\, m(u, v) = m(v, u)$;
4) $m(m(u, v), w) = m(u, m(v, w)) = 1$;

где $u, v, w \in G$ и $[u, v] = u^{-1}v^{-1}uv$ — коммутатор элементов u, v. Если на множестве G определить новые операции $+$, $\times$ с помощью умножения в группе G и отображения $m(u, v)$ по формулам

$$u + v = uv\cdot m(u, v); \qquad u \times v = m(u, v), \qquad u, v \in G,$$

то множество $G(+, \times)$ относительно введенных операций является нильпотентным кольцом индекса нильпотентности 3 и в кольце $G(+, \times)$ присоединенное умножение совпадает с умножением в группе G. Отметим, что единичный элемент 1 группы G является нулевым элементом кольца $G(+, \times)$ и $-u = u^{-1}(m(u, u^{-1}))^{-1}$.

Пусть $G^2(+, \times)$ — квадрат нильпотентного кольца $G(+, \times)$. Тогда $G(\times, +) \supset G^2(+, \times) \supset G^3(+, \times) = 1$ — центральный ряд для присоединенной группы кольца $G(+, \times)$, которая изоморфна группе G. Следовательно, G — нильпотентная группа ступени 2.

Пусть G — нильпотентная группа ступени 2, G' — коммутант и C — центр группы G. Предположим, что L — такая подгруппа группы G, что $G' \subseteq L \subseteq C$ и фактор-группа G/L разлагается в прямое произведение циклических групп

$$G/L = \prod_{i \in S} \langle a_i L \rangle. \tag{1}$$

Каждому элементу g группы G соответствуют такие однозначно определенные числа $\alpha(g, i)$, что

$$gL = \prod_{i \in S} a_i^{\alpha(g,i)} L. \tag{2}$$

Среди чисел $\alpha(g, i)$ только конечное число отличных от нуля и если $a_i L$ — элемент конечного порядка q_i, то выполняется неравенство $0 \leqslant \alpha(g, i) \leqslant \leqslant q_i$.

Пусть $[u, v] = u^{-1}v^{-1}uv$ — коммутатор элементов u, v группы G. Тогда отображение

$$m_L(u, v) = \prod_{i<j} (a_i, a_j)^{-\alpha(u,i)\alpha(v,j)}$$

группы $G \times G$ в центр группы G обладает свойствами 1—4, указанными в лемме 2. Если $L = C$, то отображение $m_C(u, v)$ построено Аультом и Уоттерсом [9]. Доказательство этих свойств отображения $m_L(u, v)$ проводится точно так же, как в случае $L = C$, с помощью коммутаторных тождеств.

Л е м м а 3. *Пусть G — локально нильпотентная группа, K — коммутативное кольцо без делителей нуля характеристики нуль и порядок ни одного элемента группы G не обратим в кольце K. Тогда в носителе* Supp (u) *нетривиального элемента и конечного порядка группы $V(KG)$ нет элементов из централизатора подмножества* Supp (u).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть L — подгруппа группы G, порожденная носителем Supp (u) нетривиального элемента u конечного порядка группы $V(KG)$ и элемент $g_1 \in$ Supp (u) принадлежит централизатору подмножества Supp (u). Так как групповое кольцо нильпотентной группы без кручения над кольцом без делителей нуля содержит только тривиальные обратимые элементы, то группа L обладает элементом конечного порядка. Обозначим через ω совокупность всех простых делителей порядков элементов группы L. Пусть $u = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \ldots + \alpha_s g_s$, $\alpha_i \in K$. В силу теоремы Грюнбера [10] конечнопорожденная нильпотентная группа L аппроксимируется такими конечными нильпотентными группами, что каждый простой делитель порядков этих групп принадлежит множеству ω. Поэтому существует такая нормальная подгруппа N, что элементы $g_1, g_2, \ldots, g_s$ принадлежат различным смежным классам группы L по подгруппе N. Если $\mathfrak{I}(N)$ — идеал кольца KL, порожденный элементами $v - 1$, $v \in N$, то в силу изоморфизма $KL/\mathfrak{I}(N) \cong K(L/N)$ элемент $u + \mathfrak{I}(N) = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \ldots + \alpha_s g_s + \mathfrak{I}(N)$ имеет конечный порядок в кольце $K(L/N)$. Так как порядки элементов конечной группы L/N принадлежат носителю элемента $u + \mathfrak{I}(N)$ конечного порядка, то в силу леммы Цассенхауза—Саксонова [11] это невозможно. Лемма доказана.

С л е д с т в и е 1. *Если группа G и кольцо K удовлетворяют условиям леммы 3, то носитель нетривиального элемента конечного порядка группы $V(KG)$ не содержит элементов из центра группы G.*

Отметим, что в силу теоремы Хирша об аппроксимации полициклических групп конечными группами лемма 3 верна и для целочисленных групповых колец полициклических групп.

2. О с у щ е с т в о в а н и и н о р м а л ь н о г о д о п о л н е н и я г р у п п ы G в $U(KG)$. Т е о р е м а. *Пусть K — коммутативное кольцо* *без делителей нуля характеристики нуль и R — локально нильпотентная алгебра над кольцом K. Если группа G изоморфна присоединенной группе кольца R и порядок ни одного элемента группы G необратим в кольце K, то группа $V(KG)$ представима в виде полупрямого произведения конгруэнц-подгруппы $M^+ = \{u \in V(KG) \mid u - 1 \in M\}$ без кручения и группы G.*

Доказательство. Пусть R — локально нильпотентная алгебра над кольцом K и ψ — изоморфизм между группой G и присоединенной группой кольца R. Тогда K-линейное продолжение отображения $\Phi(g) = -\psi(g)$ — является гомоморфизмом аддитивной группы кольца KG на аддитивную группу кольца R. Согласно лемме 1 Φ — гомоморфизм фундаментального идеала $A(KG)$ группового кольца KG на кольцо R, а ядро M гомоморфизма является идеалом кольца KG и группа $V(KG)$ представима как полупрямое произведение конгруэнц-подгруппы M^+ и группы G.

Предположим сначала, что R — нильпотентное кольцо, и докажем методом индукции по индексу нильпотентности t кольца R, что группа M^+ без кручения. Если $t = 2$, то группа G абелева и в силу леммы 4 группа M^+ без кручения.

Пусть $t > 2$, $W = \psi^{-1}(R^{t-1})$ и σ — гомоморфизм кольца R на R/R^{t-1}. Ввиду равенства $RR^{t-1} = R^{t-1}R = 0$ подгруппа W содержится в центре группы G. Тогда $\sigma\Phi$ — кольцевой гомоморфизм фундаментального идеала $A(KG)$ на кольцо R/R^{t-1}, ядро которого совпадает с идеалом $M + \mathfrak{I}(W)$, где $\mathfrak{I}(W)$ — идеал, порожденный элементами вида $u - 1$, $u \in W$. Так как $KG/\mathfrak{I}(W) \cong K(G/W)$, то отображение $\sigma\Phi$ индуцирует гомоморфизм

$$\sigma : A(KG)/\mathfrak{I}(W) \to R/R^{t-1},$$

ядро которого совпадает с $\mathfrak{P} = (M + \mathfrak{I}(W))/\mathfrak{I}(W)$. Очевидно, что $\sigma\Phi$ индуцирует изоморфизм между группами G/W и R/R^{t-1}. Согласно лемме 1 $V(KG/W) = \mathfrak{P}^+ \rtimes G/W$ и в силу индуктивного предположения группа $\mathfrak{P}^+$ без кручения. Обозначим через $\mathfrak{I}^+(W) = V(KG) \cap (1 + \mathfrak{I}(W))$. Тогда $M^+/\mathfrak{I}^+(W)$ — подгруппа группы $\mathfrak{P}^+$ и поэтому если h — элемент конечного порядка группы M^+, то $h - 1 \in \mathfrak{I}(W)$. Элемент из этого идеала однозначно можно представить в виде

$$h - 1 = \sum_{g \in W} \alpha_g (g - 1) + \sum_{i=1}^{q} g_i x_i,$$

где $g_1, g_2, \ldots, g_s$ — попарно различные представители смежных классов группы G по подгруппе W, $x_i \in KW$ и $g_i \in W$. Тогда след элемента h конечного порядка на подкольцо KW центра кольца KG равен $1 + \sum_{g \in W} \alpha_g (g - 1)$. Так как этот элемент не равен нулю, то получим противоречие с леммой 3. Следовательно, группа M^+ без кручения.

Пусть R — локально нильпотентная алгебра над кольцом K. Согласно лемме 1 $V(KG) = M^+ \rtimes G$ и пусть h — элемент конечного порядка группы M^+. Тогда конечное подмножество $\psi(\mathrm{Supp}(h))$ порождает нильпотентное подкольцо R_1 кольца R. Подгруппа $\psi^{-1}(R_1) = H$ группы G нильпотентна. Если $M_1 = M \cap KH$, то $V(KH) = M_1^+ \rtimes H$ и $h \in M_1^+$. В силу доказанного выше утверждения группа M_1^+ без кручения и получаем противоречие. Теорема доказана.

Следствие 2. *Если $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел и G — абелева p-группа, то группа $V(\mathbb{Z}_p G)$ является прямым произведением группы G и конгруэнц-подгруппы без кручения.*

Доказательство. Пусть H — аддитивная абелева группа и H изоморфна группе G. Если на множестве H определим нулевое умножение, то H — нильпотентное кольцо и группа G изоморфна присоединенной группе кольца H. Очевидно, что H можно превратить в $\mathbb{Z}_p$-модуль. Тогда H является алгеброй над $\mathbb{Z}_p$ и ввиду доказанной теоремы утверждение доказано.

Следствие 3. *Пусть G — нильпотентная p-группа ступени 2, C — центр группы G и либо $p \neq 2$, либо G/C — прямое произведение циклических групп. Если $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел, то группа*

$V(\mathbb{Z}_pG)$ представима как полупрямое произведение конгруэнц-подгруппы без кручения и группы G.

Доказательство. Очевидно, что при $p \neq 2$ центр групп G 2-делим. Если $[a, b]$ — коммутатор элементов a и b, то в подгруппе C существует единственный такой элемент z, что $z^{-2} = [a, b]$ и его в дальнейшем будем обозначать через $[a, b]^{-1/2}$. Тогда $m(u, v) = [u, v]^{-1/2}$ является отображением прямого произведения $G \times G$ в центр группы G и на основании коммутаторных тождеств легко проверяется, что $m(u, v)$ удовлетворяет всем соотношениям, указанным в лемме 2. Поэтому с помощью отображения $m(u, v)$ можно построить нильпотентное кольцо $G(+, \times)$ и аддитивный порядок элемента g кольца $G(+, \times)$ совпадает с порядком элемента g в группе G.

Пусть G/C — прямое произведение циклических групп. Тогда кольцо $G(+, \times)$, построенное с помощью отображения $m(u, v)$, является нильпотентным и его аддитивная группа в силу леммы 3 есть p-группа.

Если $s = s_0 + s_1p + s_2p^2 + \ldots$ — целое p-адическое число и аддитивный порядок элемента g кольца $G(+, \times)$ равен p^{n+1}, то, определив произведение $s \cdot g$ формулой $s \cdot g = (s_0 + s_1p + s_2p^2 + \ldots + s_np^n)\, g$, превратим кольцо $G(+, \times)$ в обоих случаях в алгебру над кольцом $\mathbb{Z}_p$. Поэтому следствие вытекает из доказанной теоремы.

Следствие 4. *Пусть C — центр и G' — коммутант группы G. Если G — нильпотентная группа ступени 2 и выполняется одно из условий:*

1) *C — 2-делим с однозначным извлечением корня второй степени в C;*
2) *G/C — прямое произведение циклических групп;*
3) *G/G' — делимая или периодическая группа;*
4) *G/G' — группа без кручения и вполне разложимая группа, то нормированная мультипликативная группа $V(\mathbb{Z}G)$ целочисленного группового кольца $\mathbb{Z}G$ является полупрямым произведением конгруэнц-подгрупп M без кручения и группы G.*

Отметим, что если группа G удовлетворяет условию 1 или 2, то $G(+, \times)$ — нильпотентное кольцо, а в остальных случаях известно, что группа G является присоединенной группой нильпотентного кольца.

Изложенным выше методом автором были получены ряд результатов о существовании нормального дополнения и в модулярном случае [2, 7].

Пусть G — нильпотентная группа ступени 2 и показателя 4. Представим элемент $g \in G$ в виде (2), где L — коммутант группы G. Построим отображение

$$m(u, v) = m_L(u, v) \cdot \prod_{i \in S} a_i^{2\alpha(u,i)\alpha(v,i)}.$$

Тогда кольцо $G(+, \times)$ имеет присоединенную группу G и по лемме 1 $V(Z_2G) = G \rightthreetimes M^+$, где Z_2 — поле из 2-х элементов [7]. Этот результат позже доказан также Сэндлингом [12] для конечной группы G.

1. *Dennis R. K.* The structure of the unit group of group rings //Ring theory II. Proc. 2^{nd} Okla Conf. 1975.— New York; Basel, 1977.— P. 103—130.
2. *Бовди А. А.* О строении групповых базисов группового кольца // Мат. заметки.— 1982.— 32, № 4.— С. 459—568.
3. *Passman D. S., Smith P. F.* Units in integral group rings // J. Algebra.— 1981. — 69.— P. 213—239.
4. *Cliff G. F., Sehgal S. K., Weiss A. R.* Units of integral group rings of metabelian groups // Ibid.— 73.— P. 167—185.
5. *Roggenkamp K. W.* Units in integral metabelian group rings. 1, Jacksons unit theorem revisited // Quart. J. Math. Oxford.— 1981.— 32.— P. 209—234.
6. *Roggenkamp K. W., Scott L. L.* Units in metabelian group rings: non-spliting exemples for normalized units // J. Pure and Appl. Algebra.— 1983.— 27.— P. 299—314.
7. *Бовди А. А.* Унитарная подгруппа и конгруэнц-подгруппа мультипликативной группы целочисленного группового кольца // Докл. АН СССР.— 1985.— 284, № 5.
8. *Furukawa T.* The group of normalized units of group rings // Osaka J. Math.— 1986.— 23, N 1.— P. 217—221.
9. *Ault J. C., Watters J. F.* Circle groups of nilpotent rings // Amer. Math. Mont.— 1973.— 80, N 1.— P. 48—52.
10. *Grunberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc.— 1957.— 7.— P. 29—62.

11. *Саксонов А. И.* О групповых кольцах конечных групп // Publ. Math.— 1971.— 18.— P. 187—209.
12. *Sandling R.* The modular group algebra of a central elementary-by-abelian *p*-group // Arch. Math.— 1989.— 52.— P. 22—27.
13. *Hales A. W., Passi I. B. S.* The second augmentation quotient of a integral group ring // Ibid.— 1978.— 31.— P. 259—265.

Получено 10.01.91