УДК 512.54

И. Я. СУББОТИН, канд. физ.-мат. наук (Киев. политехн. ин-т)

О слабо центральных расширениях групп

Исследуются некоторые свойства слабо центральных расширений с гиперцентральными фактор-группами по ядру. Доказано существование в периодических таких группах гиперцентрального корадикала и установлена дополняемость некоторых его подгрупп в группе.

Досліджуються деякі властивості слабо центральних розширень з гіперцентральними фактор-групами по ядру. Доведена наявність у періодичних таких групах гіперцентрального корадикалу та встановлена доповнюваність деяких його підгруп у групі.

Пусть G — группа и A — некоторая ее подгруппа, порожденная инвариантными в G циклическими подгруппами. Будем говорить в этом случае, что группа G является слабо центральным расширением с ядром A. Расширения такого рода играют центральную роль в теории сверхразрешимых групп [1]. Кроме этого, слабо центральные расширения с гиперцентральной фактор-группой по ядру часто встречаются при исследовании групп с условием транзитивности для нормальных делителей [2, 3]; групп, разложимых в равномерное произведение [4]; групп, у которых инвариантны все подгруппы коммутанта [5—8]; вполне факторизуемых групп [9]; квазицентральных расширений групп [10, 11] и т. п.

В [1] группа, порожденная своими инвариантными циклическими подгруппами, названа полуабелевой, а подгруппа произвольной группы G, порожденная всеми ее инвариантными циклическими подгруппами,— слабым центром группы G. Последнее и обусловило термин «слабо центральное расширение». Это же название встречается и в работе [11], но в настоящей статье оно употребляется в более общем и, как нам кажется, в более точном смысле.

В предлагаемой статье изучены некоторые важные свойства слабо центральных расширений с гиперцентральной фактор-группой по ядру, доказано существование у них гиперцентрального корадикала и установлена дополняемость в группе некоторых его подгрупп. Полученные результаты обобщают результаты работ [10, 11], а также некоторые критерии дополняемости из [3].

Ниже часто используется тот простой факт, что ядро A слабо центрального расширения является произведением инвариантных в группе примарных и бесконечных циклических подгрупп.

Ввиду абелевости группы автоморфизмов циклической группы справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть группа G является слабо центральным расширением с ядром A. Тогда коммутант G' группы G и ядро A поэлементно перестановочны, т. е. $[G', A] = 1$. В частности, $A \cap G'$ — абелева группа.*

Везде ниже будем обозначать через $L(A)$ подгруппу слабо центрального расширения G с ядром A, порожденную всеми теми инвариантными в G циклическими подгруппами из множества порождающих ядро A, которые пересекаются с центром группы G тривиально.

Лемма 2. *Пусть G — слабо центральное расширение с ядром A и $L(A)$ — периодическая группа. Тогда $L(A)$ — абелева группа без инволюций, являющаяся подгруппой коммутанта G'.*

Доказательство. Так как $L(A)$ — периодическая группа, то любую подгруппу $\langle a \rangle$ из множества инвариантных в G циклических подгрупп, порождающих $L(A)$, можно не нарушая общности считать примарной. Поскольку $\langle a \rangle \cap Z(G) = 1$, то найдется $x \in G$, не перестановочный с y, где $\langle y \rangle$ — нижний слой $\langle a \rangle$. Легко видеть, что тогда $\langle [x, a] \rangle = \langle a \rangle$. Значит, $L(A) \leqslant G'$. Ввиду леммы 1 $L(A)$ — абелева группа. Отсутствие в $L(A)$ инволюций очевидно.

Лемма 3. *Пусть G — слабо центральное расширение с гиперцентральной фактор-группой по ядру A. Тогда любая фактор-группа G/N группы G является слабо центральным расширением с ядром, изоморфным $A/N \cap A$, и гиперцентральной фактор-группой по этому ядру.*

Доказательство леммы непосредственно следует из изоморфизмов $AN/N \cong A/N \cap A$ и $G/N/AN/N \cong G/AN \cong G/A/AN/A$.

Лемма 4. *При условиях и обозначениях леммы 2 пересечение $L(A) \cap Z(G)$ тривиально.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $1 \neq a \in Z(G) \cap L(A)$, $a^p = 1$ для некоторого простого p и $a = x^{\alpha} y^{\beta} \dots z^{\gamma}$, где $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle, \dots, \langle z \rangle$ — инвариантные циклические подгруппы, тривиально пересекающиеся с $Z(G)$. Ввиду леммы 2 $L(A)$ — абелева группа. Поэтому не нарушая общности можно считать, что все $\langle x\rangle, \langle y\rangle, \ldots, \langle z\rangle$ — p-примарные подгруппы. Так как $\langle x\rangle \cap Z(G) = 1$, то $\langle x\rangle \cap \langle a\rangle = 1$. Рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G/\langle x\rangle$. В силу леммы 3 она является слабо центральным расширением с ядром $\overline{A} = A/\langle x\rangle$. Так как $\langle a\rangle \cap \langle x\rangle = 1$ и $\langle a\rangle \leqslant Z(G)$, то $\langle a\rangle \times \langle x\rangle/\langle x\rangle$ — подгруппа порядка p из центра $Z(\overline{G})$. Очевидно, $\overline{a} = \overline{y}^{\beta} \ldots \overline{z}^{\gamma}$, где $\overline{y}^{\beta} = \langle x\rangle y^{\beta}, \ldots, \overline{z}^{\gamma} = \langle x\rangle z^{\gamma}$, $\langle \overline{y}\rangle \cap Z(\overline{G}) = \ldots = \langle \overline{z}\rangle \cap Z(\overline{G}) = 1$. В самом деле, для каждого $x, y, \ldots, z$ существует p'-элемент $c_x, c_y, \ldots, c_z$ соответственно такой, что $\langle [x, c_x]\rangle = \langle x\rangle$, $\langle [y, c_y]\rangle = \langle y\rangle, \ldots, \langle [z, c_z]\rangle = \langle z\rangle$, и соответствующие соотношения справедливы и для образов в фактор-группах. Переходя к фактор-группе $\overline{G}/\langle \overline{y}\rangle$ и т. д., мы в конечное число шагов придем к ситуации, когда в слабо центральном расширении $\widetilde{G}$ существует элемент $\widetilde{a} = \widetilde{z}^{\gamma}$ такой, что $\langle \widetilde{z}\rangle \cap Z(\widetilde{G}) = 1$ и $\widetilde{Q} \in Z\langle \widetilde{G}) \cap \langle \widetilde{z}\rangle$. Полученное противоречие доказывает лемму.

В соответствии с [12] гиперцентральным корадикалом группы G будем называть такой нормальный делитель N, определяющий гиперцентральную фактор-группу, который содержится в каждом нормальном делителе группы G, определяющем гиперцентральную фактор-группу.

Теорема 1. *В периодической группе G, являющейся слабо центральным расширением с ядром A и гиперцентральной фактор-группой по этому ядру, подгруппа $L(A)$ совпадает с гиперцентральным корадикалом группы G.*

Доказательство. Фактор-группа $\overline{G} = G/L(A)$ в силу леммы 3 является слабо центральным расширением с ядром $\overline{A} = A/L(A)$ и гиперцентральной фактор-группой по этому ядру. Ядро $\overline{A}$, очевидно, порождается инвариантными в $\overline{G}$ циклическими подгруппами, нетривиально пересекающимися с центром $Z(\overline{G})$. Рассмотрев фактор-группу группы $\overline{G}$ по подгруппе, порожденной этими пересечениями, мы перейдем к новому слабо центральному расширению $\widetilde{G}$, в котором ядро порождается инвариантными в $\widetilde{G}$ и нетривиально пересекающимися с центром циклическими подгруппами, и т. д. Из этого легко следует существование в $\overline{G}$ возрастающего центрального ряда, проходящего через $\overline{A}$. Таким образом, $\overline{G}$ — гиперцентральная группа.

Пусть N — некоторый нормальный делитель в G, определяющий гиперцентральную фактор-группу G/N. В силу теоремы Ремака (см., например, [13]) $G/N \cap L(A)$ вкладывается в прямое произведение гиперцентральных групп G/N и $G/L(A)$, а потому является гиперцентральной группой. Если $D = N \cap L(A)$ строго содержится в $L(A)$, то G/D — слабо центральное расширение с ядром A/D, порожденным элементами Dx_i, где $\langle x_i\rangle$ — порождающие A (лемма 3), причем существует $x \in L(A) \setminus D$. Легко видеть, что в G найдется элемент $c_x \notin D$ такой, что $\langle [c_x, x]\rangle = \langle x\rangle$. Но тогда $D\langle x\rangle/D$ — инвариантная в G/D циклическая подгруппа, тривиально пересекающаяся с $Z(G/D)$. Последнее не может иметь места в гиперцентральной группе, так как противоречит предложению 1.6 из [14]. Полученное противоречие доказывает, что $D \geqslant L(A)$, и теорема доказана.

Лемма. 5. *Пусть G — периодическая группа, являющаяся слабо центральным расширением с гиперцентральной фактор-группой по ядру A и с примарным коммутантом G'. Тогда для любого $g \in G$ множество всех инвариантных циклических подгрупп из порождающих $L(A)$, тривиально пересекающихся с централизатором $C_G(g)$, порождает дополняемую в G подгруппу.*

Доказательство. Пусть $\langle x\rangle, \langle y\rangle, \ldots, \langle z\rangle$ — такие подгруппы из порождающих $L(A)$, что $\langle x\rangle \cap C_G(g) = \ldots = \langle z\rangle \cap C_G(g) = 1$. Не нарушая общности можно считать элемент gp-элементом. Тогда если $\langle k\rangle$ — инвариантная в G p-подгруппа и $\langle k\rangle \cap C_G(g) = 1$, то $[k, g] = 1$. С другой стороны, $\langle [g, x]\rangle = \langle x\rangle, \ldots, \langle [g, z]\rangle = \langle z\rangle$. Это означает, что в группе $F = \langle x, y, \ldots, z\rangle \rtimes \langle g\rangle$ подгруппа $D = \langle x, y, \ldots z\rangle$ совпадает с коммутантом F' и $[L(A), \langle g\rangle] = [D, \langle g\rangle] = D$. Поскольку G' — примарная группа, то в фактор-группе $G/L(A)$ все силовские подгруппы, кроме, быть может, p-подгруппы, абелевы, а сама $G/L(A)$ — локально конечная гиперцентральная группа. Поэтому $L(A) \leftthreetimes \langle g\rangle \trianglelefteq G$. В фактор-группе G/D подгруппа $L(A) \leftthreetimes \langle g\rangle/D = L(A)/D \times D\langle g\rangle/D$ инвариантна и $D\langle g\rangle/D$ — ее характеристическая холлова p'-подгруппа. Значит, $D\langle g\rangle/D \trianglelefteq G/D$ и $D\langle g\rangle \trianglelefteq G$. Ввиду леммы 7 из [15] $G = DN_G(\langle g\rangle)$. Рассмотрим группу $R = D \leftthreetimes \langle g\rangle$. Из леммы 4 следует $C_R(g) = \langle g\rangle$. Отсюда $D \cap N_G(\langle g\rangle) = 1$, $G = D \leftthreetimes N_G(\langle g\rangle)$, что и доказывает лемму.

Лемма 6. *Коммутант G' периодической группы G, являющейся слабо центральным расширением с гиперцентральной фактор-группой по ядру A, является прямым произведением своих силовских примарных подгрупп.*

Доказательство. Поскольку $C_G(A) \geqslant G'$, то последний является центральным расширением с гиперцентральной фактор-группой, т. е. сам гиперцентрален. В силу периодичности группы G лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть G — периодическая группа, являющаяся слабо центральным расширением с гиперцентральной фактор-группой по ядру A. Тогда для любого элемента $g \in G$ подгруппа, порожденная всеми теми инвариантными циклическими p-примарными подгруппами из множества порождающих гиперцентральный корадикал $L(A)$, которые тривиально пересекаются с централизатором $C_G(g)$, дополняема в G.*

Доказательство. В силу леммы 6 $G' = G_p \times G'_p$, где G_p — p-силовская подгруппа из G'. В соответствии с леммой 3 фактор-группа $\overline{G} = G/G_{p'}$ является слабо центральным расширением с гиперцентральной фактор-группой по ядру. Коммутант $\overline{G}' = G_p \times G_{p'}/G_{p'}$ этой группы p-примарен. Отсюда, очевидно, следует $L(\overline{A}) = L_p(A) \times G_{p'}/G_{p'}$ где $L_p(A)$ — силовская p-подгруппа из $L(A)$.

Ввиду леммы 6 отсюда следует дополняемость в $\overline{G}$ подгруппы $D_p \times \times G_{p'}/G_{p'}$ из $L(\overline{A})$, порожденной всеми теми инвариантными циклическими подгруппами, которые пересекаются с централизатором элемента $G_{p'}g$ тривиально. Значит, $G = (D_p \times G_{p'})B$, причем $(D_p \times C_{p'}) \cap B = C_{p'}$ и потому $G = D_p \leftthreetimes B$. Теорема доказана.

Пример, построенный в работе [16], показывает, что существуют группы, являющиеся слабо центральным расширением силовской 3-подгруппы — гиперцентрального корадикала и даже коммутанта — и эта 3-подгруппа не дополняема в группе.

1. *Venzke P.* A contribution to the theory of finite supersoluable // J. Algebra.— 1979.— **57**, N 2.— P. 567—579.
2. *Gashütz W.* Gruppen in denen das normalteilersein transitiv ist // J. Reine Angew. Math.— 1957.— **198**.— P. 87—92.
3. *Robinson D. J. S.* Groups in which normality is a transitive relation // Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1964.— **60**, N 21.— P. 21—38.
4. *Шунков В. П.* О группах, разложимых в равномерное произведение своих q-подгрупп // Докл. АН СССР.— 1964.— **154**.— С. 542—544.
5. *Субботин И. Я.* Конечные группы, в которых каждая подгруппа коммутанта инвариантна // Мат. заметки.— 1972.— **12**, № 6.— С. 739—745.
6. *Субботин И. Я.* Бесконечные KI-группы с черниковской периодической частью коммутанта // Исслед. групп с заданными свойствами системы подгрупп.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981.— С. 79—98.
7. *Субботин И. Я.* О бесконечных группах, в которых каждая подгруппа коммутанта инвариантна // Конструктивное описание групп с заданными свойствами подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1980.— С. 92—107.
8. *Субботин И. Я.* О гиперцентральном корадикале KI-группы // Укр. мат. журн.— 1982.— **34**, № 5.— С. 650—654.
9. *Черникова Н. В.* Вполне факторизуемые группы // Докл. АН СССР. — 1953.— **92**.— С. 877—880.
10. *Субботин И. Я.* О квазицентральных расширениях групп // Группы и системы их подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983.— С. 86—92.
11. *Субботин И. Я.* Квазицентрализаторные произведения групп // Строение групп и подгрупповая характеризация.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984.— С. 126—139.
12. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем.— М. : Наука, 1966.— 604 с.

13. *Курош А. Г.* Теория групп.— М. : Наука, 1967.— 648 с.
14. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 383 с.
15. *Зайцев Д. И.* Гиперциклические расширения абелевых групп // Группы, определяемые свойствами системы подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1979.— С. 16—37.
16. *Горчаков Ю. М.* О примарно факторизуемых группах // Укр. мат. журн.— 1962.— **14**, № 1.— С. 3—9.

Получено 25.12.90