УДК 534+517.9

Ю. А. МИТРОПОЛЬСКИЙ, акад. (Ин-т математики АН УССР, Киев),
НГУЕН ТИЕН КХИЕМ, канд. физ.-мат. наук (Вьетнам)

Об одном классе нелинейных колебательных систем, допускающих точное решение уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова

Показано, что уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова в переменных амплитудах и фазах может быть приведено к уравнению в частных производных первого порядка, которое для широкого класса существенно нелинейных колебательных систем поддается точному интегрированию.

Показано, що рівняння Фоккера — Планка — Колмогорова в змінних амплітудах і фазах може бути зведене до рівняння в частинних похідних першого порядку, яке для широкого класу суттєво нелінійних коливальних систем піддається точному інтегруванню.

Многие задачи статистической физики, теории управления, теории случайных колебаний и т. п. тесно связаны с решением уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова (УФПК) для вероятностей перехода. Последнее представляет собой сложное уравнение в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами, которое не всегда решается в общем виде. Классы, допускающие точное решение УФПК, достаточно ограничены, они приведены в [1]. В последнее время с помощью метода усреднения нелинейной механики получен ряд интересных приближений решений УФПК [2—4]. Однако этот метод применим лишь для квазилинейных систем с малыми случайными воздействиями и полученное усреднением коэффициентов укороченное УФПК опять же разрешимо не всегда. Так, для решения УФПК, как в точном, так и в укороченном виде, требуется поиск новых подходов, позволяющих получить новые результаты. В настоящей работе с помощью известной замены переменных нелинейной механики [5] приводим исходное стационарное УФПК к уравнению первого порядка, которое будем называть приведенным УФПК. Оказывается, что такое укороченное, но эквивалентное исходному УФПК, уравнение поддается точному интегрированию для большого класса существенно нелинейных систем. Полученный здесь результат включает в себя некоторые известные результаты [1] как частные случаи.

1. Приведенное УФПК. Рассматривается колебательная система, описываемая уравнением

$$\ddot{x} + \nu^2 x = f(\nu t, x, \dot{x}) + g(\nu t, x, \dot{x})\,\xi(t), \tag{1}$$

где ξ — процесс типа белого шума, ν — положительная постоянная, f, g — гладкие функции аргументов νt, x, $\dot{x}$.

После замены переменных

$$x = a\cos\Phi, \quad \dot{x} = y = -\nu a\sin\Phi, \quad \Phi = \nu t + \theta; \tag{2}$$

уравнение (1) преобразуется в систему стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$\begin{gathered} da = \left\{-\frac{f}{\nu}\sin\Phi + \frac{g^2}{2\nu^2 a}\cos^2\Phi\right\}dt - \frac{g}{\nu}\sin\Phi dB(t), \\ d\theta = \left\{-\frac{f}{\nu}\cos\Phi - \frac{g^2}{a^2\nu^2}\cos\Phi\sin\Phi\right\}dt - \frac{g}{\nu}\cos\Phi dB(t); \end{gathered} \tag{3}$$

где $B(t)$ — винеровский процесс. Система (3) соответствует УФПК для плотности вероятностей $P(a, \theta, t)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}(K_1 P) + \frac{\partial}{\partial\theta}(K_2 P) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}(D_1 P) + \frac{\partial^2}{\partial a\partial\theta}(D_{12}P) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(D_2 P). \tag{4}$$

Коэффициенты в (4) имеют вид

$$K_1 = -\frac{1}{\nu}f_0\sin\Phi + \frac{1}{2a\nu^2}g_0^2\cos^2\Phi, \quad K_2 = -\frac{1}{\nu}f_0\cos\Phi - \frac{1}{\nu^2 a^2}g_0^2\cos\Phi\sin\Phi,$$

$$D_1 = \frac{1}{\nu^2}g_0^2\sin^2\Phi, \quad D_{12} = \frac{1}{\nu^2 a}g_0^2\cos\Phi\sin\Phi, \quad D_2 = \frac{1}{\nu^2 a^2}\cos^2\Phi, \tag{5}$$

$$f_0 = f(\nu t, a\cos\Phi, -\nu a\sin\Phi), \quad g_0 = g(\nu t, a\cos\Phi, -\nu a\sin\Phi).$$

Рассмотрим стационарное УФПК (4), т. е. когда $P = P_0(a, \theta)$. Тогда оно может быть представлено в виде

$$\frac{\partial}{\partial a}J_1 + \frac{\partial}{\partial\theta}J_2 = 0, \tag{6}$$

где

$$J_1 = Q_1 P_0 + \frac{1}{2}D_1\frac{\partial P_0}{\partial a} + \frac{1}{2}D_{12}\frac{\partial P_0}{\partial\theta}, \quad J_2 = Q_2 P_0 + \frac{1}{2}D_{12}\frac{\partial P_0}{\partial a} + \frac{1}{2}D_2\frac{\partial P_1}{\partial\partial}, \tag{7}$$

$$Q_1 = -K_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial D_1}{\partial a} + \frac{1}{2}\frac{\partial D_{12}}{\partial\theta}, \quad Q_2 = -K_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial D_{12}}{\partial a} + \frac{1}{2}\frac{\partial D_2}{\partial\theta}.$$

Уравнение (6) будет выполняться, если $J_1 = J_2 = 0$, т. е. если справедливо равенство

$$D_1 \frac{\partial P_0}{\partial a} + D_{12} \frac{\partial P_0}{\partial \theta} = -2Q_1 P_0, \quad D_{12} \frac{\partial P_0}{\partial a} + D_2 \frac{\partial P_0}{\partial \theta} = -2Q_2 P_0. \qquad (8)$$

Для коэффициентов D_1, D_{12}, D_2 в (5) непосредственно получим $D = D_1 D_2 - D_{12}^2 = 0$ и после подстановки (5) в (7) нетрудно проверить, что выполняется равенство $\sqrt{D_1} Q_2 - \sqrt{D_2} Q_1 = 0$.

В силу последних равенств, система алгебраических уравнений (8) относительно $\partial P_0/\partial a$, $\partial P_0/\partial \theta$ вырождается в одно уравнение, которое после подстановки в него (5) принимает вид

$$a g_0^2 \left(\frac{\partial P_0}{\partial a} - \frac{P_0}{a} \right) \sin \Phi + g_0^2 \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \cos \Phi + 2 \nu a F_0 P_0 = 0, \qquad (9)$$

где

$$F_0 = F(\nu t, a \cos \Phi, -\nu a \sin \Phi) = f_0 + \frac{1}{\nu} g_0 \frac{\partial g_0}{\partial a} \sin \Phi + \frac{1}{a\nu} g_0 \frac{\partial g_0}{\partial \theta} \cos \Phi.$$

Уравнение (9) эквивалентно (6) и представляет уравнение в частных производных первого порядка. Назовем его приведенным стационарным УФПК. Задача теперь состоит в нахождении не зависящего от νt решения $P_0(a, \theta)$ уравнения (9). Такое решение ввиду зависимости коэффициентов от νt существует не всегда. Существование такого решения уравнения (9) тесно связано с существованием стационарного решения УФПК. Этот вопрос рассматривать не будем, предполагая, что УФПК имеет стационарное решение, и перейдем к нахождению этого решения.

2. Точное решение уравнения (9). Уравнение (9) подстановкой

$$P_0(a, \theta) = C a \exp\{-W_0(a, \theta)\}, \qquad (10)$$

где $C = \text{const}$, $W_0(0, 0) = 0$, приводится к виду

$$a g_0^2 \frac{\partial W_0}{\partial a} \sin \Phi + g_0^2 \frac{\partial W_0}{\partial \theta} \cos \Phi = 2 \nu a F_0. \qquad (11)$$

Теперь в уравнении (11) сделаем такую замену переменных: $(a, \theta) \to (x, y)$ по формулам (2). Условимся, что при переменных νt, x, y функции g_0, f_0, F_0, W_0 переходят в функции g, f, F, W (т. е. без нулевого индекса):

$$g = g(\nu t, x, y), \quad f = f(\nu t, x, y), \quad F = F(\nu t, x, y), \quad W = W(\nu t, x, y).$$

Согласно (2) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \Phi \frac{\partial}{\partial a} - \frac{1}{a} \sin \Phi \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{a\nu} \left(a \sin \Phi \frac{\partial}{\partial a} + \cos \Phi \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

Тогда обе части уравнения (11) можно записать в виде

$$a g_0^2 \frac{\partial W_0}{\partial a} \sin \Phi + g_0^2 \frac{\partial W_0}{\partial \theta} \cos \Phi = -\nu a g^2 \frac{\partial W}{\partial y},$$

$$F_0 = f_0 + \frac{1}{\nu} g_0 \frac{\partial g_0}{\partial a} \sin \Phi + \frac{1}{\nu a} g_0 \frac{\partial g_0}{\partial \theta} \cos \Phi = f - g \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Учитывая последние соотношения, уравнения (11) можем переписать так:

$$g^2 \frac{\partial W}{\partial y} = -2f + 2g \frac{\partial g}{\partial y}. \qquad (12)$$

Обозначим $h(\nu t, x, y) = \partial W(\nu t, x, y)/\partial y$.

Тогда

$$f(\nu t, x, y) = -\frac{1}{2} g^2(\nu t, x, y) h(\nu t, x, y) + g(\nu t, x, y) \frac{\partial g(\nu t, x, y)}{\partial y}. \quad (13)$$

Теперь рассмотрим следующую задачу: найти возможное выражение функции $W(\nu t, x, y)$ такое, что после подстановки в него $x = a\cos\Phi$, $y = -\nu a \sin\Phi$ получается функция только переменных a, θ т. е. $W(\nu t, a\cos\Phi, -\nu a\sin\Phi) = W_0(a, \theta)$.

В этом случае справедливо соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} W[\nu t, a\cos(\nu t + \theta), -\nu a \sin(\nu t + \theta)] = 0,$$

которое в переменных $\tau = \nu t, x, y$ принимает вид

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{1}{\nu} y \frac{\partial W}{\partial x} - \nu x \frac{\partial W}{\partial y} = 0. \quad (14)$$

Согласно [6], соответствующие (14) характеристические уравнения имеют вид

$$\tau' = 1, \quad x' = \frac{1}{\nu} y, \quad y' = -\nu x. \quad (15)$$

Эта система, как нетрудно проверить, имеет два интеграла:

$$Z_1 = x^2 + \frac{1}{\nu^2} y^2 = \mathrm{const}, \quad Z_2 = \frac{1}{\nu} y\cos\tau + x\sin\tau = \mathrm{const}.$$

Следовательно, уравнение (14) допускает общий интеграл:

$$W(\nu t, x, y) = H\left(x^2 + \frac{1}{\nu^2} y^2, \frac{1}{\nu} y\cos\nu t + x\sin\nu t\right), \quad (16)$$

где $H = H(Z_1, Z_2)$ — произвольная функция аргументов Z_1, Z_2.

Из (16) находим

$$h(\nu t, x, y) = h_1(\nu t, x, y)\, y + h_2(\nu t, x, y)\cos\nu t. \quad (17)$$

Здесь

$$h_1(\nu t, x, y) = \frac{2}{\nu^2} H_1\left(x^2 + \frac{1}{\nu^2} y^2, \frac{1}{\nu} y\cos\nu t + x\sin\nu t\right),$$

$$h_2(\nu t, x, y) = \frac{1}{\nu} H_2\left(x^2 + \frac{1}{\nu^2} y^2, \frac{1}{\nu} y\cos\nu t + x\sin\nu t\right), \quad (18)$$

$$H_1(Z_1, Z_2) = \frac{\partial H(Z_1, Z_2)}{\partial Z_1}, \quad H_2(Z_1, Z_2) = \frac{\partial H(Z_1, Z_2)}{\partial Z_2}.$$

Таким образом, непосредственно

$$W_0(a, \theta) = W(\nu t, a\cos\Phi, -\nu a\sin\Phi) = H(a^2, -a\sin\theta).$$

Теорема. *Если для системы* (3) $f(\nu t, x, \dot{x})$ *имеет вид* (13) *и справедливо* (17) *и* (18), *то точное решение уравнения* (9) *имеет вид*

$$P_0(a, \theta) = Ca\exp\{-H(a^2, -a\sin\theta)\}. \quad (19)$$

В переменных x, $y = \dot{x}$ для уравнения (1) решение УФПК находится в виде

$$P(\nu t, x, y) = C\exp\left\{-H\left(x^2 + \frac{1}{\nu^2} y^2, \frac{1}{\nu} y\cos\nu t + x\sin\nu t\right)\right\}. \quad (20)$$

Интересно отметить, что стационарное решение УФПК в переменных a, θ соответствует нестационарному решению УФПК для x, $\dot{x}$. В этом и заключается одно из свойств замены переменных (2).

В частности, из (20) можно получить решение, найденное в [1]. Действительно, если

$$g^2(\nu t, x, y) = b(x, y), \quad E = x^2 + \frac{1}{\nu^2}y^2, \quad H = H(E),$$

т. е. если

$$f = f(x, y) = -\frac{1}{2}b(x, y)H_1(E) + \frac{1}{2}\frac{\partial b(x, y)}{\partial y},$$

то решение УФПК имеет вид $P(x, y) = C\exp\left\{-\int\limits_0^{E(x,y)} H_1(Z)\,dZ\right\}$.

Наконец, отметим, что системы (1), для которых функция $f(\nu t, x, \dot{x})$ имеет вид (13), представляют достаточно большой класс.

3. Пример. Рассмотрим следующую систему:

$$\ddot{x} + k(E)\dot{x} + \nu^2 x = \beta\cos\nu t + (3\dot{x}^2 + \nu^2 x^2)\cos\nu t + 2\nu x\dot{x}\sin\nu t + \sigma_0\xi(t). \quad (21)$$

В этом случае

$$g = \sigma_0 = \mathrm{const}, \quad E = x^2 + \frac{1}{\nu^2}\dot{x}^2,$$

$$f(\nu t, x, \dot{x}) = -k(E)\dot{x} + \beta\cos\nu t + (3\dot{x}^2 + \nu^2 x^2)\cos\nu t + 2\nu x\dot{x}\sin\nu t.$$

Представим f в виде

$$f(\nu t, x, \dot{x}) = -\frac{1}{2}\sigma_0^2\left\{\frac{2k(E)}{\sigma_0^2}\dot{x} - \frac{2\beta}{\sigma_0^2}\cos\nu t - \frac{2\nu^2 x^2}{\sigma_0^2}\cos\nu t - \right.$$

$$\left. - \frac{6\dot{x}^2}{\sigma_0^2}\cos\nu t - \frac{4\nu}{\sigma_0^2}\sin\nu t\right\} = -\frac{1}{2}\sigma_0^2\left\{\left[\frac{2k(E)}{\sigma_0^2} - \frac{4\nu}{\sigma_0^2}\left(x\sin\nu t + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{1}{\nu}\dot{x}\cos\nu t\right)\right]\dot{x} - \left[\frac{2\beta}{\sigma_0^2} + \frac{2\nu^2}{\sigma_0^2}E\right]\cos\nu t\right\}.$$

Положив $x\sin\nu t + \frac{1}{\nu}\dot{x}\cos\nu t = Z_2$, $E = x^2 + \frac{1}{\nu^2}\dot{x}^2 = Z_1$, будем иметь

$$f(\nu t, x, \dot{x}) = -\frac{1}{2}g^2\{h_1(\nu t, x, \dot{x})\dot{x} + h_2(\nu t, x, \dot{x})\cos\nu t\},$$

где

$$h_1 = \frac{2k(Z_1)}{\sigma_0^2} - \frac{4\nu}{\sigma_0^2}Z_2 = \frac{2}{\nu^2}\left(\frac{\nu^2 k(Z_1)}{\sigma_0^2} - \frac{2\nu^3}{\sigma_0^2}Z_2\right),$$

$$h_2 = -\frac{2\beta}{\sigma_0^2} - \frac{2\nu^2}{\sigma_0^2}Z_1 = \frac{1}{\nu}\left(-\frac{2\beta\nu}{\sigma_0^2} - \frac{2\nu^3}{\sigma_0^2}Z_1\right).$$

Следовательно,

$$H_1(Z_1, Z_2) = \frac{\nu^2 k(E)}{\sigma_0^2} - \frac{2\nu^3}{\sigma_0^2}Z_2,$$

$$H_2(Z_1, Z_2) = -\frac{2\beta\nu}{\sigma_0^2} - \frac{2\nu^3}{\sigma_0^2}Z_1, \quad H = \frac{\nu^2}{\sigma_0^2}\int\limits_0^{Z_1} k(Z)\,dZ - \frac{2\nu^3}{\sigma_0^2}Z_1 Z_2 - \frac{2\beta\nu}{\sigma_0^2}Z_2.$$

Таким образом, для уравнения (21) решение УФПК имеет вид

$$P(\nu t, x, \dot{x}) = C\exp\left\{-\frac{\nu^2}{\sigma_0^2}\int\limits_0^E k(Z)\,dZ + \frac{2\nu}{\sigma_0^2}(\beta + \nu^2 E)\times\right.$$

$$\left.\times\left(x\sin\nu t + \frac{\dot{x}}{\nu}\cos\nu t\right)\right\}.$$

а стационарное решение УФПК для амплитуды и фазы —

$$P_0(a, \theta) = Ca \exp\left\{-\frac{2\nu^2}{\sigma_0^2}\left[\frac{1}{2}\int_0^{a^2} k(Z)\,dZ + a\left(\nu a^2 + \frac{\beta}{\nu}\right)\sin\theta\right]\right\}.$$

Это решение является новым.

1. *Fuller H. T.* Analysis of nonlinear stochastic systems by means of Fokker — Plank Equation // Int. J. Contr.— 1969.— **9**, N 6.— P. 603—655.
2. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний.— М. : Наука, 1980.— 368 с.
3. *Нгуен Донг Ань.* Взаимное влияние различных типов случайных и периодических возбуждений на колебательные нелинейные системы: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Киев, 1986.— 225 с.
4. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике.— М. : Сов. радио, 1961.— 558 с.
5. *Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г.* Применение асимптотических методов в стохастических системах // Приближенные методы исследования нелинейных систем.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976.— С. 102—147.
6. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка.— М. : Наука, 1966.— 260 с.

Получено 24.04.91