УДК 517.946

И. Я. МЕХ, асп. (Ин-т математики АН УССР, Киев)

О гладкости слабых решений эллиптических по Дуглису—Ниренбергу систем

Изучены свойства регулярности функций из области определения оператора L—замыкания в $(L_2(G))^N$ отображения

$$u = lu\ (u \in C^\infty\ (\text{гр}) = \{v \in (C^\infty\ (G))^N : bv = 0\}),$$

где $lu = f$ (в G), $bu = \varphi$ (на ∂G) — эллиптическая граничная задача для эллиптической по Дуглису — Ниренбергу системы.

Вивчені властивості регулярності функцій з області визначення оператора L—замикання в $(L_2(G))^N$ відображення

$$u = lu\ (u \in C^\infty\ (\text{гр}) = \{v \in (C^\infty\ (G))^N : bv = 0\}),$$

де $lu = f$ (в G), $bu = \varphi$ (на ∂G) — еліптична крайова задача для еліптичної за Дуглісом — Ніренбергом системи.

1. Постановка задачи. Пусть задача

$$lu = f\,(\text{в } G); \qquad bu = bu\,|_{\partial G} = \varphi \tag{1}$$

эллиптическая; $G \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с бесконечно гладкой границей ∂G, l — (T, S)-система, эллиптическая по Дуглису — Ниренбергу [1 — 3], $T = (t_1, \ldots, t_N)$, $S = (s_1, \ldots, s_N)$, t_j, s_j — целые числа; $l = (l_{jk}(x, D) : j, k = 1, \ldots, N)$, $\operatorname{ord} l_{jk} = t_k + s_j$, $t_1 + \ldots + t_N + s_1 + \ldots + s_N = 2m$; $b = (b_{hk}(x, D) : h = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, N)$, $\operatorname{ord} b_{hk} \leqslant \sigma_h + t_k$, $\sigma_h < 0$ — целые числа. Так как $t_j + s_r = (t_j + k) + (s_r - k)$, то без ограничения общности будем в пп. 1 — 6 считать, что $t_1 \geqslant \ldots \geqslant t_N \geqslant 0 = s_1 \geqslant \ldots \geqslant s_N$.

Пусть $C^\infty(\text{гр}) = \{w \in (C^\infty(\overline{G}))^N : bw = 0\}$. Пусть L — замыкание в $L_2 := (L_2(G))^N$ отображения $u \mapsto lu\,(u \in C^\infty(\text{гр}))$. Данная работа посвящена изучению свойств регулярности функций из области определения $\mathcal{D}(L)$ оператора L (соответствующая задача была поставлена М. С. Аграновичем).

2. Введем функциональные пространства. Для каждого $s \geqslant 0$ обозначим через $H^s(G)$ пространство Соболева — Слободецкого; $H^{-s}(G) = (H^s(G))^*$ — пространство, сопряженное $H^s(G)$ относительно расширения $(\cdot, \cdot)$ скалярного произведения в $L_2(G)$, $\|\cdot\|_s$ — норма в $H^s(G)$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Через $H^s(\partial G)$, $s \in \mathbb{R}$, обозначим пространства Соболева — Слободецкого на ∂G; $H^s(\partial G)$ и $H^{-s}(\partial G)$ взаимно сопряжены относительно расширения $(\cdot, \cdot)$ скалярного произведения в $L_2(\partial G)$; $\langle\langle\cdot\rangle\rangle_s$ — норма в $H^s(\partial G)$. Ниже $(\cdot, \cdot)$ обозначает как скалярное произведение в $L_2(G)$ (или его расширение), так и скалярное произведение в $L_2 = (L_2(G))^N$ (или его расширение). Из контекста всегда будет ясен смысл символа $(\cdot, \cdot)$.

Пусть $r > 0$ — целое. Через $\widetilde{H}^{s,(r)}(G)$, $s \in \mathbb{R}$; $s = k + 1/2$, $k = 0, 1, \ldots, r - 1$ [4, 3] (см. также [5], гл. 3, § 6), обозначим пополнение $C^\infty(\overline{G})$ по норме

$$|||u|||_{s,(r)} := \|u\|_{\widetilde{H}^{s,(r)}(G)} = \Big(\|u\|_s^2 + \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} \langle\langle D_\nu^{j-1} u\rangle\rangle_{s-j+1/2}^2\Big)^{1/2}$$

($D_\nu = i\partial/\partial\nu$, $\partial/\partial\nu$ — производная по нормали к ∂G). Если $s = k + 1/2$, $k = 0, 1, \ldots, r - 1$, то пространства $\widetilde{H}^{s,(r)}(G)$ и норма $|||\cdot|||_{s,(r)}$ определяются с помощью интерполяции. Наконец, если $r = 0$, то полагаем $\widetilde{H}^{s,(r)}(G) = H^s(G)$ и $|||\cdot|||_{s,(r)} = \|\cdot\|_s$.

Замыкание S отображения $u \mapsto (u|_{\overline{G}}, u|_{\partial G}, \ldots, D_\nu^{r-1} u|_{\partial G})$, $u \in C^\infty(G)$, устанавливает изометрический изоморфизм между пространством

$\widetilde{H}^{s,(r)}(G)$ и подпространством прямого произведения $H^s(G)\times\prod\limits_{1\leqslant j\leqslant N}H^{s-j+1/2}\times$ $\times(\partial G)$. Поэтому отождествим элемент $u\in H^{s,(r)}(G)$ с элементом $Su=$ $=(u_0,\ldots,u_r)$. Будем писать $u=(u_0,\ldots,u_r)\in\widetilde{H}^{s,(r)}(G)$, $u_0=u|_{\overline{G}}$. Подробно пространства $\widetilde{H}^{s,(r)}(G)$ изучены в [4]. В частности, для каждого $s\in\mathbb{R}$ замыкание $A=A_s$ отображения

$$u\mapsto(lu,bu),\quad u\in(C^\infty(\overline{G}))^N,$$

непрерывно действует из всего

$$\widetilde{H}^{T+s,(T)}:=\prod_{1\leqslant j\leqslant N}\widetilde{H}^{t_j+s,(t_j)}(G) \tag{2}$$

в пространство

$$\widetilde{K}_s=H^{s-S,(-S)}\times H^{s-\sigma-1/2}(\partial G):=\prod_{1\leqslant j\leqslant N}\widetilde{H}^{s-s_j,(-s_j)}(G)\times\prod_{1\leqslant h\leqslant m}H^{s-\sigma_h-1/2}(\partial G). \tag{3}$$

Для операторов $\{A_s:s\in\mathbb{R}\}$ справедлива теорема о полном наборе изоморфизмов [6]: ядро

$$\mathfrak{N}=\{u\in\widetilde{H}^{T+s,(T)}:A_su=0\} \tag{4}$$

конечномерно, не зависит от s и состоит из бесконечно гладких функций: $\mathfrak{N}\subset(C^\infty(G))^N$; область значений $\mathfrak{R}(A_s)$ замкнута в $\widetilde{K}_s$ и имеет конечную коразмерность: фактор-пространство $\widetilde{K}_s/\mathfrak{R}(A_s)$ конечномерно и не зависит от s. Сужение $A_1:=A_{1s}$ оператора A_s на подпространство $P\widetilde{H}^{T+s,(T)}=\{u\in\widetilde{H}^{T+s,(T)}:(u|_{\overline{G}},\mathfrak{N})=0\}$ пространства $\widetilde{H}^{T+s,(T)}$ осуществляет изоморфизм

$$P\widetilde{H}^{T+s,(T)}\xrightarrow{A_{1s}}Q^+\widetilde{K}_s \tag{5}$$

где $Q^+\widetilde{K}_s$ — подпространство $\widetilde{K}_s$, «ортогональное» к коядру [6, 7].

Воспользуемся также следующим простым соображением. Пусть B_1, B_2 — банаховы пространства и T — линейный оператор, изоморфно отображающий B_1 на B_2. Пусть $E_1\subset B_1$ — подпространство B_1, а $E_2=TE_1$ — соответствующее подпространство B_2. Тогда T естественным образом определяет линейный оператор $\mathbf{T}$, устанавливающий изоморфизм между фактор-пространствами: $B_1/E_1\to B_2/E_2$.

3. Нам понадобится следующее утверждение, доказанное в [3]. Пусть

$$u_0\in H^{T+s}:=\prod_{1\leqslant j\leqslant N}H^{t_j+s}(G),\quad f\in\widetilde{H}^{s-S,(-S)},\ f|_{\overline{G}}=f_0\in H^{s-S}:=\prod_{1\leqslant j\leqslant N}H^{s-s_j}(G),$$

и выполняется равенство

$$(u_0,l^+v)=(f_0,v)\quad(\forall v\in(C_0^\infty(G))^N). \tag{6}$$

Тогда существует один и только один элемент $u\in\widetilde{H}^{T+s,(T)}$ такой, что $lu=f$ (т. е. $lu|_{\overline{G}}=f_0$, $D_\nu^{k-1}(lu)_r|_{\partial G}=f_{rk}$ $(r:-s_r\geqslant1;\ k=1,\ldots,-s_r)$) и $u|_{\overline{G}}=$ $=u_0$ внутри G (т. е. $(u|_{\overline{G}},v)=(u_0,v)$ $(\forall v\in(C_0^\infty(G))^N)$) и справедлива оценка

$$\|u\|_{\widetilde{H}^{T+s,(T)}}\leqslant c(\|u_0\|_{H^{T+s}}+\|f\|_{\widetilde{H}^{s-S,(-S)}}). \tag{7}$$

Заметим, что если $t_j+s>-1/2$, то $u_j|_{\overline{G}}=u_{j0}$ (пространства H^t при $t>1/2$ не имеют элементов, сосредоточенных на границе).

4. Обозначим через

$$\widetilde{M}_s := \{u'' \in \widetilde{H}^{T+s,(T)} : \operatorname{supp} u''|_{\overline{G}} \subset \partial G,\ lu''|_{\overline{G}} = 0\} \qquad (8)$$

подпространство пространства $\widetilde{H}^{T+s,(T)}$. Пусть

$$\widetilde{H}^{T+s,(T)}/\widetilde{M}_s = \widetilde{\mathbf{H}}^{T+s,(T)}. \qquad (9)$$

Если $u \in \widetilde{H}^{T+s,(T)}$, $lu|_{\overline{G}} = f_0 \in H^{s-S}$, а $v \in \widetilde{M}_s$, то $l(u+v)|_{\overline{G}} = f_0$ и

$$\| l(u+v) \|_{H^{s-S}} \leqslant c \| u + v \|_{\widetilde{H}^{T+s,(T)}}.$$

Перейдя здесь к inf по всем $v \in \widetilde{M}_s$, получим $\| l\mathbf{u} \|_{H^{s-S}} \leqslant c \| \mathbf{u} \|_{\widetilde{\mathbf{H}}^{T+s,(T)}}$ т. е. отображение $\mathbf{u} \mapsto l\mathbf{u} : \widetilde{\mathbf{H}}^{T+s,(T)} \to H^{s-S}$ непрерывно.

Из изложенного в п. 3 получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $u_0 \in H^{T+s}$, $f_0 \in H^{s-S}$ и выполнено соотношение (6). Тогда существует один и только один элемент $\mathbf{u} \in \widetilde{\mathbf{H}}^{T+s,(T)}$ такой, что $l\mathbf{u} = f_0$ и $\mathbf{u}|_{\overline{G}} = u_0$ внутри G, при этом справедлива оценка*

$$\| \mathbf{u} \|_{\widetilde{\mathbf{H}}^{T+s,(T)}} \leqslant c (\| u_0 \|_{H^{T+s}} + \| f_0 \|_{H^{s-S}}). \qquad (10)$$

Оценка (10) непосредственно получается из оценки (7) переходом к фактор-топологии.

Перейдя в неравенстве $\| b(u+v) \|_{H^{s-\sigma-1/2}(\partial G)} \leqslant c \| u + v \|_{\widetilde{H}^{T+s,(T)}}$, $v \in \widetilde{M}_s$, к inf по всем $v \in \widetilde{M}_s$, получим

$$\| b\mathbf{u} \|_{H^{s-\sigma-1/2}(\partial G)} \leqslant c \| \mathbf{u} \|_{\widetilde{\mathbf{H}}^{T+s,(T)}} \leqslant c_1 (\| u_0 \|_{H^{T+s}} + \| f_0 \|_{H^{s-S}}). \qquad (11)$$

Из (6) следует, что если существует последовательность $u_k \in (C^\infty(G))^N$ такая, что при $u_k \to u_0$ в $\mathbf{H}^{T+s}$, $lu_k \to f_0$ в H^{s-S}, то $u_k \to \mathbf{u}$ в $\widetilde{\mathbf{H}}^{T+s,(T)}$. Тогда из (11) следует

$$bu_k \to b\mathbf{u} \text{ в } H^{s-\sigma-1/2}(\partial G). \qquad (12)$$

В частности, если $bu_k|_{\partial G} = 0$, то и $b\mathbf{u}|_{\partial G} = 0$.

5. Теорема 2. *Пусть задача (1) — эллиптическая и ядро (4) $\mathfrak{N} = \{0\}$. Пусть $\mathbf{u} \in \widetilde{\mathbf{H}}^{T+s,(T)}$ — решение задачи*

$$l\mathbf{u} = f_0 \in H^{s-S}; \qquad b\mathbf{u} = 0.$$

Если $f_0 \in H^{s-S+q}$, $q > 0$, то $\mathbf{u} \in \widetilde{\mathbf{H}}^{T+s+q,(T)}$ и справедлива оценка

$$\| \mathbf{u} \|_{\widetilde{\mathbf{H}}^{T+s,(T)}} \leqslant c (\| f_0 \|_{H^{s-S+q}} + \| \mathbf{u}|_{\overline{G}} \|_{H^{T+s}}).$$

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{N} = \{0\}$, то из теоремы о полном наборе изоморфизмов (см. п. 2) следует, что оператор $A = A_s$ осуществляет изоморфизм $\widetilde{H}^{T+s,(T)} \xrightarrow{A} Q^+\widetilde{K}_s$. Тогда естественным образом получаем изоморфизм

$$\widetilde{H}^{T+s,(T)}/\widetilde{M}_s \xrightarrow{\mathbf{A}} Q^+\widetilde{K}_s/A\widetilde{M}_s = \mathbf{K}_s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Отсюда следует требуемое утверждение: если $A\mathbf{u} \in \mathbf{K}_{s+q}$, то и $\mathbf{u} \in \widetilde{\mathbf{H}}^{T+s+q,(T)}$.

6. Пусть теперь $u_0 \in \mathcal{D}(L)$, $Lu_0 = f_0$. Понятно, что $u_0 \in H^{T+s}$ с $s = -t_1$, а $f_0 \in H^{s-S}$ и выполнено соотношение (6). Тогда из теоремы 1 следует, что существует один и только один элемент $\mathbf{u} \in \widetilde{\mathbf{H}}^{T+s,(T)}$ такой, что $l\mathbf{u} = f_0$ и $\mathbf{u}|_{\bar{G}} = u_0$ внутри G. Кроме того, из (12) следует $b\mathbf{u} = 0$. Таким образом, элемент $\mathbf{u}$ является решением задачи

$$l\mathbf{u} = f_0 \in L_2 \subset H^{s-S}, \quad s = s_N; \qquad b\mathbf{u} = 0. \tag{13}$$

Из теоремы 2 получаем $\mathbf{u} \in \widetilde{\mathbf{H}}^{T+s_N,(T)}$. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть задача* (1) — *эллиптическая*, $u_0 \in \mathcal{D}(L)$, $Lu_0 = f_0$ *и* $\mathfrak{N} = \{0\}$. *Тогда существует элемент* $\mathbf{u} \in \widetilde{\mathbf{H}}^{T+s_N,(T)}$ *такой, что* $\mathbf{u}|_{\bar{G}} = u_0$ *внутри* G, $l\mathbf{u} = f_0 \in L_2$, $b\mathbf{u} = 0$. *При этом*

$$\| \mathbf{u} \|_{\widetilde{\mathbf{H}}^{T+s_N,(T)}} \leqslant c(\| u_0 \|_{L_2} + \| f_0 \|_{L_2}). \tag{14}$$

Отсюда следует, что повышение гладкости всех u_j имеет место, если $t_j + S_N > 0$, $j = 1, \ldots, N$. В этом случае, например, собственные функции оператора L будут бесконечно гладкими и удовлетворять граничным условиям в обычном смысле.

7. Если в системе (1) $t_j = s_j$, $j = 1, \ldots, N$, то в условиях теоремы 3 $\mathbf{u} \in \widetilde{\mathbf{H}}^{T+t_N,(T)}$ и $\| \mathbf{u} \|_{\widetilde{\mathbf{H}}^{T+t_N,(T)}} \leqslant c(\| u_0 \|_{L_2} + \| f_0 \|_{L_2})$. В частности,

$$\| u_0 \|_{H^{T+t_N}} \leqslant c(\| u_0 \|_{L_2} + \| f_0 \|_{L_2}). \tag{15}$$

Если $\mathfrak{N} \neq \{0\}$, то оператор A_{1s} осуществляет полный набор изоморфизмов (5). Однако теперь $\widetilde{M}_s$ не является подпространством пространства $P\widetilde{H}^{T+s,(T)}$. Поэтому рассуждения, изложенные в п. 5, здесь неприменимы. В дальнейшем ограничимся лишь рассмотрением случая, когда в системе (1) $t_j = s_j$, $j = 1, \ldots, N$, и $\mathfrak{N}$ произвольно.

Теорема 4. *Пусть задача* (1) — *эллиптическая*; $t_j = s_j$, $j = 1, \ldots, N$, $\sigma_h < t_N - t_1$, $h = 1, \ldots, m$; *пусть* $u_0 \in \mathcal{D}(L)$, $Lu_0 = f_0$ *Тогда существует элемент* $\mathbf{u} \in \widetilde{\mathbf{H}}^{T+t_N,(T)}$ *такой, что* $l\mathbf{u} = f_0$, $b\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{u}|_{\bar{G}} = u_0$. *При этом справедливы оценки* (14), (15).

Доказательство. Пусть $t'_j = t_j + t_1$, $s'_j = t_j - t_1$, $j = 1, \ldots, N$ $T' = (t'_1, \ldots, t'_N)$, $S' = (s'_1, \ldots, s'_N)$. Ясно, что теперь система (1) является (T', S')-системой. Тогда по теореме 1 существует элемент $\mathbf{u} \in \widetilde{\mathbf{H}}^{T'+s,(T')}$ с $s = -t'_1$ такой, что

$$l\mathbf{u} = f_0 \in L_2 \subset H^{s_N - S'}; \qquad b\mathbf{u} = 0. \tag{16}$$

Пусть теперь $v \in \widetilde{M}_s$, $v = (v_1, \ldots, v_N)$, $v_j = (v_{j0}, \ldots, v_{jt_j})$. Из доказательства леммы 3.3 из [3] выводим $v_{jk} = 0$, $k = 1, \ldots, t_j + t_N$; $j = 1, \ldots, N$. Поэтому, если $\sigma_h < t_N - t_1$, $h = 1, \ldots, m$, то $bv = 0$, $v \in \widetilde{M}_s$. Тогда из $\mathbf{u} = u + \widetilde{M}_s \in \widetilde{\mathbf{H}}^{T'-t'_1,(T')}$, $b\mathbf{u} = 0$ следует $bu = 0$. Поэтому каждый элемент $u \in \widetilde{H}^{T'-t'_1,(T')}$ из класса $u + \widetilde{M}_s = \mathbf{u}$ является решением задачи $lu|_{\bar{G}} = f_0$, $bu = 0$. Поскольку $f_0 \in L_2 \subset H^{s'_N - S'}$, то существует элемент $f \in \widetilde{H}^{s'_N - S',(-S')}$ (например, $f = (f_1, \ldots, f_N)$), $f_j = (f_{j0}, f_{j1}, \ldots, f_{j,-s'_j})$ с $f_{jk} = 0$, $j = 1, \ldots, N$; $k = 1, \ldots, -s'_j$), такой, что $f|_{\bar{G}} = f_0$ и $lu = f$, где u, по-прежнему, принадлежит классу $\mathbf{u}$ (см. п. 3). Тогда u — решение задачи $lu = f$, $bu = 0$.

По теореме о полном наборе изоморфизмов $u \in \widetilde{H}^{T'+s'_N,(T')} = \widetilde{H}^{T+t_N,(T')}$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{\widetilde{H}^{T+t_N,(T')}} \leqslant c(\|u\|_{\widetilde{H}^{T'-t'_1,(T')}} + \|f\|_{\widetilde{H}^{s'_N-S',(-S')}}) \leqslant$$

$$\leqslant c_1(\|u_0\|_{L_2} + \|f_0\|_{L_2}).$$

Перейдя здесь к фактор-топологии, получим требуемые оценки (14), (15).

Аналог теоремы 4 с таким же доказательством справедлив также, если в (T, S)-системе (1) $t_j + s_N > 0$, $j = 1, \ldots, N$.

1. *Волевич Л. Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // Мат. сб.— 1965.— 67, № 3.— С. 373—416.
2. *Солонников В. А.* Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Дуглиса — Л. Ниренберга // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1966.— 92, № 4.— С. 233—297.
3. *Ройтберг Я. А.* О граничных значениях обобщенных решений эллиптических по Дуглису — Ниренбергу систем // Сиб. мат. журн.— 1977.— 18, № 4.— С. 846—860.
4. *Ройтберг Я. А.* О значении на границе области обобщенных решений эллиптических уравнений // Мат. сб.— 1971.— 86, № 2.— С. 248—267.
5. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев : Наук. думка, 1965.— 800 с.
6. *Ройтберг Я. А.* Теорема о полном наборе изоморфизмов для эллиптических по Дуглису — Ниренбергу систем // Укр. мат. журн.— 1975.— 27, № 4.— С. 544—548.
7. *Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах, осуществляемых эллиптическими операторами // Докл. АН СССР.— 1962.— 180, № 3.— С. 542—544.

Получено 15.11.90