УДК 517.987

В. Н. РАДЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук (Запорож. ун-т)

Равномерная интегрируемость для интегралов по L_0-значным мерам

Рассматриваются интегралы от действительных функций по L_0-значным мерам. Доказано, что если функции f_n сходятся по мере к f, то $\int f_n d\mu \xrightarrow{P} \int f d\mu$ тогда и только тогда, когда для f_n выполняется некоторое условие, аналогичное условию равномерной интегрируемости для интегралов по скалярным мерам.

Розглядаються інтеграли від дійсних функцій по L_0-значних мірах. Доведено, що якщо функції f_n збігаються за мірою до f, то $\int f_n d\mu \xrightarrow{P} \int f d\mu$ тоді і лише тоді, коли для f_n виконується деяка умова, аналогічна умові рівномірної інтегровності для інтегралів за скалярними мірами.

Пусть X — некоторое множество, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра подмножеств X, а (Ω, F, P) — вероятностное пространство. Будем рассматривать пространство $L_0(\Omega, F, P)$ (далее будем писать просто L_0), состоящее из действительных

F-измеримых функций с топологией сходимости по мере P. Будем называть L_0-значной мерой функцию $\mu : \mathfrak{B} \to L_0$ такую, что $\mu(A_n) \xrightarrow{P} 0$ для $A_n \downarrow \varnothing$, и $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ для $A \cap B = \varnothing$ (равенство элементов из L_0 понимается в смысле почти всюду по P).

Будем рассматривать интегралы $\int\limits_A f d\mu$ от действительных измеримых функций f на X по L_0-значной мере μ, $A \in \mathfrak{B}$. Для простой функции $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i I_{A_i}(x)$ определяем $\int\limits_A f d\mu = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i \mu(A_i \cap A)$. Произвольную измеримую функцию f называем интегрируемой по μ на множестве A, если найдется последовательность простых функций $f_n(x)$ такая, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geqslant n_0\ \forall g(x)\ (|g(x)| \leqslant |f(x) - f_n(x)|,\ g(x)$ проста) $P\left\{\left|\int\limits_A g d\mu\right| > \varepsilon\right\} < \varepsilon$. Тогда принимаем $\int\limits_A f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu$. В [1] доказано, что это определение корректно и любая ограниченная измеримая функция интегрируема.

Из теоремы 1 [1] следует, что к рассматриваемому интегралу применима построенная в [2] теория интеграла по векторной мере (хотя в [1] считается, что X — компакт, а $\mathfrak{B}$ борелевская, в доказательстве 1 [1] это не используется). Для интегралов по скалярным мерам известна связь между равномерной интегрируемостью и сходимостью интегралов. Цель данной статьи — установление аналогичного факта для интегралов по L_0-значным мерам.

Для ξ из L_0 будем использовать обозначение $\|\xi\| = \inf\{\delta > 0: P\{|\xi| > \delta\} < \delta\}$. Легко проверить, что $\|\xi + \eta\| \leqslant \|\xi\| + \|\eta\|$.

Будем использовать доказанное в [3] утверждение о том, что для любой L_0-значной меры μ существует конечная скалярная мера m на $\mathfrak{B}$, доминирующая меру μ (т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall A \in \mathfrak{B}\ m(A) < \delta \Rightarrow \|\mu(A)\| < \varepsilon$).

Лемма. *Пусть функция f интегрируема по L_0-значной мере μ, а мера m доминирует меру μ. Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall A \in \mathfrak{B}\ m(A) < \delta \Rightarrow \left\|\int\limits_A f d\mu\right\| < \varepsilon.$$

Утверждение леммы вытекает из следствия 7.3.7 [2] (обобщение теоремы Лебега о сходимости интегралов на векторные меры).

Теорема. *Пусть функции $f_n : X \to R$ интегрируемы по L_0-значной мере μ, мера m доминирует меру μ, и $f_n \xrightarrow{m} f$. Тогда эквивалентны два следующих утверждения:*

1) *f интегрируема по μ, и* $\forall A \in \mathfrak{B}\ \int\limits_A f_n d\mu \xrightarrow{P} \int\limits_A f d\mu$;

2) $\forall \varepsilon > 0\ \ \lim\limits_{c\to\infty} \sup\limits_{n, A} P\left\{\left|\int\limits_{A \cap \{|f_n| > c\}} f_n d\mu\right| > \varepsilon\right\} = 0.$

Доказательство. Докажем сначала $1 \Rightarrow 2$. Из теоремы 7.3.5 [2] следует, что $\eta_n(A) = \int\limits_A f_n\, d\mu$ являются L_0-значными мерами. По лемме они все абсолютно непрерывны относительно m, и по теореме 3.2 [4] (обобщение теоремы Витали — Хана — Сакса на векторные меры) η_n равномерно абсолютно непрерывны. Поэтому для доказательства 2 нам достаточно показать, что выбором c можно сделать как угодно малым $\sup\limits_{n,A} m(A \cap \{|f_n| > c\})$. А этот факт легко выводится из того, что $f_n \xrightarrow{m} f$ (поскольку множество $\{x : f(x) = \infty\}$ является μ-пренебрежимым, то, не ограничивая общности, можем считать, что $|f| < \infty$).

Теперь докажем $2 \Rightarrow 1$. Покажем сначала, что при выполнении 2

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall A \in \mathfrak{B}\ m(A) < \delta \Rightarrow \sup_n \left\|\int\limits_A f_n d\mu\right\| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Ведь для любых c и n

$$\Big\| \int_A f_n d\mu \| \leqslant \| \int_{A \cap \{|f_n| > c\}} f_n d\mu \| + \| \int_{A \cap \{|f_n| \leqslant c\}} f_n d\mu \Big\| .$$

Из условия 2 следует, что выбором c можно сделать первое слагаемое сколь угодно малым равномерно по n, A. При доказательстве теоремы 1 [1] по существу было доказано, что для любой измеримой функции g такой, что $\sup_{x \in x} |g(x)| \leqslant 1$, выполняется соотношение

$$\Big\| \int_A g d\mu \Big\| \leqslant 16 \sup_{B \subset A} \| \mu(B) \| . \tag{2}$$

Отсюда и из того, что m доминирует над μ, выбором δ для фиксированного c можем добиться того, что будет сколь угодно мало второе слагаемое при $m(A) < \delta$.

Если в (2) в качестве L_0-значной меры возьмем $\eta_n(A) = \int_A f_n d\mu$, то для любой измеримой функции g, $\sup_{x \in X} |g(x)| \leqslant 1$, получим

$$\Big\| \int_A f_n g d\mu \Big\| \leqslant 16 \sup_{B \subset A} \Big\| \int_B f_n d\mu \Big\| . \tag{3}$$

(Равенство $\int_A g d\left(\int f_n d\mu\right) = \int_A g f_n d\mu$ легко проверяется для простых функций g, а затем можно воспользоваться следствием 7.3.7 [2].)

Из (1) и (3) следует, что если $A_k \downarrow \varnothing$, то

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{n, |g| \leqslant |f_n|} \Big\| \int_{A_k} g d\mu \Big\| = 0. \tag{4}$$

Выберем подпоследовательность f_{n_i} такую, что $\lim_{i \to \infty} f_{n_i}(x) = f(x)$ почти всюду по мере m. Тогда (4) означает, что для последовательности $\{f_{n_i},\ i \geqslant 1\}$ выполняется условие теоремы 7.3.6 [2]. Поэтому f μ-интегрируема, и $\forall A \in \mathfrak{B}$ $\int_A f_{n_i} d\mu \xrightarrow{P} \int_A f d\mu$, $i \to \infty$. Осталось доказать, что последовательность $\int_A f_n d\mu$, $n \geqslant 1$, имеет предел в L_0. Справедливо неравенство

$$\Big\| \int_A (f_n - f_k)\, d\mu \| \leqslant \| \int_{A \cap \{|f_n - f_k| \leqslant \delta\}} (f_n - f_k)\, d\mu \Big\| +$$

$$+ \Big\| \int_{A \cap \{|f_n - f_k| > \delta\}} f_n d\mu \| + \| \int_{A \cap \{|f_n - f_k| > \delta\}} f_k d\mu \Big\| .$$

Из теоремы 1 [1] и возможности приближения рассматриваемого интеграла интегралами от простых функций следует, что выбором δ можно сделать сколь угодно малым первое слагаемое. Взяв достаточно большие n и k, сделаем для выбранного δ достаточно малым $m(A \cap \{|f_n - f_k| > \delta\})$. Из (1) следует, что тем самым можно сколь угодно малыми сделать второе и третье слагаемые. Поскольку пространство L_0 полно, теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В формулировке теоремы условие $f_n \xrightarrow{m} f$ можно заменить требованием, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ $\lim_{n \to \infty} \sup_{A \subset \{|f_n - f| > \varepsilon\}} \| \mu(A) \| = 0$. В этом случае доказательство несколько более громоздко, не использует существования доминирующей скалярной меры, но отличается от приведенного лишь некоторыми техническими деталями.

1. *Радченко В. М.* Про інтеграли по випадкових мірах, σ-адитивних з ймовірністю 1 // Вісник Київ. ун-ту. Математика і механіка.— 1989.— Вип. 31.— С. 111—114.
2. *Turpin P.* Convexites dans les espaces vectoriels topologiques generaux // Diss. Math.— 1976.— 131.— 220 p.
3. *Talagrand M.* Les mesures vectorielles a valeurs dans L_0 sont bornees // Ann. Sci. Ecole norm. super.— 1981.— 14, N 4.— P. 445—452.
4. *Drewnowski L.* Topological rings of sets, continuous set functions, integration. I. // Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. math., astron. et phys.— 1972.— 20, N 4.— P. 269—276.

Получено 16,05,90