УДК 517.9

НГУЕН БЫОНГ канд. физ.-мат. наук (Вьетнам)

# О регуляризации вариационных неравенств и общей схеме аппроксимации регуляризованных решений в банаховых пространствах

Для вариационных неравенств с монотонными операторами в банаховых пространствах строится регуляризованное возмущенное неравенство с помощью линейного сильно монотонного оператора, исследуется общая схема аппроксимации регуляризованных решений, приводится пример построения такого линейного оператора по информации оператора задачи.

Для варіаційних нерівностей з монотонними операторами в банахових просторах будується регуляризована збурена нерівність за допомогою лінійного сильно монотонного оператора, вивчається загальна схема апроксимації регуляризовних розв'язків, наводиться приклад побудови такого лінійного оператора за інформацією оператора задачі.

1. Пусть $X$ — некоторое вещественное рефлексивное банахово пространство, $X^*$ — сопряженное с ним. Положим $\langle x^*, x\rangle = x^*(x)$ для любых $x^* \in X^*$ и $x \in X$.

Пусть $K \subset X$ — некоторое замкнутое и выпуклое множество. Рассматривается задача:

$$x_0 \in K : \langle A(x_0) - f_0, x - x_0\rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in K, \tag{1}$$

где $A : x \to X^*$ — некоторый монотонный и полунепрерывный оператор, а $f_0 \in X^*$ — некоторый фиксированный элемент.

Задача (1), вообще говоря, классически некорректно поставлена [1]. В [2—4] предложен операторный метод регуляризации, заключающийся в решении возмущенного вариационного неравенства

$$\langle A^h(x_\alpha^\tau) + \alpha U(X_\alpha^\tau) - f_\delta, x - x_\alpha^\tau\rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in K, \tag{2}$$

где $(A^h, f_\delta)$ — заданные приближения для $(A, f_0)$, $U : X \to X^*$ — нормализованное дуальное отображение, а $\alpha > 0$ — параметр регуляризации. Однако, помимо свойств монотонности и коэрцитивности отображение $U$ обладает такими отрицательными свойствами, как нелинейность и связь с геометрическими характеристиками пространства $X$, вносящими большие трудности в исследование вариационного неравенства (2). Основная цель данной статьи — найти возможность в некоторых случаях вместо отображения $U$ использовать линейный сильно монотонный оператор. Затем приводится общая схема для аппроксимации регуляризованных решений (эта схема в линейном случае исследована в [5]). Приведенный ниже пример показывает, что рассмотренный подход позволяет использовать исходные данные более эффективно, чем в [2—4].

2. Предположим, что существует некоторый линейный оператор с плотной в $X$ областью определения $D(b)$ и областью значений $R(B) = X^*$ такой, что $\langle Bx, x\rangle \geqslant m_B \|x\|^2$, $m_B > 0$, для любого $x \in D(B)$, $D(B)$ содержит $S_0$, множество решений уравнения (1). Без ограничения общности полагаем, что $m_B = 1$.

Рассмотрим регуляризованное возмущенное неравенство

$$\langle A(x_\alpha^\delta) + \alpha B x_\alpha^\delta - f_\delta, x - x_\alpha^\delta\rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in K, \quad \|f_\delta - f_0\| \leqslant \delta. \tag{3}$$

Теорема 1. *Для каждого $\alpha > 0$ и $f_\delta \in X^*$ возмущенное неравенство имеет единственное решение $x_\alpha^\delta$. Если при $\alpha \to 0$ отношение $\delta/\alpha \to 0$, то последовательность $\{x_\alpha^\delta\}$ сходится к элементу $x_0 \in S_0$, удовлетворяющему условию $\langle Bx, x - x_0\rangle \geqslant 0$ $\forall x \in S_0$.*

Доказательство. Из [6] следует, что $B$ является максимально монотонным оператором. Тогда $A + \alpha B$ — тоже максимально монотонный оператор. Поскольку $B$ коэрцитивен, то $A + \alpha B$ также коэрцитивен. Поэтому (3) имеет единственное решение $X_\alpha^\delta$.

Из соотношений (1) и (3) имеем $\forall \tilde{x} \in S_0$

$$\langle A(x_\alpha^\delta) + \alpha B x_\alpha^\delta - f_\delta, \tilde{x} - x_\alpha^\delta \rangle \geqslant \langle A(\tilde{x}) - f_0, \tilde{x} - x_\alpha^\delta \rangle$$

или

$$\delta \| \tilde{x} - x_\alpha^\delta \| + \alpha \langle B\tilde{x}, \tilde{x} - x_\alpha^\delta \rangle \geqslant \alpha \| \tilde{x} - x_\alpha^\delta \|^2.$$

Отсюда видно, что $\{x_\alpha^\delta\}$ ограничено. Предположим, что $\{x_\alpha^\delta\}$ слабо сходится к $x_0 \in X$. Так как $K$ является замкнутым и выпуклым множеством, то $x_0 \in K$.

С другой стороны, неравенство (3) эквивалентно следующему:

$$\langle A(x) + \alpha B(x) - f_\delta, x - x_\alpha^\delta \rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in K.$$

Отсюда, устремляя $\alpha$ и $\delta$ к нулю, получаем $\langle A(x) - f_0, x - x_0 \rangle \geqslant 0$, что эквивалентно (1). Поэтому предельный элемент $x_0$ является решением (1). Из (4) будем иметь, что $\langle Bx, x - x_0 \rangle \geqslant 0 \ \forall x \in S_0$ и $\{x_\alpha^\delta\}$ сходится к $x_0$ сильно. Так как элемент $x_0 \in S_0$, обладающий таким свойством, единствен, то вся последовательность $\{x_\alpha^\delta\}$ сходится к $x_0$. Теорема доказана.

Если вместо оператора $A$ заданы его приближения $A^h$ такие, что $\| A^h(x) - A(x) \| \leqslant hg(\|x\|)$, $g(t)$ — непрерывная неубывающая функция и $A^h$ — также непрерывные и монотонные операторы, то справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для каждого $\alpha > 0$, $h > 0$ и $f_\delta \in X^*$ вариационное неравенство*

$$\langle A^h(x_\alpha^\tau) + \alpha b x_\alpha^\tau - f_\delta, x - x_\alpha^\tau \rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in K, \quad \tau = (h, \delta), \tag{4}$$

*имеет единственное решение $x_\alpha^\tau \in K$. Если $h/\alpha$ и $\delta/\alpha$ стремятся к нулю при $\alpha \to 0$, то последовательность $\{x_\alpha^\delta\}$ сходится к $x_0$.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 1, имеем

$$\langle A^h(x_\alpha^\tau) + \alpha B x_\alpha^\tau - f_\delta, \tilde{x} - x_\alpha^\delta \rangle \geqslant \langle A(\tilde{x}) - f_0, \tilde{x} - x_\alpha^\delta \rangle, \quad \tilde{x} \in S_0.$$

Отсюда следует

$$\langle A^h(x_\alpha^\tau) - A^h(\tilde{x}), x_\alpha^\tau - \tilde{x} \rangle + \langle A^h(\tilde{x}) - A(\tilde{x}), \tilde{x} - x_\alpha^\tau \rangle + \langle f_0 - f_\delta, \tilde{x} - x_\alpha^\tau \rangle \geqslant 0$$

или

$$\| \tilde{x} - x_\alpha^\tau \| hg(\|\tilde{x}\|) + \delta \| \tilde{x} - x_\alpha^\delta \| + \alpha \langle b\tilde{x}, \tilde{x} - x_\alpha^\delta \rangle \geqslant \alpha \| \tilde{x} - x_\alpha^\tau \|^2.$$

Все дальнейшие рассуждения такие же, как и в теореме 1, поэтому мы их опускаем.

В случае немонотонности операторов $A^h$ можно использовать подход О. А. Лисковца [7].

Рассмотрим конечную аппроксимацию регуляризованных решений $x_\alpha^\delta$.

Предположим, что $A$ является непрерывным и строго монотонным оператором и для пространства $X$ существует возрастающая цепочка конечномерных подпространств $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots \subset X$, удовлетворяющих условию $\bigcup_{m=1}^{\infty} x_m = X$. Пусть $P_n X = X_n$ — проектор, и $P_n^* B P_n x \to Bx$, $n \to \infty$, для любого $x \in D(B)$. Найдем $x_{\alpha n}^\delta \in K_n = X_n \cap K$ такой, что

$$\langle A(x_{\alpha n}^\delta) + \alpha B x_{\alpha n}^\delta - f_\delta, x - x_{\alpha n}^\delta \rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in K_n. \tag{5}$$

Очевидно, это неравенство имеет единственное решение.

Теорема 3. *Для того чтобы для любого $\alpha > 0$ и $f_\delta$ имела место сходимость конечномерных аппроксимаций $x_{\alpha n}^\delta$ к решению регуляризован-*

*ного вариационного неравенства* (3), *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $x \in K$ *последовательность* $P_n x$ *сходилась к* $x$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\bar{x}$ — некоторая точка множества $K$. Тогда $\bar{x}_\alpha \to \bar{x}$ при $\alpha \to 0$, где $\bar{x}_\alpha$ — решение регуляризованного вариационного неравенства

$$\langle A(\bar{x}_\alpha) + \alpha B \bar{x}_\alpha - A(\bar{x}), x - \bar{x}_\alpha \rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in K.$$

Это вытекает из теоремы 1 при $f_0 = f_\delta = A(x)$. Поэтому для произвольного положительного числа $\varepsilon$ можно указать значение параметра регуляризации $\bar{\alpha}$ такое, что для любого $\alpha \leqslant \bar{\alpha}$ справедливо неравенство $\| \bar{x}_\alpha - \bar{x} \| \leqslant \varepsilon/2$.

Так как для любого $\alpha > 0$ и $f_\delta \in X^*$ имеет место сильная сходимость конечномерных аппроксимаций $x^\delta_{\alpha n}$ к регуляризованному решению $x^\delta_\alpha$, то $\bar{x}_{\alpha n} \to \bar{x}_\alpha$ при $n \to \infty$, где $\bar{x}_{\alpha n}$—решение вариационного неравенства (5) при $f_\delta = A(\bar{x})$. Таким образом, для $\varepsilon > 0$ можно указать число $N$ такое, что для всех $n \geqslant N$ $\| \bar{x}_\alpha - \bar{x}_{\alpha n} \| \leqslant \varepsilon/2$, но тогда при $n \geqslant N$ справедливо и $\| \bar{x} - P_n \bar{x} \| < \varepsilon$. Следовательно, $P_n \bar{x} \to \bar{x}$ при $n \to \infty$.

Достаточность. Из неравенств (3) и (5) имеем

$$\langle A(x^\delta_\alpha) + \alpha B x^\delta_\alpha - f_\delta, x^\delta_{\alpha n} - x_\alpha \rangle \geqslant \langle A(x^\delta_{\alpha n}) + \alpha B x^\delta_{\alpha n} - f_\delta, x^\delta_{\alpha n} - P_n x^\delta_\alpha \rangle.$$

Отсюда следует

$$\langle A(x^\delta_\alpha), x^\delta_{\alpha n} - P_n x^\delta_\alpha + P_n x^\delta_\alpha - x^\delta_\alpha \rangle + \alpha \langle B x^\delta_\alpha, x^\delta_{\alpha n} - P_n x^\delta_\alpha - x^\delta_\alpha \rangle -$$
$$- \langle f_\delta, x^\delta_{\alpha n} - P_n x^\delta_\alpha + P_n x^\delta_\alpha \rangle \geqslant \langle A(x^\delta_{\alpha n}) + \alpha B x^\delta_{\alpha n} - f_\delta, x^\delta_{\alpha n} - P_n x^\delta_\alpha \rangle$$

или

$$\langle A(x^\delta_\alpha) - A(x^\delta_{\alpha n}), x^\delta_{\alpha n} - P_n x^\delta_\alpha \rangle + \langle A(x^\delta_\alpha), P_n x^\delta_\alpha \rangle + \langle b(x^\delta_\alpha - x^\delta_{\alpha n}), x^\delta_{\alpha n} -$$
$$- P_n x^\delta_\alpha \rangle + \alpha \langle B x^\delta_\alpha, P_n x^\delta_\alpha - x^\delta_\alpha \rangle + \langle f_\delta, x^\delta_\alpha - P_n x^\delta_\alpha \rangle \geqslant 0.$$

Отсюда следует

$$\langle A(x^\delta_\alpha) - A(P_n x^\delta_\alpha), x^\delta_{\alpha n} - P_n x^\delta_\alpha \rangle + \langle A(x^\delta_\alpha), P_n x^\delta_\alpha \rangle + \alpha \langle B x^\delta_\alpha - B P_n x^\delta_\alpha, x^\delta_{\alpha n} -$$
$$- P_n x^\delta_\alpha \rangle + \langle f_\delta, x^\delta_\alpha - P_n x^\delta_\alpha \rangle \geqslant \alpha \langle B(x^\delta_{\alpha n} - P_n x^\delta_\alpha), x^\delta_{\alpha n} - P_n x^\delta_\alpha \rangle \qquad (6)$$

или

$$\| x^\delta_{\alpha n} - P_n x^\delta_\alpha \| (\| A(x^\delta_\alpha) - A(P_n x^\delta_\alpha) \| + \alpha \| B x^\delta_\alpha \|) + \| x^\delta_\alpha - P_n x^\delta_\alpha \| \times$$
$$\times (\| A(x^\delta_\alpha) \| + \| f_\delta \|) + \alpha \langle B P_n x^\delta_\alpha, - x^\delta_{\alpha n} + P_n x^\delta_\alpha \rangle \geqslant \alpha \| x^\delta_{\alpha n} - P_n x^\delta_\alpha \|^2.$$

Из свойства аппроксимации оператора $B$ вытекает

$$\langle B P_n x^\delta_\alpha, P_n x^\delta_\alpha - x^\delta_{\alpha n} \rangle = \langle P_n^* B P_n x^\delta_\alpha, - x^\delta_{\alpha n} + P_n x^\delta_\alpha \rangle \leqslant \mathrm{const} \| x^\delta_{\alpha n} - P_n x^\delta_\alpha \|.$$

Из двух последних неравенств следует свойство ограниченности $\{x^\delta_{\alpha n}\}$. Пусть $x^\delta_{\alpha n}$ слабо сходится к $\tilde{x}^\delta_\alpha \in X$. В силу выпуклости и замкнутости множества $K$ будем иметь $\tilde{x}^\delta_\alpha \in K$. Легко видеть, что

$$\langle A(x_n) + \alpha B x_n - f_\delta, x_n - x^\delta_{\alpha n} \rangle \geqslant 0 \quad \forall x_n \in K_n.$$

Так как $P_n^* B P_n x \to Bx$ для любого $x \in K$, то из последнего вариационного неравенства получаем

$$\langle A(x) + \alpha B x - f_\delta, x - \tilde{x}^\delta_\alpha \rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in K.$$

Тогда $\tilde{x}^\delta_\alpha = x^\delta_\alpha$ и вся последовательность $\{x^\delta_{\alpha n}\}$ слабо сходится к $x^\delta_\alpha$. Сильная сходимость этой последовательности вытекает из соотношения (6). Теорема доказана.

3. Пример. Рассмотрим задачу минимизации функционала $\varphi(u) - \langle f_0, u\rangle$ на множестве $K \subset L_p(\Omega)$, где $\Omega$ — некоторая открытая область с достаточно гладкой границей $\Gamma$, $K$ — замыкание в метрике $L_p(\Omega)$ множества

$$\{a(x) \in L_p(\Omega), \quad D^r u(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad 0 \leqslant |r| \leqslant m-1\}, \tag{7}$$
$$\{0 < u_1(x) \leqslant u(x) \leqslant u_2(x), \ x \in \Omega\},$$

$D^r u$ — производная порядка $|r|$ в смысле распределения по направлению внутренней нормали функции $u$ (на $\Gamma$), $u_i(x)$ — фиксированные функции из $C(\bar{\Omega})$, $f_0 \in L_q(\Omega)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Для функционала $\varphi$ потребуем выполнения условий выпуклости и дифференцируемости по Гато. Легко видеть, что $K$ является выпуклым и замкнутым множеством. Тогда для решения поставленной задачи следует решить вариационное неравенство

$$\langle A(u) - f_0, u - u_0\rangle \geqslant 0 \quad \forall u \in K,$$

где $A$ — производная по Гато функционала $\varphi$. Рассмотрим оператор $Bu = Du$, $Du = \sum\limits_{1 \leqslant |\beta| \leqslant 2m} \alpha_\beta(x) D^\beta u$, $\alpha_\beta(x) \in C(\bar{\Omega})$, $(-1)^m \sum\limits_{|\beta| = 2m} a_\beta(x)\xi^\beta \geqslant |\xi|^{2m}$ для любого $x \in \bar{\Omega}$ и $\xi \in R^n$ с областью определения $D(B)$, являющейся замыканием в метрике $W_q^{2m}(\Omega)$ множества функций из $C^{2m}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющих условию (7); $q > 1$ при $n - 2m \leqslant 0$, и $q >_2 n/(n+2m)$, если $n - 2m > 0$. В силу непрерывного вложения $W_q^{2m}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ имеем, что $K$ тоже является замкнутым в $W_q^{2m}(\Omega)$. Поэтому $K \subset D(B)$. Доказательство сильной монотонности $B$ приведено в [8].

Отметим, что такой результат для линейных интегральных уравнений в пространстве $L_2(a, b)$ приведен в [1]. Поэтому полученный результат можно рассматривать как его обобщение на более сложные задачи в банаховых пространствах $L_p(\Omega)$.


1. *Тихонов А. Н., Арсенин В. С.* Методы решения некорректных задач.— М. : Наука, 1979.— 288 с.
2. *Рязанцева И. П.* О решении вариационных неравенств с монотонными операторами методом регуляризации // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1983.— 23, № 3.— С. 479—483.
3. *Рязанцева И. П.* Вариационные неравенства с монотонными операторами на множествах, заданных приближенно / Там же.— 1984.— 24, № 6.— С. 932—936.
4. *Альбер Я. И., Нотик А. И.* О минимизации функционалов и решений вариационных неравенств в банаховых пространствах // Докл. АН СССР.— 1986.— 290, № 3.— С. 2521—2525.
5. *Танана В. М.* Методы решения операторных уравнений.— М. : Наука, 1981.— 161 с.
6. *Browder F. E.* Nonlinear maximal monotone mappings in Banach spaces // Math. Ann.— 1968.— 175.— P. 81—113.
7. *Лисковец О. А.* Регуляризация задач с разрывными монотонными произвольно возмущенными операторами // Докл. АН СССР.— 1983.— 272, № 1.— С. 30—43.
8. *Павленко В. Н.* Нелинейные уравнения с разрывными операторами в банаховых пространствах // Укр. мат. журн.— 1979.— 31, № 5.— С. 569 — 572.


Получено 17.11.89