УДК 519.21

Д. АЛИМОВ, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

Замечание о предельных распределениях интегральных функционалов от эргодического марковского процесса

Доказана теорема об асимптотическом поведении распределений интегральных функционалов от непериодического эргодического марковского процесса.

Доведена теорема про асимптотичну поведінку розподілів інтегральних функціоналів від неперіодичного марківського процесу.

Настоящая статья является продолжением работы [1]. Пусть $X(t)$ — однородный марковский эргодический непериодический процесс [2] со значениями в фазовом пространстве $(E, \mathscr{B})$. Для простоты будем считать E полным сепарабельным метрическим пространством, $\mathscr{B}$ — σ-алгеброй борелевских множеств, а процесс $X(t)$ стохастически непрерывным. Переходную вероятность процесса $X(t)$ обозначим через $P(t, x, A)$, $t \geqslant 0$, $x \in E$, $A \in \mathscr{B}$, а инвариантное распределение вероятностей через $\pi(A)$, $A \in \mathscr{B}$.

Пусть, как и в [1], $\mathscr{B}$-измеримые функции $v_n(x)$ таковы, что

$$v_n(x) \geqslant v_{n+1}(x), \lim_{n\to\infty} v_n(x) = 0$$

$$\int_E \pi(dx)\, v_1(x) < \infty.$$

В [1] показано, что существует последовательность $\varepsilon_n \downarrow 0$ такая, что

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ t\to\infty \\ t\varepsilon_n \to c}} \mathrm{P}_x \left[e^{-\int_0^t v_n(X(s))ds} f(X(s)) \right] = e^{-c} \int_E \pi(dy) f(y) \qquad (1)$$

для всех $x \in E$ и всех непрерывных ограниченных функций f. Обозначим для краткости

$$\xi_n(t) = \int_0^t v_n(X(s))\, ds$$

и рассмотрим предельное поведение совместного распределения величин $\xi_n(t/\varepsilon_n)$, $f(X(t/\varepsilon_n))$.

Частично ответ на это дан в [1]. Именно: если последовательность функций $h_n(x) = v_n(x) / \int_E v_n(y)\, \pi(dy)$ равномерно π-интегрируема, то $\xi_n(t/\varepsilon_n)$ сходится по вероятности к t для всех $t > 0$.

В этой статье мы опишем все возможные предельные распределения для $\xi_n(t/\varepsilon_n)$. Обозначим через $\mathbb{C}$ класс всех непрерывных ограниченных функций на E. Справедлива такая **теорема.**

Теорема 1. *Для всякой неограниченной последовательности натуральных чисел можно указать:*

i) подпоследовательность $n' \to \infty$;

ii) числа $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$;

iii) меру $\Pi(dy) \geqslant 0$ *на* $(0, \infty)$ *с* $\int\limits_0^\infty (y \wedge 1)\Pi(dy) < \infty$, *такие, что*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_x [e^{-\lambda\xi_{n'}(t/\varepsilon_{n'})} f(X(t/\varepsilon_{n'}))] = e^{-tk(\lambda)} \int\limits_E \pi(dy) f(y) \qquad (2)$$

для всех $x \in E,\ t > 0,\ \lambda > 0,\ f \in \mathbf{C}$, *где*

$$k(\lambda) = b + a\lambda + \int\limits_0^\infty (1 - e^{-\lambda y})\Pi(dy). \qquad (3)$$

Доказательство. Заменяя в (1) функции $v_n(x)$ на функции $\lambda v_n(x)$, получаем, что для каждого $\lambda > 0$ существует последовательность $\varepsilon_n(\lambda) \downarrow 0$ такая, что

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ t\to\infty\\ t\varepsilon_n(\lambda)\to c}} \mathbf{P}_x [e^{-\lambda\xi_n(t)} f(X(t))] = e^{-c} \int\limits_E \pi(dy) f(y) \qquad (4)$$

для всех $x \in E,\ \lambda > 0,\ f \in \mathbf{C}$.

Более того, как указано в [1], существует распределение вероятностей ρ на $(E, \mathcal{B})$ и момент марковского вмешательства τ такой, что $0 < \mathbf{P}_\rho \tau < \infty$, и

$$\varepsilon_n(\lambda) \backsim \frac{1}{\mathbf{P}_\rho \tau} \mathbf{P}_\rho [1 - e^{-\lambda\xi_n(\tau)}] \text{ при } n \to \infty. \qquad (5)$$

Введем в рассмотрение класс $\mathcal{K}$, состоящий из функций $k(\lambda)$ вида (3). Обозначим

$$k_n(\lambda) = \int\limits_0^\infty (1 - e^{-\lambda y})\Pi_n(dy), \qquad (6)$$

где $\Pi_n(dy) = C_n \mathbf{P}_\rho \{\xi_n(\tau) \in dy\},\ 1/C_n = \mathbf{P}_\rho [1 - e^{-\xi_n(\tau)}]$.

Ясно, что $k_n(\cdot) \in \mathcal{K}$, и что $k_n(1) = 1$. Кроме того, из (5) следует

$$\frac{\varepsilon_n(\lambda)}{\varepsilon_n} \backsim k_n(\lambda) \text{ при } n \to \infty \qquad (7)$$

для всех $\lambda > 0$.

Известно [3, с. 326], что из ограниченности последовательности функций $k_n(\lambda_0)$ из класса $\mathcal{K}$ при некотором $\lambda_0 > 0$ вытекает существование подпоследовательности $n' \to \infty$ такой, что $k_{n'}(\lambda) \to k(\lambda)$ для всех $\lambda > 0$, и предельная функция $k(\cdot)$ также входит в класс $\mathcal{K}$. Пусть n' — такая подпоследовательность, построенная по функциям (6). Покажем, что эта подпоследовательность удовлетворяет требованиям теоремы. В качестве $k(\lambda)$ из (2) рассмотрим функцию $k(\lambda) = \lim k_{n'}(\lambda)$.

Из (7) получаем

$$\frac{\varepsilon_{n'}(\lambda)}{\varepsilon_{n'}} \to k(\lambda).$$

Отсюда и из (4) следует (3), что и требовалось доказать. Непосредственным следствием теоремы 1 является такая теорема.

Теорема 2. *Если в условиях теоремы* 1 $b = 0$, *то совместное распределение величин*

$$\xi_{n'}(t/\varepsilon_{n'}), \quad X(t/\varepsilon_{n'})$$

слабо сходится к совместному распределению независимых величин $\eta(t)$, Y, *где* $\eta(t)$, $t \geqslant 0$,— *монотонный процесс с независимыми приращениями, для* *которого* $\eta(0) = 0$,

$$\mathbf{P}e^{-\lambda\eta(t)} = e^{-tk(\lambda)}, \quad \lambda \geqslant 0, \tag{8}$$

а $\mathbf{P}\{Y \in A\} = \pi(A)$.

В заключение заметим, что в условиях теоремы 2 конечномерные распределения пары $\{\xi_{n'}(t/\varepsilon_{n'}), X(t/\varepsilon_{n'})\}$ слабо сходятся к соответствующим конечномерным распределениям процесса $\{\eta(t), Y(t)\}$, где процесс $\eta(t)$ тот же, что и в (8), а процесс $Y(t)$ не зависит от него и является процессом с независимыми значениями.

1. *Алимов Д., Шуренков В. М.* Асимптотическое поведение обрывающихся марковских процессов близких к эргодическому // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 12.— С. 1701—1704.
2. *Шуренков В. М.* Эргодические процессы Маркова.— М. : Наука, 1989.— 336 с.
3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2-х т.— М. : Мир, 1967.— Т. 2.—752 с.

Получено 15.11.90