УДК 517.52

В. В. ВОЛЧКОВ, асп. (Донец. ун-т)

О функциях с нулевыми интегралами по кубам

Исследуется задача о существовании ненулевой функции, имеющей нулевые интегралы по данному набору кубов. Полученные результаты позволяют усилить ряд теорем классического анализа, в частности, теорему Мореры и теорему В. К. Дзядыка о геометрическом описании аналитических функций.

Досліджується задача про існування ненульової функції, яка має нульові інтеграли за даним набором кубів. Одержані результати дозволяють підсилити ряд теорем класичного аналізу, зокрема, теорему Морери та теорему В. К. Дзядика про геометричний опис аналітичних функцій.

1. Введение. Пусть D — компакт в вещественном евклидовом пространстве R^n. Рассмотрим следующую задачу: установить, когда существует функция $f \in L(D)$, $f \nsim 0$ (ненулевая) такая, что

$$\int_{K \subset D} f(u)\, du = 0 \tag{1}$$

для данного множества кубов K, лежащих в D. Рассмотрим случаи, когда это множество состоит из всех кубов, конгруентных данному, и когда оно содержит все сдвиги нескольких фиксированных кубов. Ранее эта задача изучалась во всем R^n (см. [1, 2] и имеющуюся там библиографию). В п. 2 настоящей статьи решена задача о наименьшем шаре D_r, на котором из условия (1) для любого единичного куба K следует, что $f \sim 0$ в D_r. В п. 3 получен подобный результат для множества всех кубов нескольких фиксированных размеров, лежащих в кубе D. Такого типа утверждения позволяют усилить теоремы классического анализа (см. в п. 4 усиление классической теоремы Мореры и известной теоремы В. К. Дзядыка). Отметим, что рассматриваемые вопросы тесно связаны с аппроксимацией функций в $L_p(D)$ и с задачей аналитического продолжения с контуров.

2. Задача о минимальном шаре. Пусть $D_r \subset R^n$ $(n \geqslant 2)$ — замкнутый шар радиуса $r \geqslant \sqrt{n}/2$.

Теорема 1. *Пусть $f \in L(D_r)$ и интеграл от f по любому единичному кубу из D_r равен нулю. Тогда:* 1) *если $r > \frac{1}{2}\sqrt{n+3}$, то $f = 0$ почти всюду в D_r;* 2) если $r < \frac{1}{2}\sqrt{n+3}$, *то существуют ненулевые функции с указанным условием.*

Доказательство начнем со случая 2. Если $r < \frac{1}{2}\sqrt{n+3}$, то легко видеть, что все единичные кубы в D_r имеют непустое пересечение — шар D, и можно положить $f=0$ на $D_r \setminus D$ и $\int\limits_D f=0$, но $f \neq 0$.

1. Пусть $n=2$. Нам понадобятся следующие простые утверждения, которые уже использовались в предшествующих работах.

а) Не умаляя общности, можно считать, что $f \in C^\infty$. Если $\exists f \neq 0$ с условием (1), то можно подобрать финитную функцию $\varphi \in C^\infty$ так, чтобы $f*\varphi \neq 0$ и удовлетворено (1) в немного меньшей области $D^{r}{}_{-\varepsilon}$, $r-\varepsilon > \frac{1}{2}\sqrt{n+3}$.

б) Смешанная разность от f по вершинам любого единичного квадрата из D_r равна 0.

Достаточно продифференцировать по x и y равенство

$$\int\limits_x^{x+1}\int\limits_y^{y+1} f(u, v)\, du dv = 0.$$

в) Все производные от f и каждое слагаемое ее ряда Фурье

$$f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi) \sim \sum f_m(\rho)\, e^{im\varphi}$$

удовлетворяют условию теоремы (ρ, φ — полярные координаты).

Действительно, $\forall t \in R^1$ и любого единичного квадрата K из D_r

$$\int\limits_K f(x\cos t - y\sin t,\quad x\sin t + y\cos t)\, dxdy = 0.$$

Умножая на e^{-imt} и интегрируя от 0 до 2π, получаем (изменив порядок интегрирования):

$$\int\limits_K f_m(\rho)\, e^{im\varphi}\, dxdy = 0.$$

Утверждение для производных от f очевидно.

г) Если $f_m(\rho)\, e^{im\varphi} \in C^1(D_r)$ удовлетворяет условию теоремы, то этому же условию удовлетворяют функции

$$(f_m'(\rho) \pm m f_m(\rho)\, \rho^{-1})\, e^{i(m\mp1)\varphi}.$$

Это следует из утверждения в) и следующего тождества:

$$(f_m(\rho)\, e^{im\varphi})_x' = \left(f_m'(\rho) + \frac{m}{\rho} f_m(\rho)\right) e^{i(m-1)\varphi} + \left(f_m'(\rho) - \frac{m}{\rho} f_m(\rho)\right) e^{i(m+1)\varphi}.$$

Дальнейшему доказательству теоремы 1 предпошлем лемму.

Лемма. *Если f радиальна, т. е. $f(u) = f_0(|u|)$, и удовлетворяет условию теоремы, то $f=0$ в D_r.*

Доказательство. Вместе с функцией f ее производные f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy} удовлетворяют утверждению теоремы, и значит, смешанная разность от этих функций по вершинам квадратов равна нулю (см. б)). Но если $f(u) = f_0(|u|) = f_0(\rho)$, то функция

$$f_y = f_0'(\rho)\, y/\rho = yg(\rho)$$

является нечетной по y и четной по x. Рассмотрим квадрат K_0 с вершинами

$$A_0\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right),\quad B_0\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\quad C_0\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\quad D_0\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right).$$

Пусть K_x — квадрат, полученный из K_0 параллельным переносом на вектор $(x;\ 0)$, где $x \in [-1/2,\ 1/2]$, а A, B, C, D — его вершины. Точки, симметричные относительно оси ординат точкам A и B', обозначим соответственно через A' и B'. В силу сказанного выше для функции f_y справедливы равенства

$$f_y(A)-f_y(B)=f_y(D)-f_y(C);$$
$$f_y(B)=-f_y(A); \qquad f_y(C)=-f_y(D);$$
$$f_y(B)=f_y(B'); \qquad f_y(A)=f_y(A').$$

Отсюда $f_y(B')=f_y(C)$, или $g(B')=g(C)$, или

$$g\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-x\right)^2}\right)=g\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}+x\right)^2}\right), \quad |x|\leqslant\frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Очевидно, функция $\Delta f=f_{xx}+f_{yy}=2g(\rho)+\rho g'(\rho)$ радиальна и $(\Delta f)'_y=$ $=yg_1(\rho)$, где $g_1(\rho)=g''(\rho)+3g'(\rho)\rho^{-1}$.
В силу изложенного выше

$$g_1\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\right)=g_1\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\right), \quad |x|\leqslant\frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Пусть $\varphi_\pm(x)=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(x\pm\frac{1}{2}\right)^2}$. Дифференцируя (2), выражаем $g'(\varphi_-)$ и $g''(\varphi_-)$ через $g'(\varphi_+)$ и $g''(\varphi_+)$ и подставляем в (3). Получаем линейное дифференциальное уравнение

$$(\ln g'(\varphi_+(x)))'=-6x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1/2}+\frac{x+1/2}{(x+1/2)^2+1/4}.$$

Решая его, находим

$$g'(\varphi_+(x))=ce^{-3x^2}\left(\frac{1}{2}-x\right)|x|\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}, \quad |x|<\frac{1}{2}.$$

Учитывая равенство

$$g'(\varphi_+(x))\varphi'_+(x)=g'(\varphi_-(x))\varphi'_-(x),$$

которое получается из (2), получаем

$$ce^{-3x^2}\left(\frac{1}{2}-x\right)|x|\varphi_+(x)\varphi'_+(x)=ce^{-3x^2}\left(\frac{1}{2}+x\right)|x|\varphi_-(x)\varphi'_-(x).$$

Последнее равенство возможно лишь при $c=0$. Поэтому $g'(\rho)=0$ при $\frac{1}{2}<\rho<\frac{1}{2}\sqrt{5}$ и $\Delta f=\text{const}$, а значит, $\Delta^2 f=0$ при $\frac{1}{2}<\rho<\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Передвигая квадрат K_0 вправо, получаем, что интеграл от $\Delta^2 f$ по любой вертикальной хорде круга радиуса 1/2 с центром в нуле равен нулю, а значит, и по любой хорде этого круга интеграл от $\Delta^2 f$ равен нулю ($\Delta^2 f$ радиальна). Используя формулу Радона, которая восстанавливает функцию, заданную в R^2, по ее интегралам вдоль прямых [3] получаем $\Delta^2 f\equiv 0$ в D_r, следовательно $\Delta f=\text{const}$ в D_r (так как $\Delta f=\text{const}$ при $1/2<|u|<$ $<\sqrt{5/2}$). Так как Δf удовлетворяет теореме, то $\Delta f\equiv 0$, значит, $\rho g'(\rho)+$ $+2g(\rho)\equiv 0$ и $g(\rho)=c\rho^{-2}$, откуда $f_0'(\rho)=c\rho^{-1}$ или $f_0(\rho)=c\ln\rho+c_1$.
Но равенство

$$c\int_K \ln|u|\,du+c_1=0, \quad \forall K\subset D_r,$$

как легко проверить, возможно лишь при $c=c_1=0$, и лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1. Если $f\neq 0$ удовлетворяет условию теоремы, то этому же условию удовлетворяют функции $f_m(\rho)e^{im\varphi}$

(см. в)). Если при некотором $m \in Z$ $f_m(\rho) e^{im\varphi} \neq 0$, с помощью утверждений г) и а) легко построить радиальную функцию $u \neq 0$, удовлетворяющую теореме, что противоречит лемме. Итак, все $f_m(\rho)$ нулевые и $f \sim 0$ в D_r.

Результат для R^n $(n \geqslant 3)$ получается индукцией следующим образом: сначала доказывается, что $f = 0$ в области $1/2 \leqslant |x| \leqslant r$, а затем применяется формула Радона, как и в случае $n = 2$.

3. Задача о минимальном кубе.

Теорема 2. *Пусть D — куб в R^n со сторонами d, $f \in L(D)$, и имеет нулевые интегралы по всем кубам в D со сторонами $a_1, \ldots, a_{n+1}$, параллельными сторонам D. Тогда:*

1. *Если числа $a_1, \ldots, a_{n+1}$ попарно несоизмеримы и $a_1 + \ldots + a_{n+1} \leqslant d$, то $f \sim 0$ в D.*

2. *Если среди чисел $a_1, \ldots, a_{n+1}$ есть пара соизмеримых, то существует ненулевая функция с указанным условием.*

3. *Существуют попарно несоизмеримые числа $a_1, \ldots, a_{n+1}$, для которых $a_1 + \ldots + a_{n+1} > d$, и первое утверждение теоремы не имеет места.*

Доказательство. Второе утверждение известно [4], а третье доказывается, как в теореме 1 (все кубы должны иметь непустое пересечение).

Докажем утверждение 1. Пусть $n = 1$. Тогда f периодична по a_1 и a_2 на отрезке длины $d \geqslant a_1 + a_2$. Продолжим f на R^1 с периодом a_1. Свертка f с индикатором отрезка длины a_2 имеет период a_1 и равна нулю на одном из периодов. Следовательно, f удовлетворяет теореме на всем R^1, откуда [4] $f \sim 0$. Предположим, что утверждение верно для любой размерности, меньшей n, и докажем его для $n \geqslant 2$. Пусть $d = a_1 + \ldots + a_{n+1}$, $D = [-d/2, d/2]^n$. Предположим, что $f \neq 0$. Из индуктивного предположения следует, что интеграл от f по некоторой грани одного из рассматриваемых кубов со стороной a_k отличен от нуля. Не ограничивая общности, можно считать, что эта грань ортогональна оси Ox_n. Далее, функция

$$h(x) = \int\limits_{[-a_k/2, a_k/2]^{n-1}} f(x_1 + t_1, \ldots, x_{n-1} + t_{n-1}, x_n)\, dt_1 \ldots dt_{n-1}$$

определена на $E = [-d/2, d/2] \times \left[-\frac{d - a_k}{2}, \frac{d - a_k}{2}\right]^{n-1}$, удовлетворяет теореме на E и периодична по x_n с периодом a_k. Продолжим h в $E_1 = [-(d - a_k)/2, (d - a_k)/2]^{n-1}$ по периоду. Тогда h, а следовательно, и каждое слагаемое ряда Фурье

$$h(x) \sim \sum_p h_p(x_1, \ldots, x_{n-1})\, e^{2\pi i x_m/a_k}$$

удовлетворяют теореме в E_1. Вычисляя интеграл от $h_p(x_1, \ldots, x_{n-1}) \times e^{2\pi i x_m/a_k}$ по кубу из E_1 со стороной a_ν $(\nu \neq k)$, в силу несоизмеримости чисел a_ν и индуктивного предположения получаем, что все $h_p \sim 0$, откуда $h \sim 0$, что противоречит определению h и выбору a_k.

4. Следствия. Из теоремы 1 и эквивалентности понятий замкнутости и полноты в банаховых пространствах вытекает такая теорема.

Теорема 3. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$. Тогда при $r \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{n+3}$ и только при таких r всякую функцию $f \in L_p(D_r)$ можно аппроксимировать с любой точностью в L_p линейными комбинациями индикаторов единичных кубов, лежащих в D_r.*

Далее, используя утверждение а) и формулу Грина, из теоремы 1 получаем следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть $B = \{z : |z| \leqslant 1\}$ и интеграл от f по границе любого квадрата из B со стороной d равен нулю. Тогда: 1) если $d < 2/\sqrt{5}$, то f голоморфна в B; 2) если $d > 2/\sqrt{5}$, то существуют неголоморфные функции с указанным условием.*

Из этого результата следует теорема 5.

Теорема 5. *Пусть $f \in C(B)$ и сужение f на границу любого квадрата из B со стороной d имеет аналитическое продолжение внутрь этого квадрата. Тогда:* 1) *если $d < 2/\sqrt{5}$, то f голоморфна в B;* 2) *если $d > 2/\sqrt{5}$, то существуют неголоморфные функции с указанным условием.*

Получим теперь усиление известной теоремы В. К. Дзядыка о геометрическом описании голоморфных функций [5].

Теорема 6. *Пусть B_r — круг радиуса $r > \frac{1}{2}\sqrt{5}$, $u, v \in C^2(B_r)$. Для того чтобы функция $u + iv$ была голоморфной в B_r, необходимо и достаточно, чтобы площади поверхностей графиков функций u, v, $\sqrt{u^2 + v^2}$, расположенные над любым единичным квадратом из B_r, были равны.*

Для доказательства достаточно заметить, что из теоремы 1 следует аналогичное свойство площадей над любым подмножеством B_r, а затем применить теорему В. К. Дзядыка.

В заключение отметим, что аналогично из теоремы 2 можно получить результаты, подобные теоремам 3—6 для квадратов нескольких фиксированных размеров.

1. *Zalcman L.* Analyticity and the Pompeiu problem // Arch. Ration. Mech. and Anal.— 1972.— 47.— P. 237—254.
2. *Волчков В. В.* О функциях с нулевыми интегралами по некоторым множествам // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1990.— № 8.— С. 9—11.
3. *Хелгасон С.* Преобразование Радона.— М. : Мир, 1983.— 152 с.
4. *Laird P. G.* A reconsideration of «there squares» problem // Aequat. math.— 1980.— **21**, N 1.— P. 98—104.
5. *Дзядык В. К.* Геометрическое определение аналитических функций // Успехи мат. наук.— 1960.— 15, вып. 1.— С. 191—194.

Получено **11.11.90**