УДК 515.164.174

Т. А. Курашвили, преп. (Сухум. фил. Тбил. ун-та)

КРУГЛЫЕ m-ФУНКЦИИ

Circular m-functions are introduced on smooth manifolds with boundary. The distribution of critical circles is studied. We construct an example of a four-dimensional manifold M^4 with the boundary ∂M^4 such that $\chi(\partial M^4) = \chi(M^4, \partial M^4) = 0$ and it does not contain our circular m-function. We prove that, for a manifold with the boundary M^n ($n \geq 5$) such that $\chi(\partial M^n) = \chi(M^n, \partial M^n) = 0$, there always exists a circular m-function with no critical points in the interior manifold.

Вводяться круглі m-функції на диференційованих многовидах з краєм і досліджується розподіл критичних кіл. Побудовано приклад чотиривимірного многовиду M^4 з краєм ∂M^4, що задовольняє умову $\chi(\partial M^4) = \chi(M^4, \partial M^4) = 0$, на якому не існує круглої m-функції. Доведено, що на многовиді з краєм M^n, $n \geq 5$, у якого $\chi(\partial M^n) = \chi(M^n, \partial M^n) = 0$, завжди існує кругла m-функція без критичних точок у внутрішньому многовиді.

Пусть M^n — гладкое компактное многообразие с краем ∂M^n, $f\colon M^n \to \mathbb{R}^1$ — функция из класса C^2. Предположим, что $f|\operatorname{Int} M^n$ и $f|\partial M^n$ имеет только невырожденные критические точки. Тогда говорят, что f является m-функцией. Заметим, что на краю многообразия ∂M^n критических точек функция f не имеет. Такие функции по существу начал изучать М. Морс [1], а затем их строение детально исследовалось в [2–4]. Ряд важных теорем относительно m-функций было получено в диссертации Х. Асвада.

Р. Ботт в работе [5] определил класс функций на многообразии, у которых критические точки образуют гладкие подмногообразия и сужения таких функций на маленький трансверсальный диск к каждой точке критического подмногообразия являются функциями Морса. Теперь эти функции называют функциями Ботта. В последнее время интенсивно изучаются те функции Ботта, у которых критические точки объединены в непересекающиеся окружности. Как показал А. Т. Фоменко, в первую очередь это тесно связано с нахождением интегралов гамильтоновых систем [6]. Далее, для динамических систем Морса - Смейла без состояний равновесия такие функции являются функциями Ляпунова. Следуя сложившейся традиции эти функции называются круглыми функциями Морса. Подробную информацию о них можно найти в [7].

В настоящей работе введены круглые m-функции на глдких многообразиях, т. е. функции, сужение которых на внутренность и край многообразия является круглыми функциями Морса. Доказано ряд фактов, проясняющих их строение.

1. Подготовительные построения. Пусть W^n — гладкое компактное многообразие с краем ∂W^n, $f\colon (W^n, \partial W^n) \to \{[0,1], 0\}$ — гладкая функция, $K(f)$ — множество ее критических точек. Функция f называется круглой функцией Морса, если $K(f) \cap \partial W^n \neq \varnothing$, $\operatorname{corank}_{x \in K(f)}(f) = 1$, $K(f)$ состоит из непересекающихся окружностей.

Определение 1. *Пусть $f\colon M^n \to \mathbb{R}^1$ — гладкая функция из класса C^2 на компактном многообразии с краем ∂M^n. Будем говорить, что f — круглая m-функция, если*

$$f_1 = f|\operatorname{Int} M^n \quad и \quad f_2 = f|\partial M^n$$

являются круглыми функциями Морса и f не имеет критических точек на ∂M^n. Круглые m-функции, как и круглые функции Морса, существуют не на всяком многообразии.

Простой пример круглой m-функции получается следующим образом. Пусть (M^n, N^{n+1}, S^1, π) — расслоение над многообразием с краем M^n со слоем S^1, $\pi: N^{n+1} \to M^n$. Рассмотрим m-функцию $f: M^n \to \mathbb{R}^1$. В силу теоремы Янковского и Рубинштейна [2] m-функции существуют на каждом гладком многообразии с краем. Образуем функцию $g = f \circ \pi$ на многообразии с краем N^{n+1}. Очевидно, что g — m-функция на N^{n+1}. Следующая теорема принадлежит С. И. Цешковскому.

Теорема 1. *Пусть M^n, $n \geq 5$, — гладкое компактное многообразие с краем ∂M^n. Предположим, что $\chi(M^n) = \chi(\partial M^n) = 0$. Тогда на многообразии M^n существует круглая m-функция ($\chi(M^n)$ — эйлерова характеристика многообразия M^n).*

Морган показал [8], что существуют примеры трехмерных замкнутых многообразий, на которых нельзя построить круглых функций Морса, несмотря на то, что эйлерова характеристика трехмерных многообразий всегда равна нулю. Используя этот факт, докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Существуют четырехмерные многообразия с краем, которые удовлетворяют условиям теоремы 1, но на них не существует круглая m-функция.*

Доказательство. Пусть M^3 — замкнутое многообразие Моргана, на котором не существует круглая функция Морса. Поскольку $\Omega(M^3) = 0$, существует четырехмерное многообразие N^4 с краем, диффеоморфным M^3. Для связной суммы четырехмерных многообразий справедлива формула для подсчета эйлеровой характеристики

$$\chi(M^4 \# N^4) = \chi(M^4) + \chi(N^4) - 2.$$

Из результатов работы Ликориша [9] следует, что $\chi(N^4) > 0$. Поскольку $\chi(CP^2) = 3$, $\chi(S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1) = 0$, то, выбрав подходящее число четырехмерных торов и одного экземпляра CP^2 и взяв их связную сумму с многообразием N^4, получим многообразие $\tilde{N}^4$ с $\chi(\tilde{N}^4) = 0$. Очевидно, что многообразие $\tilde{N}^4$ не допускает круглых m-функций. Лемма 1 доказана.

Предположим, что на многообразии M^n задана круглая m-функция $f: M^n \to \mathbb{R}^1$. Зафиксируем на M^n риманову метрику и рассмотрим векторное поле $\operatorname{grad} f$. Рассмотрим критическую точку $x_0 \in \partial M^n$ для функции $f_2 = f | \partial M^n$. В этой точке вектор $\operatorname{grad} f \neq 0$ и он может быть направлен либо во внутрь многообразия, либо во вне. Следовательно, на каждой критической окружности функции f_2 задано ненулевое векторное поле, и этой окружности мы можем приписать число $+1$, если векторное поле направлено во внутрь многообразия, и -1 — в противном случае. Далее каждой критической окружности как функции $f_1 = f | \operatorname{Int} M^n$, так и функции f_2 приписывается ее индекс. И, наконец, если S^1 — критическая окружность индекса λ для f_1 (f_2), то существует система координат в окрестности S^1 в $\operatorname{Int} M^n$ (в ∂M^n) одного из двух типов:

а) тривиальная $\nu: S^1 \times D^n(\varepsilon) \to \operatorname{Int} M^n$ ($\bar{\nu}: S^1 \times D^{n-1}(\varepsilon) \to \partial M^n$), где

$D^n(\varepsilon)$ $(D^{n-1}(\varepsilon))$ — диск радиуса ε, $\nu(S^1 \times 0) = S^1$ — критическая окружность и

$$f_1(\nu(\theta, x)) = -x_1^2 - \ldots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \ldots + x_n^2$$

для $(\theta, x) \in S^1 \times D^n(\varepsilon)$,

$$(\,\overline{\nu}(S^1 \times 0) = S^1,\ f_2(\,\overline{\nu}(\theta, x)) = -x_1^2 - \ldots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \ldots + x_{n-1}^2$$

для $(\theta, x) \in S^1 \times D^{n-1}(\varepsilon)$);

б) скрученная $\tau\colon ([0,1] \times D^n(\varepsilon)/\sim) \to \operatorname{Int} M^n$, где τ — гладкое вложение такое, что $\tau([0,1] \times 0/\sim) = S^1$ (критическая окружность)

$$\left(\ \overline{\tau}\colon ([0,1] \times D^{n-1}(\varepsilon)/\sim) \to \partial M^n,\quad \overline{\tau}([0,1] \times 0/\sim) = S^1\right)$$

и

$$f_1(\tau(t, x)) = -x_1^2 - \ldots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \ldots + x_n^2$$

$$(f_2(\,\overline{\tau}(t, x)) = -x_1^2 - \ldots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \ldots + x_{n-1}^2)$$

для

$$(t, x) \in [0,1] \times D^n(\varepsilon)/\sim$$

$$\left(\ (t, x) \in [0,1] \times D^{n-1}(\varepsilon)/\sim\ \right).$$

Здесь $[0,1] \times D^n(\varepsilon)/\sim$ $([0,1] \times D^{n-1}(\varepsilon)/\sim)$ диффеоморфно $S^1 \times D^n(\varepsilon)$ $(S^1 \times D^{n-1}(\varepsilon))$ с помощью отождествления $(0 \times D^n(\varepsilon))$ и $(1 \times D^n(\varepsilon))$ $\left((0 \times D^{n-1}(\varepsilon)) \text{ и } (1 \times D^{n-1}(\varepsilon)\right)$ посредством отображения

$$(0, x_1, \ldots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \ldots, x_n) \sim (1, -x_1, \ldots, x_\lambda, -x_{\lambda+1}, \ldots, x_n)$$

$$\left(\ (0, x_1, \ldots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \ldots, x_{n-1}) \sim (1, -x_1, \ldots, x_\lambda, -x_{\lambda+1}, \ldots, x_{n-1})\ \right).$$

В первом случае критическая окружность приписывается 0, во втором — $\overline{0}$. Таким образом, каждая критическая окружность функции f_1 (f_2) определяет тройку $(\pm 1, \lambda, 0)$ или тройку $(\pm 1, \lambda, \overline{0})$.

С критическими окружностями функций f_1 и f_2 можно связать круглые ручки. Для функции f_1 ситуация аналогична обычным круглым функциям и она описана в книге [10]. Для функции f_2 необходимы дополнительные рассуждения.

Ручки, соответствующие критической окружности $(-1, \lambda, 0)$, изменяют поверхность уровня функции f с точностью до гомотопического типа на приклеенную клетку индекса λ, умноженную на окружность. Ручки, соответствующие критической окружности $(+1, \lambda, 0)$, с точностью до гомотопического типа не изменяют поверхность уровня функции f.

2. Связь между числом критических окружностей и гомологиями многообразия. Из теории круглых функций Морса известно, что пару независимых критических точек индексов λ и $\lambda + 1$ можно заменить одной критической окружностью индекса λ с тривиальной системой координат. Пару критических точек индексов λ и $\lambda+1$, у которых средняя и косредняя сферы пересекаются в точности в двух точках с индексом пересечения, равным 2, можно заменить одной критической окружностью индекса λ со скрученной системой координат [10]. Аналогичный факт имеет место для критических точек индексов λ и $\lambda+1$ для сужения функции по краю многообразия в предположении, что grad f в этих точках направлен в одну и ту же сторону. В. В. Шарко разработал технику диаграмм [10] для изучения круглых функций Морса. С небольшими изменениями эта техника пригодна и для изучения круглых m-функций.

Известно, что критические окружности функции $f_1 = f|\operatorname{Int}M^n$ связаны с группой гомологий $H_*(M, \partial M, \mathbb{Z})$, а критические окружности функции $f_2 = f|\partial M^n$ — с группой гомологий $H_*(\partial M, \mathbb{Z})$.

Далее, можно показать, что критическую окружность индекса $\lambda+1$ с тривиальной системой координат функции $f_1 = f|\operatorname{Int}M^n$ можно заменить критическими окружностями $(+1, \lambda, 0)$, $(-1, \lambda+1, 0)$ функции $f_2 = f|\partial M^n$, т. е. понятие минимальной m-функции можно определить следующим образом.

Определение 2. *Круглая m-функция f на многообразии называется минимальной, если во внутренности у нее нет критических окружностей, а количество критических окружностей индекса λ на краю минимально возможное для всех λ.*

Теорема 2. *Пусть M^n — гладкое компактное многообразие с краем ∂M^n, $n \geq 7$, $\chi(M^n, \partial M^n) = \chi(\partial M^n) = 0$. Тогда на M^n существует круглая m-функция без критических окружностей в $\operatorname{Int} M^n$.*

Доказательство. Из [4] следует, что на M^n всегда существует m-функция без критических точек во внутренности. Пусть M_λ^- и M_λ^+ — числа критических точек индекса λ типов (-1) и $(+)$ соответственно. Покажем, что $\sum(-1)^\lambda M_\lambda^+ = 0$. Действительно, используя прием Фридриха [3], можно заменить каждую критическую точку индекса $(\lambda, +)$ на одну внутреннюю индекса $\lambda+1$ и одну точку, лежащую в крае индекса $(\lambda, -)$. Так как $\chi(M, \partial M) = 0$, то $\sum(-1)^\lambda M_\lambda^+ = 0$. Далее,

$$0 = \sum(-1)^\lambda \left(M_\lambda^+ + M_\lambda^-\right) = \sum(-1)^\lambda M_\lambda^+ + \sum(-1)^\lambda M_\lambda^-.$$

Отсюда получаем, что $\sum(-1)^\lambda M_\lambda^- = 0$. Следовательно, используя результаты работы [10], можно разбить все ручки края на независимые пары одинаковых типов и заменить каждую такую пару на круглую ручку. Тем самым мы построим некоторую круглую m-функцию без критических окружностей в $\operatorname{Int} M^n$.

Теорема 3. *Пусть M^n — гладкое компактное многообразие с краем ∂M^n, $n \geq 7$, $\pi_1(M^n) = \pi_1(\partial M^n) = 0$; $H_2(M, \mathbb{Z})$, $H_1(\partial M, \mathbb{Z})$ — свободные группы без кручения. Кроме того,*

$$\chi(\partial M) = \chi(M) = \sum(-1)^\lambda \mu\left(H_\lambda(M, \partial M)/\operatorname{Ker}\partial_\lambda\right) = 0.$$

Тогда на M существует круглая m-функция Морса с числом критических окружностей индекса λ, равным $p(\chi_\lambda^1) + p(\chi_\lambda^2)$.

$$\chi_\lambda^1 = \sum_{j=0}^{\lambda}(-1)^{\lambda+j}\mu\left(H_{j+1}(M,\partial M)\right),$$

$$\chi_\lambda^2 = \sum_{j=0}^{\lambda}(-1)^{\lambda+j}\Big(\mu(H_j(\partial M)) + \mu\left(H_j(M,\partial M)\right) -$$

$$- 2\,\mu\left(H_{j+1}(M,\partial M)/\operatorname{Ker}\partial_{j+1}\right)\Big),$$

$$\rho(a) = \frac{|a| + a}{2}.$$

Доказательство. Рассмотрим точную гомологическую последовательность пары

$$H_i(\partial M) \to H_i(M) \to H_i(M,\partial M) \xrightarrow{\partial_i} H_{i-1}(\partial M).$$

Из двойственности Пуанкаре вытекает, что $H_i(M,\partial M)$ — свободные абелевы группы, следовательно, гомоморфизм ∂_i отображает группу $H_2(M,\partial M)$ на прямое слагаемое группы $H_{i-1}(\partial M)$.

Всегда существует такая m-функция $f\colon M \to R^1$, у которой $c_\lambda^+(f) = \mu H_\lambda(M,\partial M)$, $D_\lambda^-(f) = \mu H_\lambda(\partial M)$, $D_\lambda^+(f) = 0$. (Здесь c_λ — число внутренних критических точек, а D_λ^- и D_λ^+ — числа критических точек, лежащих в крае индексов $(\lambda,-)$ и $(\lambda,+)$ соответственно.)

Те внутренние критические точки индекса λ, которые соответствуют при гомоморфизме ∂_λ прямому слагаемому в $H_{\lambda-1}(\partial M)$, можно заменить на критические точки индекса $(\lambda-1,+)$, убрав такое же число критических точек индекса $(\lambda-1,-)$.

Далее, чтобы уничтожить все оставшиеся внутренние критические точки индекса λ $\Big($а их осталось $\mu\left(H_\lambda(M,\partial M)\right) - \mu\left(H_{\lambda+1}(M,\partial M)/\operatorname{Ker}\partial_\lambda\right)\Big)$, введем в край столько же пар взаимно сокращающихся точек типа $(-)$ индексов λ и $\lambda-1$. После уничтожения оставшихся внутренних точек точки индекса $(\lambda-1,-)$ станут точками $(\lambda-1,+)$. Эту процедуру можно выполнить для всех $0 \le \lambda \le n$, после чего на M возникает m-функция $g\colon M \to R$, у которой $c_\lambda(g) = 0$,

$$D_\lambda^+(g) = \mu\left(H_{\lambda+1}(M,\partial M)\right),$$

$$D_\lambda^-(g) = \mu H_\lambda(\partial M) + \mu H_\lambda(M,\partial M) - 2\,\mu\left(H_{\lambda+1}(M,\partial M)/\operatorname{Ker}\partial_{\lambda+1}\right):$$

Так как $\chi(\partial M) = \chi(M) = 0$ и

$$\sum_{\lambda=0}^{n}(-1)^\lambda\mu\left(H_\lambda(M,\partial M)/\operatorname{Ker}\partial_\lambda\right) = 0,$$

то мо: :но все критические точки заменить критическими окружностями с тривиальными системами координат.

Воспользовавшись формулами из [10] для подсчета числа окружностей, получим, что число критических окружностей типа $(+1, \lambda, 0)$ есть $p\left(\chi_\lambda^1\right)$, где

$$\chi_\lambda^1 = \sum_{j=0}^{\lambda}(-1)^{\lambda+j}\mu\left(H_{j+1}(M, \partial M)\right)$$

а $\rho(a) = \dfrac{|a| + a}{2}$.

Число критических окружностей типа $(-1, \lambda, 0)$ равно $p\left(\chi_\lambda^2\right)$, где

$$\chi_\lambda^2 = \sum_{j=0}^{\lambda}(-1)^{\lambda+j}\left(\mu H_j(\partial M)\right) + \mu\left(H_j(M, \partial M)\right) -$$

$$- 2\mu\left(H_{j+1}(M, \partial M) / \operatorname{Ker}\partial_{j+1}\right).$$

1. *Morse M.* The calculus of variations in the large. – New York, 1934. – 352 p.
2. *Jankowski A., Rubinstejn R.* Funktions with non-degenerated critical points on manifolds with boundary // Comment. Math. – 1972. – **16**. – P. 97 – 112.
3. *Friedrich F.* m-Funktionen und ihre Andwendung auf die totale Absolutkrummung // Math. Nachr. – 1975. – **19**. – S. 281 – 301.
4. *Hajduk B.* Minimal m-funktions // Fund. math. – 1981. – **110**, № 3. – P. 178 – 200.
5. *Bott B.* Lecture on Morse theory // Bull. Amer. Math. Soc. – 1982. – **7**, № 2. – P. 331 – 358.
6. *Фоменко А. Т.* Симплектическая геометрия. Методы и приложения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 413 с.
7. *Franks J.* The behavior of non-singular Morse - Smale flows // Comment. math. helv. – 1978. – **53**, № 2. – P. 279 – 294.
8. *Morgan J.* Non-singular Morse – Smale flows on 3-dimensional manyfold // Topology. – 1978. – **18**. – P. 531 – 540.
9. *Lickorish W.* A representation of orientable combinatorial 3-manifold // Ann. Math. – 1962. – **76**, № 2. – P. 531 – 540.
10. *Шарко В. В.* Функции на многообразиях. – Киев: Наук. думка, 1990. – 196 с.

Получено 25.02.92