УДК 62—50

М. М. Копец

Синтез оптимальной линейной системы с запаздыванием в гильбертовом пространстве

Пусть поведение системы описывается в гильбертовом пространстве H уравнением

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t), \tag{1}$$

где A_0 и A_1 — линейные, вообще говоря, неограниченные операторы в пространстве H, причем оператор A_0 замкнут, имеет всюду плотную в H область определения $D(A_0)$ и является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $S_1(t)$, оператор A_1 подчинен оператору A_0 (см. [1, 2, с. 182]). Оператор B является линейным ограниченным оператором, действующим из гильбертового пространства H_1 в H, значения функций $x(t)$ и $u(t)$ принадлежат соответственно пространствам H и H_1, под производной функции $x(t)$ понимаем ее сильную производную. Уравнение (1) рассматривается на временном интервале $[t_0, T]$, величина $h > 0$ характеризует время запаздывания. Начальные условия для уравнения (1) заданы следующим образом:

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0], \tag{2}$$

где $\varphi(t) \in L_2((t_0 - h, t_0), H)$ (см. [3, с. 172]).

Если операторы A_0 и A_1 удовлетворяют условиям, изложенным выше, то легко показать, что существует функция $S(t)$ со значениями в пространстве линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве H, удовлетворяющая соотношениям

$$\dot{S}(t) = A_0 S(t) + A_1 S(t-h), \quad t > 0, \quad S(0) = I, \quad S(t) = 0, \quad t < 0,$$

где I — тождественный оператор в H. С помощью оператора $S(t)$ решение $x(t)$ уравнения (1) при заданных начальных условиях (2) и функции $u(t)$ можно представить следующим образом:

$$x(t) = S(t-t_0)\varphi(t_0) + \int_{-h}^{0} S(t-h-t_0-\tau) A_1 \varphi(\tau + t_0)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} S(t-\tau) Bu(\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

Функцию $u(t)$ в уравнении (1) будем называть управлением. Предполагаем, что $u(t) \in L_2((t_0, T), H_1)$. Пусть задан некоторый элемент $x_1 \in H$ и требуется найти такое управление $u(t)$, чтобы при $t = T$ выполнялось равенство

$$x(T) = x_1. \tag{4}$$

Учитывая формулу (3), для определения управления $u(t)$ получим интегральное уравнение

$$x_2 = \int_{t_0}^{T} S(T-\tau) Bu(\tau)\, d\tau, \tag{5}$$

где $x_2 = x_1 - S(T-t_0)\varphi(t_0) - \int_{-h}^{0} S(T-h-t_0-\tau) A_1 \varphi(\tau+t_0)\, d\tau$. Решение уравнения (5) ищем в виде

$$u(t) = B^*S^*(T-t)\, l, \tag{6}$$

где $l \in H$ — элемент, который надо определить, звездочкой отмечены сопряженные операторы. С учетом соотношения (6) для определения элемента l получим уравнение

$$W(T, t_0)\, l = x_2, \tag{7}$$

где линейный ограниченный оператор $W(T, t_0)$ действует из H в H,

$$W(T, t_0) = \int_{t_0}^{T} S(T-\tau) BB^*S^*(T-\tau)\, d\tau.$$

Предположим, что оператор $W(T, t_0)$ имеет ограниченный обратный оператор $W^{-1}(T, t_0)$. Это предположение выполняется, если, например, на некоторой части отрезка $[t_0, T]$ положительной меры оператор $B^*S^*(T-t)$ является унитарным при каждом t. Тогда единственное решение уравнения (7) имеет вид $l = W^{-1}(T, t_0)\, x_2$, и искомое управление $u_0(t)$ будет следующим:

$$u_0(t) = B^*S^*(T-t)\, W^{-1}(T, t_0)\, x_2. \tag{8}$$

Как и в [4, с. 60], можно показать, что существует бесчисленное множество управлений $u(t)$, обеспечивающих выполнение условия (4), и если на этом множестве рассмотреть задачу минимизации функционала

$$I(u) = \int_{t_0}^{T} \| u(t) \|^2\, dt, \tag{9}$$

то минимум функционала (9) реализуется именно на управлении (8), т. е. управление $u_0(t)$ оптимально. Отметим, что в данном случае оно является программным управлением (см. [4, с. 251]). Часто очень важно знать также оптимальное управление, построенное по принципу обратной связи. Используя аналогичные рассуждения (см. [4, с. 254]), находим, что такое управление имеет вид

$$u_0(t) = -B^*K(t)\, x(t) - \int_{-h}^{0} B^*M(t, s)\, x(t+s)\, ds + B^*p(t), \tag{10}$$

где

$$K(t) = S^*(T-t)\, W^{-1}(T, t)\, S(T-t), \quad M(t, s) = S^*(T-t)\, W^{-1}(T, t) \times$$
$$\times S(T-h-t-s) A_1, \quad p(t) = S^*(T-t)\, W^{-1}(T, t)\, x_1. \tag{11}$$

Если дополнительно определить еще функции $N(t, s, \tau)$ и $q(t, s)$ с помощью соотношений

$$\begin{aligned} N(t, s, \tau) &= A_1^*S^*(T-h-t-s)\, W^{-1}(T, t)\, S(T-h-t-\tau) A_1, \\ q(t, s) &= A_1^*S^*(T-h-t-s)\, W^{-1}(T, t)\, x_1, \end{aligned} \tag{12}$$

то получим, что функции $K(t)$, $M(t, s)$, $N(t, s, \tau)$, $p(t)$, $q(t, s)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

на интервале $[t_0, T-h)$

$$\dot{K}(t) = -A_0^* K(t) - K(t) A_0 - M^*(t, 0) - M(t, 0) + K(t) BB^* K(t),$$

$$\partial M(t, s)/\partial t = \partial M(t, s)/\partial s - A_0^* M(t, s) - N(t, 0, s) + K(t) BB^* M(t, s),$$

$$-h \leqslant s \leqslant 0, \partial N(t, s, \tau)/\partial t = \partial N(t, s, \tau)/\partial s + \partial N(t, s, \tau)/\partial \tau + M^*(t, s) BB^* \times$$

$$\times M(t, \tau), \ -h \leqslant s \leqslant 0, \quad -h \leqslant \tau \leqslant 0, \quad \dot{p}(t) = -A_0^* p(t) + K(t) BB^* p(t) -$$

$$-q(t, 0), \quad \partial q(t, s)/\partial t = \partial q(t, s)/\partial s + M^*(t, s) BB^* p(t), \quad -h \leqslant s \leqslant 0; \quad (13)$$

на интервале $[T-h, T)$

$$\dot{K}(t) = -A_0^* K(t) - K(t) A_0 + K(t) BB^* K(t), \quad \partial M(t, s)/\partial t = \partial M(t, s)/\partial s -$$

$$-A_0^* M(t, s) + K(t) BB^* M(t, s), \quad -h \leqslant s \leqslant 0, \quad \partial N(t, s, \tau)/\partial t =$$

$$= \partial N(t, s, \tau)/\partial s + \partial N(t, s, \tau)/\partial \tau + M^*(t, s) BB^* M(t, \tau), \quad -h \leqslant s \leqslant 0,$$

$$-h \leqslant \tau \leqslant 0, \quad \dot{p}(t) = -A_0^* p(t) + K(t) BB^* p(t), \quad \partial q(t, s)/\partial t = \partial q(t, s)/\partial s +$$

$$+ M^*(t, s) BB^* p(t), \quad -h \leqslant s \leqslant 0. \quad (14)$$

При этом выполняются следующие граничные условия:

$$M(t, -h) = K(t) A_1, \quad N(t, -h, s) = A_1^* M(t, s), \quad q(t, -h) = A_1^* p(t). \quad (15)$$

Очевидно, что при $t + s > T - h$ надо положить $M(t, s) = 0$ и, аналогично, $N(t, s, \tau) = 0$ при $t + s > T - h$, $t + \tau > T - h$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. *Для задачи оптимального управления* (1), (2), (4), (9) *оптимальное программное управление имеет вид* (8). *Оптимальное управление, построенное по принципу обратной связи, имеет вид* (10). *Функции* $K(t)$, $M(t, s)$, $N(t, s, \tau)$, $p(t)$, $q(t, s)$ *заданы с помощью соотношений* (11), (12). *На интервале* $(t_0, T-h)$ *они удовлетворяют системе дифференциальных уравнений* (13), *на интервале* $(T-h, T)$ — *системе дифференциальных уравнений* (14). *Граничные условия для этих функций имеют вид* (15).

Пример. Рассмотрим управляемую систему, поведение которой описывается следующим дифференциальным уравнением в частных производных:

$$\partial x(t, s)/\partial t = i a_0 \partial^2 x(t, s)/\partial s^2 + a_1 \partial^2 x(t-h, s)/\partial s^2 + u(t, s),$$

где $i = \sqrt{-1}$, $H = L_2(-\infty, \infty)$, $A_0 = i a_0 \partial^2/\partial s^2$, $A_1 = a_1 \partial^2/\partial s^2$, $D(A_0) = D(A_1) = \{x : x', x'' \in H\}$. Очевидно, $A_0^* = -A_0$. Функционал (9) имеет вид $I(u) = \int\limits_{t_0}^{T} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(t, s)|^2 \, ds dt$. Тогда, например, на отрезке $[T-h, T)$ первое из уравнений (14) будет иметь вид

$$\partial G(t, r-s)/\partial t = i a_0 \partial^2 G(t, r-s)/\partial s^2 - i a_0 \partial^2 G(t, r-s)/\partial s^2 +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t, r-\tau) G(t, \tau - s) \, d\tau,$$

где $G(t, s)$ — ядро интегрального оператора $K(t) x(t, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t, r-s) x(t, r) \, dr$. Поскольку оператор $K(t)$ самосопряженный, то выполняется соотношение $G(t, r-s) = \overline{G(t, s-r)}$ для $t \in [t_0, T]$, $-\infty < r < +\infty$, $-\infty < s < +\infty$. Аналогичным образом можно записать остальные уравнения (13), (14).

1. *Заманов Т. А.* К теории эволюционных уравнений с отклоняющимся аргументом в банаховом пространстве.— Тр. семинара по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом, 1967, 5, с. 79—82.
2. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1967.— 464 с.
3. *Балакришнан А. В.* Прикладной функциональный анализ.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
4. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением.— М. : Наука, 1968.— 476 с.

Киев. политехн. ин-т

Получено 24.07.84,
после доработки — 21.05.85