УДК 519.21

Т. В. Каратаева

Интегральное представление мультипликативных систем без условия непрерывности

В настоящей статье продолжаются исследования, начатые в работе [1], и используются принятые там обозначения и определения. Докажем следующую теорему, которая усиливает известные результаты Фреше [2].

Теорема. *Всякая M-полугруппа* x_s^t *на* $[0, T]$ *является единственным решением интегрального уравнения*

$$x_s^t = E + \int_s^t x_s^\tau dy_0^\tau \tag{1}$$

в классе $L[0,T]$ *функций* $g(t)$ *со значениями в* X, *удовлетворяющих условию* $\int\limits_s^t |g(t)|\,d\varphi(t) < \infty$, *где* $y_s^t = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{m_n} (x_{t_{k-1}}^{t_k} - E)$, $\varphi(t) = \sup\limits_{\Delta[0,T]} \sum\limits_{k=1}^{m_n} |y_{t_{k-1}}^{t_k}|$, *а интеграл в* (1) *понимается в смысле* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{m_n} x_s^{t_{k-1}} y_{t_{k-1}}^{t_k}$. *При этом* x_s^t *может быть представлено в виде*

$$x_s^t = E + \sum_{k=1}^{\infty} \int_s^t \int_s^{t_1} \dots \int_s^{t_{n-1}} dy_0^{t_n} \dots dy_0^{t_2} dy_0^{t_1}. \tag{2}$$

Доказательство. Покажем прежде всего, что предел, определяющий интеграл в (1), не зависит от измельчающейся последовательности разбиений $\{\Delta_n\}$ отрезка $[s, t]$. Как и в [3], это достаточно доказать только для монотонных измельчающихся последовательностей разбиений отрезка $[s, t]$. Итак, пусть $\bigcup\limits_{k=1}^{m_n} \bigcup\limits_{i=1}^{r_k} \{s_i^k\} = \Delta_r \supseteq \Delta_n = \bigcup\limits_{k=1}^{m_n} \{t_k^n\}$, где $s = t_0^n \leqslant t_1^n \leqslant \ldots \leqslant t_{m_n}^n = t$, $t_{k-1}^n = s_0^k \leqslant s_1^k \leqslant \ldots \leqslant s_{r_k}^k = t_k^n$. Тогда в силу оценок (16) и условий (1), (2) из [1] справедливо следующее соотношение:

$$\Big| \sum_{k=1}^{m_n} x_s^{t_{k-1}^n} y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} x_s^{s_{i-1}^k} y_{s_{i-1}}^{s_i} \Big| = \Big| \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} x_s^{t_{k-1}^n} y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} -$$

$$- \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} x_s^{s_{i-1}^k} y_{s_i^k}^{s_{i-1}^k} \Big| \leqslant \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} |x_s^{t_{k-1}^n}|\, |x_{t_{k-1}^n}^{s_{i-1}^k} - E|\, |y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}| \leqslant$$

$$\leqslant C_1(T) \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} (\varphi(s_{i-1}^k) - \varphi(t_{k-1}^n))(\varphi(s_i^k) - \varphi(s_{i-1}^k)). \tag{3}$$

Здесь $C_1(T)$ — некоторая константа.

Правую часть соотношения (3) аналогично оценке правой части соотношения (2) в [3] можно сделать меньше любого заданного $\varepsilon > 0$ с ростом n для любого $r \geqslant n$. Следовательно, предел, определяющий интеграл в (1), не зависит от измельчающейся последовательности разбиений $\{\Delta_n\}$ отрезка $[s, t]$. Далее, поскольку для любого разбиения $\Delta_n = \{t_k^n\}$ отрезка $[s, t]$ справедливо равенство $x_s^t - E = \sum\limits_{k=1}^{m_n} (x_s^{t_k^n} - x_s^{t_{k-1}^n}) = \sum\limits_{k=1}^{m_n} x_s^{t_{k-1}^n} (x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E)$, то в силу теоремы и оценок (16) из [1] справедливо соотношение

$$\Big| x_s^t - E - \sum_{k=1}^{m_n} x_s^{t_{k-1}^n} y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \Big| = \Big| \sum_{k=1}^{m_n} x_s^{t_{k-1}^n} (x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E) - \sum_{k=1}^{m_n} x_s^{t_{k-1}^n} y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \Big| =$$

$$= \Big| \sum_{k=1}^{m_n} (x_s^{t_{k-1}^n}) (x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E - y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}) \Big| \leqslant \sum_{k=1}^{m_n} |x_s^{t_{k-1}^n}|\, |x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E -$$

$$- y_{t_{k-1}}^{t_k}| \leqslant C_2(T) \sum_{k=1}^{m_n} (\varphi(t_k^n - 0) - \varphi(t_{k-1}^n))(\varphi(t_k^n) - \varphi(t_{k-1}^n + 0)), \tag{4}$$

где $C_2(T)$ — некоторая константа.

Теперь, аналогично тому, как это проделано в [1] для соотношения (18), используя свойства односторонней непрерывности в каждой точке функции $\varphi(t)$, можно так выбрать измельчающуюся последовательность разбиений $\{\Delta_n\}$ отрезка $[s, t]$, чтобы правая часть соотношения (4) стремилась к нулю при $n \to \infty$ для этого разбиения.

Переходя затем к пределу в (4) по выбранной последовательности разбиений $\{\Delta_n\}$ и используя доказанную выше независимость предела $\lim \Sigma x_s^{t_{k-1}^n} y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}$ от измельчающейся последовательности разбиений $\{\Delta_n\}$, получаем, что x_s^t является решением уравнения (1).

Чтобы доказать единственность этого решения в указанном классе, докажем вначале справедливость следующей леммы.

Лемма. *Для всякой монотонно возрастающей, ограниченной на отрезке* $[0, T]$ *функции* $\varphi(t)$ *при* $0 \leqslant s \leqslant t_n \leqslant \ldots \leqslant t_1 \leqslant t \leqslant T$ *справедливо неравенство*

$$\int_s^t \int_s^{t_1} \ldots \int_s^{t_{n-1}} d\varphi(t_n) \ldots d\varphi(t_2)\, d\varphi(t_1) \leqslant \frac{(\varphi(t) - \varphi(s))^n}{n!}, \tag{5}$$

если предел, определяющий интеграл в левой его части, понимать по измельчающейся последовательности разбиений $\{\Delta_r\}$ *отрезка* $[s, t] \subset [0, T]$ *в смысле формулы* (1) *из* [3].

Доказательство При заданном разбиении Δ_r отрезка $[s, t]$ запишем соотношение

$$\frac{1}{n}(\varphi^n(t) - \varphi^n(s)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m_r} (\varphi^n(t_k^r) - \varphi^n(t_{k-1}^r)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m_r} (\varphi^{n-1}(t_k^r) +$$

$$+ \varphi^{n-2}(t_k^r)\,\varphi(t_{k-1}^r) + \ldots + \varphi(t_k^r)\,\varphi^{n-2}(t_{k-1}^r) + \varphi^{n-1}(t_{k-1}^r)) \times$$

$$\times (\varphi(t_k^r) - \varphi(t_{k-1}^r)) \geqslant \sum_{k=1}^{m_r} \varphi^{n-1}(t_{k-1}^r)\,(\varphi(t_k^r) - \varphi(t_{k-1}^r)).$$

Переходя к пределу (который, как легко видеть, всегда существует) в правой его части при $r \to \infty$, получаем неравенство $\int_s^t \varphi^{n-1}(\tau)\, d\varphi(\tau) \leqslant \frac{\varphi^n(t) - \varphi^n(s)}{n}$, итерируя которое, находим

$$\int_s^t \int_s^{t_1} \ldots \int_s^{t_{n-1}} d\varphi(t_n) \ldots d\varphi(t_2)\, d\varphi(t_1) \leqslant \frac{\varphi^n(t)}{n!} -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{n-k}(s)}{(n-k)!} \int_s^{t_{n-k}} \ldots \int_s^{t_{n-1}} d\varphi(t_n) \ldots d\varphi(t_{n-k+1}).$$

Используя последнее неравенство для функции $f(\tau) = \varphi(\tau) - \varphi(s)$ с учетом равенства $f(s) = 0$, получаем искомое неравенство (5) в виде

$$\int_s^t \int_s^{t_1} \ldots \int_s^{t_{n-1}} df(t_n) \ldots df(t_2)\, df(t_1) \leqslant \frac{f^n(t)}{n!} = \frac{(\varphi(t) - \varphi(s))^n}{n!}.$$

Замечание 1. Предел, определяющий интеграл в левой части неравенства (5), не зависит от измельчающейся последовательности разбиений $\{\Delta_n\}$ отрезка $[s, t]$ тогда и только тогда, когда функция $\varphi(\tau)$ удовлетворяет условиям работы [1]) (см. также [3]).

Чтобы завершить доказательство теоремы, заметим, что единственность решения уравнения (1) в указанном классе теперь получается предельным переходом при $n \to \infty$ в следующем итерационном соотношении:

$$|x_s^t - u_s^t| \leqslant \int_s^t |x_s^\tau - u_s^\tau|\, d\varphi(\tau) \leqslant \ldots \leqslant \sup_\tau |x_s^\tau - u_s^\tau| \times$$

$$\times \int\limits_s^t \int\limits_s^{t_1} \cdots \int\limits_s^{t_{n-2}} d\varphi(t_{n-1}) \ldots d\varphi(t_2)\, d\varphi(t_1) < C_3(T) \frac{(\varphi(t)-\varphi(s))^{n-1}}{(n-1)!},$$

где x_s^t и u_s^t — предполагаемые различные решения уравнения (1).

Итерируя наконец уравнение (1) с учетом оценки (5), получаем его решение в виде (2).

Замечание 2. В силу доказанной выше леммы существование и единственность решения уравнения (1), в котором предел, определяющий интеграл, рассматривается по фиксированной измельчающейся последовательности разбиений $\{\Delta_n\}$ отрезка $[s, t]$, а на полугруппу y_s^t не налагается условие (6) из [1], доказывается аналогично предыдущему. Однако для различных измельчающихся последовательностей $\{\Delta_n\}$ эти решения в общем случае различны.

Замечание 3. Легко показать, что решение уравнения (1) при заданной A-полугруппе y_s^t будет M-полугруппой. В самом деле, из представления (2) и леммы вытекает его ограниченность на $[0, T]$, откуда в свою очередь вытекает свойство (2) в [1]. Свойство (3) из [1] очевидно, а свойство (1) из [1] проверяется следующим образом. Для фиксированной точки $\tau \in [s, t]$ величина $x_s^\tau x_\tau^t$ очевидно удовлетворяет уравнению $x_s^\tau x_\tau^t = x_s^\tau + \int\limits_\tau^t x_s^\tau x_\tau^\sigma dy_0^\sigma$, которое получается умножением (1) при $s = \tau$ слева на x_s^τ. С другой стороны, используя аддитивность интеграла в (1) (которая в этом случае вытекает из его независимости от измельчающейся последовательности разбиений), получаем равенство

$$x_s^t = E + \int\limits_s^t x_s^\sigma\, dy_0^\sigma = E + \int\limits_s^\tau x_s^\sigma\, dy_0^\sigma + \int\limits_\tau^t x_s^\sigma\, dy_s^\sigma = x_s^\tau + \int\limits_\tau^t x_s^\sigma\, dy_0^\sigma.$$

Тем самым величины $x_s^\tau x_\tau^t$ и x_s^t удовлетворяют одному и тому же уравнению с одними и теми же начальными условиями, и в силу единственности его решения, вытекающей из леммы и соответствующей части теоремы, они совпадают.

Таким образом, появляется еще одна возможность доказательства основной теоремы в [1] о взаимнооднозначности отображения D между множествами M- и A-полугрупп на $[0, T]$, на этот раз исходя из A-полугрупп и уравнения (1), а не из M-полугрупп, как это сделано в [1] с помощью соотношений (7) и (8).

Замечание 4. Если аддитивная полугруппа y_s^t не удовлетворяет условию (6) из [1] и, следовательно, пределы в формулах (7), (8) могут зависеть от последовательности $\{\Delta_n\}$, то для доказательства единственности решения уравнения (1) методом, предложенным в замечании 3, следует уточнить понятие аддитивности интеграла в (1) как функции интервала $[s, t]$.

1. *Каратаева Т. В., Буцан Г. П.* Об изоморфизме мультипликативных и аддитивных параметрических полугрупп без условия непрерывности.— Укр. мат. журн., 1985, 37, № 2, с. 168—175.
2. *Fréchet M.* Recherches théoriques modernes sur le calcus des probabilities, II.— Paris : Gauthier — Villars, 1938.— 315 p.
3. *Буцан Г. П.* Необходимое и достаточное условие существования интеграла Стильтьеса для функций ограниченной вариации.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1984, № 12, с. 3—7.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 12.11.84