УДК 517.968.4

Ю. П. Яценко

О системах нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с неизвестным нижним пределом интегрирования

В данной работе исследуются вопросы существования и единственности решений систем интегральных уравнений Вольтерра первого и второго рода, в которых одна из неизвестных функций является нижним пределом интегрирования.

1. Рассмотрим систему уравнений

$$x(t) = \int_{z(t)}^{t} f(\tau, t, x(\tau))\, d\tau, \quad p(t) = \int_{z(t)}^{t} \varphi(\tau, t, x(\tau))\, d\tau \tag{1}$$

относительно неизвестных функций $x(t)$, $z(t)$, $t \in [t_0, T)$, $t_0 < T \leqslant \infty$. Пусть $f(\tau, t, x)$ и $\varphi(\tau, t, x)$ непрерывны при $(\tau, t, x) \in (-\infty, T) \otimes [t_0, T) \otimes (-\infty, \infty)$, $p(t) \in C^1_{[t_0, T)}$, $T \leqslant \infty$. Кроме того, заданы непрерывная функция $x_0(\tau)$, $x_0(\tau) \equiv x(\tau)$, $\tau \in (-\infty, t_0]$, и значение $z(t_0) = z_0 < t_0$.

Теорема 1. *Если: 1) $x_0(\tau)$ — знакопостоянная функция, а $p(t)$, $f(\tau, t, x)$, $\varphi(\tau, t, x)$ — знакоопределенные при $x \operatorname{sgn} x_0 > 0$ ($\operatorname{sgn} x_0$ — знак функции $x_0(\tau)$); 2) $\int_{-\infty}^{t_0} \varphi(\tau, t, x_0(\tau))\, d\tau$ расходится; 3) $f(\tau, t, x)$, $\varphi(\tau, t, x)$, $p(t)$ удовлетворяют условию Липшица по x и t; 4) $f(\tau, t, x,)/\varphi(\tau, t, x)$ ограничена; $\tau \in (-\infty, T)$, $t \in [t_0, T)$, $x \operatorname{sgn} x_0 \in [0, \infty)$, то система уравнений (1) имеет единственное решение $x(t) \in C_{[t_0, T)}$, $z(t) \in C^1_{[t_0, T)}$, причем $x(t)$ знакопостоянная, а $z(t) < t$.*

Доказательство. Не ограничивая общности предположим, что $x_0(\tau) \geqslant 0$, $p(t) > 0$, тогда из (1) следует, что и f, $\varphi > 0$. Представим уравнения (1) в виде

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, t, x(\tau))\, d\tau + \int_{z(t)}^{t_0} f(\tau, t, x_0(\tau))\, d\tau, \quad \int_{z(t)}^{t_0} \varphi(\tau, t, x_0(\tau))\, d\tau =$$

$$= p(t) - \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau, t, x(\tau))\, d\tau \overset{df}{=} c(t), \tag{2}$$

$t \in [t_0, t_1]$, $t_1 \leqslant T$ (момент t_1 будет определен позже), и введем функции

$$F(z, t) = \int_{z}^{t_0} f(\tau, t, x_0(\tau))\, d\tau, \quad \Phi(z, t) = \int_{z}^{t_0} \varphi(\tau, t, x_0(\tau))\, d\tau, \tag{3}$$

которые определены для $-\infty < z \leqslant t_0$. При условиях теоремы $\Phi(z, t)$ монотонна по z и имеет однозначную обратную по z функцию $\Phi^{-1}(c, t)$, которая определена для $c \in [0, \infty)$. Обозначим $S(c, t) = F[\Phi^{-1}(c, t), t]$. Система уравнений (1) эквивалентна нелинейному интегральному уравнению Вольтерра

$$x(t) = Ax \equiv \int_{t_0}^{t} f(\tau, t, x(\tau))\, d\tau + S\left[p(t) - \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau, t, x(\tau))\, d\tau, t\right], \qquad (4)$$

если выполняется

$$p(t) \geqslant \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau, t, x(\tau))\, d\tau. \qquad (5)$$

Обозначим через Ω_d семейство непрерывных функций $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$: $: 0 \leqslant x(t) \leqslant x_0(t_0) + d = D_0$, $d = \text{const} > 0$, и введем норму

$$\| f \| = \max_{(\tau, t, x) \in [t_0, t_1] \otimes [t_0, t_1] \otimes [0, D_0]} | f(\tau, t, x) |.$$

Условие (5) выполняется, если

$$t_1 - t_0 \leqslant \min_{[t_0, t_1]} p(t) / \| \varphi \|. \qquad (6)$$

Функция $S(c, t)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L_s = \max | f(\tau, t, x) / \varphi(\tau, t, x) |$, через L_f^x, L_f^t, L_φ^x, L_φ^t, L_p обозначим константы Липшица функций $f(\tau, t, x)$, $\varphi(\tau, t, x)$, $p(t)$. Из второго условия теоремы и (5) вытекает $0 \leqslant t_0 - z(t) \leqslant c_z$, $t \in [t_0, t_1]$.

Оценим разность $x^*(t) - x_0(t_0)$, $x^* = Ax$. После преобразований находим

$$x^*(t) - x_0(t_0) \leqslant [\| f \| + L_s (L_p + \| \varphi \|) + (L_f^t + L_s L_\varphi^t) C_z] (t - t_0) \stackrel{df}{=} = C_A (t - t_0). \qquad (7)$$

Учитывая, что $Ax \geqslant 0$, получаем, что при

$$t_1 - t_0 \leqslant d / C_A \qquad (8)$$

оператор A оставляет инвариантным множество $\Omega_d \subset C_{[t_0, t_1]}$.

Наконец, можно показать, что для $x_1, x_2 \in \Omega_d$ выполняется

$$\| Ax_1 - Ax_2 \|_{[t_0, t_1]} \leqslant (L_f^x + L_s L_\varphi^x)(t_1 - t_0) \| x_1 - x_2 \|_{[t_0, t_1]},$$

следовательно, при

$$t_1 - t_0 < 1 / (L_f^x + L_s L_\varphi^x) \qquad (9)$$

оператор A является сжимающим.

Выбирая момент t_1 так, чтобы он удовлетворял неравенствам (6), (8) и (9), получаем, что уравнение (4), а значит, и система (2) имеют единственное решение $x(t) \in C_{[t_0, t_1]}$ в силу принципа сжатых отображений [1], причем $x(t) \geqslant 0$, $t \in [t_0, t_1]$, в силу положительности функций S в (4). Решение $z(t) < t_0$, $t \in [t_0, t_1]$, определяется единственным образом из второго уравнения (2).

Считая $x_0(\tau)$ заданным на $(-\infty, t_1]$, доказываем существование и единственность решения $x(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, $t_1 < t_2 \leqslant T$ и т. д.

Покажем, что любой конечный интервал $[t_0, T)$ может быть пройден за конечное число шагов $t_{i+1} - t_i$, определяемых неравенствами (6), (8), (9). Действительно, константа в (9) одна для всех интервалов $[t_i, t_{i+1}]$. Рассмотрим неравенство (7). В силу знакоопределенности решения x и второго условия теоремы из (2) следует, что константа C_z не зависит от номера интервала. Далее, так как функции f и φ удовлетворяют условию Липшица по x при любых x, то при достаточно больших d величины $\|f\|$, $\|\varphi\|$ и C имеют тот же порядок, что и d, следовательно, константа d/C_A в (8) может быть выбрана положительной и не зависящей от i. При этом значение $\|\varphi\|$ также конечное и правая часть в (6) может быть выбрана не зависящей от i. Следовательно, длины всех интервалов $[t_i, t_{i+1}]$ больше некоторого положительного числа, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если функции f и φ удовлетворяют условию Липшица не на всей полуоси $[0, \infty)$, а при $x \in [0, X]$, то можно показать, что система уравнений (1) имеет единственное решение $x(t)$ в прямоугольнике $[0, X] \oplus \oplus [t_0, T]$ на плоскости (x, t) (при этом решение может не существовать на всем $[t_0, T]$).

При решении практических задач предыстория $x_0(\tau)$ обычно известна на конечном интервале $[\tau_0, t_0]$, $-\infty < \tau_0 < t_0$. Тогда в силу теоремы 1 решение задачи может не существовать. Достаточный признак принадлежности решения $z(t)$ интервалу $[\tau_0, t_0]$ дает следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Если выполнены условия теоремы* 1, *все заданные функции положительны, f и φ дифференцируемы по x, то $\tau_0 \leqslant z(t) \leqslant t$, $t \in [t_0, T)$, тогда, когда*

$$p(t) \leqslant \bar{p}(t) = \int_{\tau_0}^{t} \varphi(\tau, t, \bar{x}(\tau))\, d\tau,$$

где $\bar{x}$ определяется из уравнения

$$\bar{x}(t) = \int_{\tau_0}^{t} f(\tau, t, x(\tau))\, d\tau + \int_{\tau_0}^{t_0} f(\tau, t, x_0(\tau))\, d\tau \tag{10}$$

(*при этом $x(t) \leqslant \bar{x}(t)$*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проварьировав систему уравнений (1) по заданной функции $p(t)$, получим систему линейных интегральных уравнений Вольтерра в вариациях относительно вариаций $\delta x(t)$ и $\delta z(t)$ неизвестных решений $x(t)$ и $z(t)$. Используя известные свойства оператора Вольтерра, из этой системы уравнений имеем $\delta x(t) \geqslant 0$ и $\delta z(t) \leqslant 0$ при $\delta p(t) \geqslant \geqslant 0$. В случае функции $p(t)$, заданной соотношениями (10), отсюда вытекает утверждение теоремы.

2. Рассмотрим систему уравнений первого рода с неизвестным нижним пределом:

$$\int_{z(t)}^{t} \varphi(\tau, t, y(\tau))\, d\tau = p(t), \quad \int_{z(t)}^{t} \psi(\tau, t, y(\tau))\, d\tau = q(t) \tag{11}$$

относительно неизвестных $y(t)$, $z(t)$, $t \in [t_0, T)$, $T \leqslant \infty$. В отличие от предыдущего случая считаем функции φ, ψ, q непрерывно дифференцируемыми по t и y.

Дифференцируя уравнения (11) и исключая $z'(t)$, получаем

$$\Omega(y(t), z(t), t) = \int_{z(t)}^{t} \chi(y(\tau), z(t), \tau, t)\, d\tau + R(z(t), t), \tag{12}$$

где

$$\Omega(y, z, t) = \varphi(t, t, y)\, \psi(z, t, y_0(z)) - \psi(t, t, y)\, \varphi(z, t, y_0(z)),$$

$$\chi(y, z, \tau, t) = \psi'_t(\tau, t, y)\, \varphi(z, t, y_0(z)) - \varphi'_t(\tau, t, y)\, \psi(z, t, y_0(z)),$$

$$R(z, t) = p'(t)\, \varphi(z, t, y_0(z)) - q'(t)\, \psi(z, t, y_0(z)).$$

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены следующие условия*: 1) $y_0(\tau)$, $\varphi(\tau, t, y)$, $\psi(\tau, t, y)$, $p(t)$, $q(t)$ *знакоопределены и удовлетворяют условию Липшица по всем переменным,* φ'_y и ψ_y *знакоопределены, а* φ'_t, ψ'_t, p', q' *удовлетворяют условию Липшица по* t и y; 2) $\varphi(\tau, t, 0) = \psi(\tau, t, 0) \equiv 0$; 3) $\varphi(\tau, t, y)/\psi(\tau, t, y)$ *не зависит от* y *и строго монотонна по* τ; 4) *справедливо неравенство* $\varphi'_t(\tau, t, y)/\psi'_t(\tau, t, y) < \varphi(u, t, y)/\psi(u, t, y) < p'(t)/q'(t)$ *или обратное неравенство*; 5) $\int_{-\infty}^{t_0} \varphi(\tau, t, y_0(\tau))\, d\tau$, $\int_{-\infty}^{t_0} \psi(\tau, t, y_0(\tau))\, d\tau$ *расходятся*; $\tau \in (-\infty, T)$, $t \in [t_0, T)$, $y \operatorname{sgn} y_0 \in (0, \infty)$. *Тогда система* (11) *имеет единственное решение*: *знакоопределенную функцию* $y(t) \in C_{[t_0, T)}$ *и* $z(t) \in \in C^1_{[t_0, T)}$, $z(t) < t$.

Доказательство. Уравнение (12) совместно с одним из уравнений (11) образует систему, аналогичную системе (1). В силу первого и третьего условий функция Ω имеет обратную по y функцию. Подобно доказательству теоремы 1 полученная система уравнений сводится на некотором интервале $[t_0, t_1]$ к одному нелинейному уравнению Вольтерра, существование и единственность решения которого доказывается с помощью принципа сжатых отображений. Четвертое условие гарантирует знакоопределенность правой части уравнений (12), откуда с учетом второго условия следует знакоопределенность решения y. Теорема доказана.

3. Подобным образом могут быть изучены более сложные системы интегральных уравнений Вольтерра первого и второго рода с несколькими неизвестными пределами интегрирования. Такие задачи возникают в динамических макроэкономических моделях, предложенных В. М. Глушковым [2, 3].

1. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Наука, 1970.— 332 с.
2. *Глушков В. М.* Об одном классе динамических макроэкономических моделей.— Управляющие системы и машины, 1977, № 2, с. 3—6.
3. *Глушков В. М.*, *Иванов В. В.*, *Яценко Ю. П.* Аналитическое исследование одного класса динамических моделей. I, II.— Кибернетика, 1980, № 2, с. 1—12; 1982, № 3, с. 104—112.

Ин-т кибернетики АН УССР, Киев

Получено 22.03.83,
после доработки — 12.06.85