УДК 519.21

Г. П. Буцан

Некоторые представления мультипликативных стохастических полугрупп без условий непрерывности и мартингальности

В настоящей статье показано, что формулы, по которым можно восстановить мультипликативную стохастическую полугруппу исходя из ее инфинитезимальной аддитивной стохастической полугруппы, полученные в работе [1] для непрерывного случая, справедливы при некотором более слабом ограничении, допускающем и разрывы первого рода. В дальнейшем будем использовать обозначения и определения, принятые в работах [2—4].

Докажем прежде всего несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Для левой M_2-полугруппы X_s^t справедлива оценка*

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T} |X_s^t|_5 \leqslant C_1(T) < \infty. \tag{1}$$

Доказательство. Аналогично работе [2] M_2-полугруппу X_s^t можно представить в виде $X_s^t = \overline{X}_s^t \overrightarrow{\boxtimes} \tilde{X}_s^t$, где M_2-полугруппа $\overline{X}_s^t$ не содержит скачков в точках $\tau\in[0, T]$, для которых $|x_{\tau-0}^{\tau+0} - E|_2 \geqslant 1$, а M_2-полугруппа $\tilde{X}_s^t$ является произведением конечного числа таких скачков. Здесь $x_s^t = MX_s^t$. Очевидно $\tilde{X}_s^t$ обладает свойством (1) и поэтому для доказательства этого свойства в общем случае достаточно показать, что оно выполняется для $\overline{X}_s^t$.

Будем сразу предполагать, что X_s^t не имеет скачков в точках $\tau\in[0, T]$, для которых $|x_{\tau-0}^{\tau+0} - E|_2 \geqslant 1$. Тогда по лемме 1 работы [5] существует $(x_s^t)^{-1}$ и функция $|(x_s^t)^{-1}|_2$ ограничена при $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$.

Воспользовавшись теперь определяющими свойствами M_2-полугрупп, неравенством (9) в [2] и свойствами функции $\mathscr{F}_l(t) = |X_0^t(x_0^t)^{-1} - E|_4^2$ (см. [2]) при $a\in H$, запишем соотношение $M|X_s^t a|_1^2 = M|(X_s^t - x_s^t)a|_1^2 + |x_s^t a|_1^2$, из которого в силу неравенств (2.10) из [6] вытекает оценка

$$\begin{aligned}|X_s^t|_5^2 &\leqslant |X_s^t - x_s^t|_5^2 + |x_s^t|_2^2 \leqslant |(x_0^s)^{-1}|_2^2\, |x_0^s X_s^t (x_0^t)^{-1} - E|_4^2\, |x_0^t|_2^2 + |x_s^t - E|_2^2 + \\ &+ 2|x_s^t - E|_2 + 1 \leqslant c_1(T)(\mathscr{F}_l(t) - \mathscr{F}_l(s)) + 1 + |x_s^t - E|_2(|x_s^t - E|_2 + 2) \leqslant \\ &\leqslant c_1(T)(\mathscr{F}_l(t) - \mathscr{F}_l(s)) + 1 + \operatorname*{var}_{[s,t]}(x - E)(2 - \operatorname*{var}_{[0,T]}(x - E)) \leqslant \\ &\leqslant \exp\{c_1(T)(\mathscr{F}_l(t) - \mathscr{F}_l(s)) + c_2(T)\operatorname*{var}_{[s,t]}(x - E)\}.\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $c_1(T)$ и $c_2(T)$ — некоторые константы.

Из неравенства (2) требуемая оценка (1) следует очевидным образом.

Замечание 1. Аналогичный результат справедлив для правой полугруппы и функции $\mathscr{F}_r(t) = |(x_0^t)^{-1} X_0^t - E|_4^2$ с некоторыми константами $c_3(T)$ и $c_4(T)$.

Следствие 1. *Если $(l)\,X_s^t$ — левая M_2-полугруппа, то*

$$\sup_{\Delta[s,t]} \Big|\overleftarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (l)\, X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}\Big|_5 \leqslant \{c_1(T)(\mathscr{F}_l(t) - \mathscr{F}_l(s)) + c_2(T)\operatorname*{var}_{[s,t]}((l)\,x - E)\}. \tag{3}$$

Для правой M_2-полугруппы $(r)\,X_s^t$ справедлива оценка

$$\sup_{\Delta[s,t]} \Big|\overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (r)\, X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}\Big|_5 \leqslant \exp\{c_3(T)(\mathscr{F}_r(t) - \mathscr{F}_r(s)) + c_4(T)\operatorname*{var}_{[s,t]}((r)\,x - E)\}, \tag{4}$$

причем в левых частях формул (3) и (4) верхняя грань берется по всевозможным разбиениям интервала $[s, t]$, *а произведения* $\overleftarrow{\Pi}$ *и* $\overrightarrow{\Pi}$ *рассматриваются соответственно в порядке убывания и возрастания индекса* k *слева направо.*

Доказательство оценок (3) и (4) вытекает непосредственно из неравенства (2) и замечания 1, если воспользоваться оценкой (2.10) из [6] и следующим свойством функции $\operatorname*{var}_{[s,t]}(x-E)$: при $0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T: \operatorname*{var}_{[s,\tau]}(x-E)+\operatorname*{var}_{[\tau,t]}(x-E) \leqslant \operatorname*{var}_{[s,t]}(x-E)$.

Лемма 2. *Для левой* M_2*-полугруппы* X_s^t *при* $\check{Y}_s^t = \check{D}(X)_s^t$, $x_s^t = MX_s^t$ *справедлива оценка*

$$\sup_{\Delta[s,t]} \Big| \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} \big(\check{Y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}\big) \Big|_5 < C_2(T) < \infty. \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим $\varphi(t) = |\check{Y}_0^t|_4^2$. Используя определяющие свойства $\check{A}_2$-полугруппы $\check{Y}_s^t$, легко показать, что $|\check{Y}_s^t|_4^2 = \varphi(t) - \varphi(s)$ и функция $\varphi(t)$ монотонно возрастает. Далее, легко видеть, что $\forall a \in H$ справедливо равенство $M|(\check{Y}_s^t + x_s^t)a|_1^2 = M|\check{Y}_s^t a|_1^2 + |x_s^t a|_1^2$, из которого аналогично соотношению (2) вытекает оценка

$$|\check{Y}_s^t + x_s^t|_5^2 \leqslant |\check{Y}_s^t|_4^2 + |x_s^t - E|_2^2 + 2|x_s^t - E|_2 + 1 \leqslant \varphi(t) - \varphi(s) + \\ + \operatorname*{var}_{[s,t]}(x-E)\big(\operatorname*{var}_{[0,T]}(x-E)+2\big) + 1 \leqslant \exp\{\varphi(t)-\varphi(s)+c_2(T)\operatorname*{var}_{[s,t]}(x-E)\}. \tag{6}$$

Теперь, как и выше, получаем требуемое неравенство (5).

Замечание 2. Лемма справедлива и для правых M_2-полугрупп.

Замечание 3. Если задана левая M_2-полугруппа $(l)X_s^t$ и $D((l)X)_s^t = Y_s^t$, $MY_s^t = y_s^t$, то по формуле (2) из [7] можно построить правую детерминированную мультипликативную полугруппу $(r)x_s^t = D_r^{-1}(y)_s^t$, которая также удовлетворяет свойству (2) из [2]. Легко видеть, что аналогично доказательству леммы 2 справедливо неравенство

$$|\check{Y}_s^t + (r)x_s^t|_5^2 \leqslant \exp\{\varphi(t) - \varphi(s) + c_3(T)\operatorname*{var}_{[s,t]}((r)x - E)\} \tag{7}$$

и вытекающая из него оценка

$$\sup_{\Delta[s,t]} \Big| \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} \big(\check{Y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + (r)x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}\big) \Big|_5 \leqslant C_3(T) < \infty, \tag{8}$$

где $C_3(T)$ и $c_3(T)$ — некоторые константы.

Следствие 2. *Если задана правая* M_2*-полугруппа* $(r)X_s^t$ *и (см. [2—5] и [7])* $\check{D}((r)X)_s^t = \check{Y}_s^t$, $D((r)X)_s^t = Y_s^t$, $MY_s^t = y_s^t$, $(r)x_s^t = M(r)X_s^t$, $(l)x_s^t = D_l^{-1}(y)_s^t$, *то справедлива оценка*

$$\sup_{\Delta[s,t]} \Big| \overleftarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} \big(\check{Y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + (l)x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}\big) \Big|_5 \leqslant C_4(T) < \infty. \tag{9}$$

Доказательство проводится аналогично замечанию 3 на основании замечания 1.

Лемма 3. *Для* A_2*-полугруппы* Y_s^t *справедливы оценки*

$$\sup_{\Delta[s,t]} \Big| \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} \big(Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + E\big) \Big|_5^2 \leqslant C_5(T) < \infty, \quad \sup_{\Delta[s,t]} \Big| \overleftarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} \big(Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + E\big) \Big|_5^2 \leqslant C_5(T) < \infty. \tag{10}$$

Доказательство. Обозначим $MY_s^t = y_s^t$ и, воспользовавшись свойствами аддитивных полугрупп Y_s^t, y_s^t и $\check{Y}_s^t = Y_s^t - y_s^t$ из работ [2, 5], при $a \in H$ запишем неравенство $M\,|(Y_s^t + E)\,a|_1^2 = M\,|\check{Y}_s^t a|_1^2 + |y_s^t a|_1^2$, из которого аналогично доказательству предыдущих лемм получаем соотношение

$$|Y_s^t + E|_5^2 = |\check{Y}_s^t + y_s^t + E|_5^2 \leqslant \varphi(t) - \varphi(s) + |y_s^t|_2(|y_s^t|_2 + 2) + \\ + 1 \leqslant \exp\{\varphi(t) - \varphi(s) + c_4(T)\operatorname*{var}_{[s,t]} y\}, \tag{11}$$

где $\operatorname*{var}_{[s,t]} y = \sup_{\Delta[s,t]} \sum_{k=1}^{m_n} |y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}|_2$.

Теперь оценки (10) вытекают из неравенства (11) очевидным образом.

Теорема 1. *Произвольная левая M_2-полугруппа X_s^t может быть восстановлена по своей инфинитезимальной $\check{A}_2$-полугруппе $\check{D}(X)_s^t = \check{Y}_s^t$ с помощью формулы*

$$X_s^t = \lim_{n\to\infty} \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (\check{Y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}), \tag{12}$$

где $x_s^t = MX_s^t$, а сходимость понимается в норме $|\cdot|_4$.

Доказательство. Предположим в начале, что X_s^t не имеет на $[0, T]$ скачков $X_{\tau-0}^{\tau+0}$, для которых $|x_{\tau-0}^{\tau+0} - E|_2 \geqslant 1$. Тогда по лемме 1 из [5] существует $(x_s^t)^{-1}$, и функция $|(x_s^t)^{-1}|_2$ ограничена при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. Запишем теперь равенство

$$\Big|X_s^t - \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (\check{Y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n})\Big|_4^2 = \Big|\overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (\check{Y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n})\Big|_4^2 =$$

$$= \Big|\sum_{k=1}^{m_n} \overrightarrow{\prod_{i=1}^{k-1}} X_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - \check{Y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}) \overrightarrow{\prod_{i=k+1}^{m_n}} (\check{Y}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + x_{t_{i-1}^n}^{t_i^n})\Big|_4^2 = \sum_{k=1}^{m_n} \Big|X_s^{t_{k-1}^n} \times$$

$$\times (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - \check{Y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}) \overrightarrow{\prod_{i=k+1}^{m_n}} (\check{Y}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + x_{t_{i-1}^n}^{t_i^n})\Big|_4^2 + \sum_{p\neq k} \operatorname{sp} M \Big(\overleftarrow{\prod_{i=p+1}^{m_n}} (\check{Y}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} +$$

$$+ x_{t_{i-1}^n}^{t_i^n})^* (\check{Y}_{t_{p-1}^n}^{t_p^n} + x_{t_{p-1}^n}^{t_p^n})^* \overleftarrow{\prod_{i=k+1}^{p-1}} (\check{Y}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + x_{t_{i-1}^n}^{t_i^n})^* (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - \check{Y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n})^* \times$$

$$\times \overleftarrow{\prod_{i=1}^{k-1}} (X_{t_{i-1}^n}^{t_i^n})^* \Big(\overrightarrow{\prod_{i=1}^{k-1}} X_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}\Big) X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \Big(\overrightarrow{\prod_{i=k-1}^{p-1}} X_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}\Big) (X_{t_{p-1}^n}^{t_p^n} - \check{Y}_{t_{p-1}^n}^{t_p^n} - x_{t_{p-1}^n}^{t_p^n}) \times$$

$$\times \overrightarrow{\prod_{i=p+1}^{m_n}} (\check{Y}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + x_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}) \tag{13}$$

и оценим каждую из двух сумм, стоящих в его правой части. Для этого прежде всего заметим, что вторая из этих сумм в силу теоремы работы [3] равна следующему выражению:

$$\sum_{p\neq k} \operatorname{sp} M \Big(\overleftarrow{\prod_{i=p+1}^{m_n}} (\check{Y}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + x_{t_{i-1}^n}^{t_i^n})^* (y_{t_{p-1}^n}^{t_p^n})^* \overleftarrow{\prod_{i=k+1}^{p-1}} (\check{Y}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + x_{t_{i-1}^n}^{t_i^n})^* \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} X^{\tau}_{t_{k-1}^n} d\check{Y}_0^{\tau} x_{\tau}^{t_k^n} - \int\limits_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} d\check{Y}_0^{\tau} \right\}^* (X_s^{t_{k-1}})^* X_s^{t_{k-1}^n} (X^{t_k^n}_{t_{k-1}^n} - x^{t_k^n}_{t_{k-1}^n}) \times$$

$$\times X^{t_{p-1}^n}_{t_k^n} \left\{ \int\limits_{t_{p-1}^n}^{t_p^n} X^{\tau}_{t_{p-1}^n} d\check{Y}_0^{\tau} x_{\tau}^{t_p^n} - \int\limits_{t_{p-1}^n}^{t_p^n} d\check{Y}_0^{\tau} \right\} \overrightarrow{\prod_{i=p+1}^{m_n}} (\check{Y}^{t_i^n}_{t_{i-1}^n} + x^{t_i^n}_{t_{i-1}^n}) \Big) =$$

$$= \sum_{p \neq k} \operatorname{sp} M \Big(\overleftarrow{\prod_{i=p+1}^{m_n}} (\check{Y}^{t_i^n}_{t_{i-1}^n} + x^{t_i^n}_{t_{i-1}^n})^* (\check{Y}^{t_p^n}_{t_{p-1}^n})^* \overleftarrow{\prod_{i=k+1}^{p-1}} (\check{Y}^{t_i^n}_{t_{i-1}^n} + x^{t_i^n}_{t_{i-1}^n})^* \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} (x_0^{t_{k-1}^n})^{-1} (x_0^{t_{k-1}^n} X^{\tau}_{t_{k-1}^n} (x_0^{\tau})^{-1} - E) x_0^{\tau} d\check{Y}_0^{\tau} x_{\tau}^{t_k^n} + \int\limits_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} (x_0^{t_{k-1}^n})^{-1} (x_0^{\tau} - x_0^{t_{k-1}^n}) \times \right.$$

$$\left. \times d\check{Y}_0^{\tau} x_{\tau}^{t_k^n} + \int\limits_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} d\check{Y}_0^{\tau} (x_0^{t_k^n} - x_0^{\tau})(x_0^{\tau})^{-1} \right\}^* (X_s^{t_{k-1}^n})^* X_s^{t_{k-1}^n} (x_0^{t_{k-1}^n})^{-1} [x_0^{t_{k-1}^n} X^{t_k^n}_{t_{k-1}^n} (x_0^{t_k^n})^{-1} -$$

$$- E] \, x_0^{t_k^n} X^{t_{p-1}^n}_{t_k^n} \left\{ \int\limits_{t_{p-1}^n}^{t_p^n} (x_0^{t_{p-1}^n})^{-1} (x_0^{t_{p-1}^n} X^{\tau}_{t_{p-1}^n} (x_0^{\tau})^{-1} - E) x_0^{\tau} d\check{Y}_0^{\tau} x_{\tau}^{t_p^n} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_{p-1}^n}^{t_p^n} (x_0^{t_{p-1}^n})^{-1} (x_0^{\tau} - x_0^{t_{p-1}^n}) d\check{Y}_0^{\tau} x_{\tau}^{t_p^n} + \int\limits_{t_{p-1}^n}^{t_p^n} d\check{Y}_0^{\tau} (x_0^{t_p^n} - x_0^{\tau}) (x_0^{\tau})^{-1} \right\} \times$$

$$\times \overrightarrow{\prod_{i=p+1}^{m_n}} (\check{Y}^{t_i^n}_{t_{i-1}^n} + x^{t_i^n}_{t_{i-1}^n}) \Big). \tag{14}$$

Используя теперь оценку (5) из работы [4], лемму 1 из работы [5], свойство (2.11) для функции $\mathscr{F}(t)$ из работы [6], теорему, доказанную в работе [3], и лемму 1, получаем неравенство

$$\mathscr{F}_l(t) - \mathscr{F}_l(s) = | X_0^t (x_0^t)^{-1} - X_0^s (x_0^s)^{-1} |_4^2 \leqslant | X_0^s |_5^2 | X_s^t - x_s^t |_4^2 | (x_0^t)^{-1} |^2 =$$

$$= | X_0^s |_5^2 \Big| \int\limits_s^t X_s^{\tau} d\check{Y}_0^{\tau} x_{\tau}^t \Big|_4^2 | (x_0^t)^{-1} |_2^2 \leqslant c_5(T) (\varphi(t) - \varphi(s)), \tag{15}$$

где $c_5(T)$ — некоторая константа.

Учитывая при этом оценку (16) из работы [2], а также доказанную в ней одновременную одностороннюю непрерывность в каждой точке функций $\mathscr{F}_l(t)$ и $f(t) = \sup\limits_{\Delta[0,t]} \sum\limits_{k=1}^{m_n} | x_0^{t_k^n} - x_0^{t_{k-1}^n} |_2$, легко видеть, что функции $\mathscr{F}_l(t)$, $f(t)$ и $\varphi(t)$ одновременно непрерывны в каждой точке $\tau \in [0, T]$ слева или справа в зависимости от τ. Снова используя оценку (5) из [4], лемму 1 из [5] и обозначения работы [9], легко видеть, что $| \cdot |_4^2$ от выражения, стоящего в первых фигурных скобках правой части равенства (14), ограничена величиной

$$c_6(T)(l) \int\limits_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} (\mathscr{F}_l(\tau) - \mathscr{F}_l(t_{k-1}^n)) \, d\varphi(\tau) + c_7(T)(l) \int\limits_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} (f(\tau) - f(t_{k-1}^n)) \, d\varphi(\tau) +$$

$$+ c_8(T)\,(r)\int\limits_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}(f(t_k^n)-f(\tau))\,d\varphi(\tau)\leqslant c_9(T)\,(l)\int\limits_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}(\mathscr{F}(\tau)-\mathscr{F}(t_{k-1}^n))\,dF(\tau)+$$

$$+ c_{10}(T)\,(r)\int\limits_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}(\mathscr{F}(t_k^n)-\mathscr{F}(\tau))\,d\mathscr{F}(\tau), \qquad (16)$$

где $c_i(T)$, $i=\overline{6,10}$ — некоторые константы, а функция $F(t)=\mathscr{F}_l(t)+\varphi(t)+f(t)$ неотрицательна, монотонно возрастает и непрерывна в каждой точке $\tau\in[0,T]$ слева или справа в зависимости от этой точки. Аналогично оценивается $|\cdot|_4^2$ от выражения, стоящего во вторых фигурных скобках правой части равенства (14).

Теперь, учитывая оценки (1) и (5), неравенства (2.8) и (2.10) из [6], а также свойство аддитивности левого и правого интеграла Стильтьеса, доказанные в [8], легко видеть, что модуль правой части выражения (14) ограничен величиной

$$C_6(T)\Big(\sum_{p\neq k}|\check{Y}_{t_{p-1}}^{t_p}|_4\,|\,(l)\int\limits_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}(F(\tau)-F(t_{k-1}^n))\,dF(\tau)+(r)\int\limits_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}(F(t_k^n)-F(\tau))\,dF(\tau)|^{1/2}\times$$

$$\times|x_0^{t_{k-1}^n}X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}(x_0^{t_k^n})^{-1}-E|_4\,|\,(l)\int\limits_{t_{p-1}^n}^{t_p^n}(F(\tau)-F(t_{k-1}^n))\,dF(\tau)+(r)\int\limits_{t_{p-1}^n}^{t_p^n}(F(t_p^n)-$$

$$-F(\tau))\,dF(\tau)|^{1/2}\leqslant C_6(T)\sum_{p\neq k}(F(t_p^n)-F(t_{p-1}^n))^{1/2}\,(l)\int\limits_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}(F(\tau)-F(t_{k-1}^n))\,dF(\tau)+$$

$$+(r)\int\limits_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}(F(t_k^n)-F(\tau))\,dF(\tau)\,|^{1/2}(F(t_k^n)-F(t_{k-1}^n))^{1/2}\,|\,(l)\int\limits_{t_{p-1}^n}^{t_p^n}(F(\tau)-(t_{p-1}^n))\times$$

$$\times\,dF(\tau)+(r)\int\limits_{t_{p-1}^n}^{t_p^n}(F(t_p^n)-F(\tau))\,dF(\tau)\,|^{1/2}\leqslant C_6(T)\Big(\sum_{k=1}^{m_n}(F(t_k^n)-F(t_{k-1}^n))^{1/2}\times$$

$$\times\Big|(l)\int\limits_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}(F(\tau)-F(t_{k-1}^n))\,dF(\tau)+(r)\int\limits_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}(F(t_k^n)-F(\tau))\,dF(\tau)\,\Big|^{1/2}\Big)^2\leqslant$$

$$\leqslant C_6(T)\,F(T)\Big(\Big|(l)\int\limits_s^t F(\tau)\,dF(\tau)-\sum_{k=1}^{m_n}F(t_{k-1}^n)(F(t_k^n)-F(t_{k-1}^n))\Big|+$$

$$+\Big|(r)\int\limits_s^t F(\tau)\,dF(\tau)-\sum_{k=1}^{m_n}F(t_k^n)(F(t_k^n)-F(t_{k-1}^n))\Big|,$$

которая стремится к нулю при $n\to\infty$ в силу доказанных выше свойств функции $F(t)$ и результатов работы [8]. Здесь $C_6(T)$ — некоторая константа.

Оценивая первое слагаемое в правой части равенства (13), аналогично предыдущему (см. (16)), запишем соотношение

$$\sum_{k=1}^{m_n}\Big|X_s^{t_{k-1}^n}(X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}-\check{Y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}-x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n})\prod_{i=k+1}^{\overrightarrow{m_n}}(\check{Y}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}+x_{t_{i-1}^n}^{t_i^n})\Big|_4^2\leqslant$$

$$\leqslant C_1^2(T)\,C_2^2(T)\,c_9(T)\sum_{k=1}^{m_n}\Big((l)\int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}(F(\tau)-F(t_{k-1}^n))\,dF(\tau)+(r)\int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}(F(t_k^n)-$$

$$-F(\tau))\,dF(\tau)\Big)=C_7(T)\Big((l)\int_s^t F(\tau)\,dF(\tau)-\sum_{k=1}^{m_n}F(t_{k-1}^n)(F(t_k^n)-F(t_{k-1}^n))+$$

$$+(r)\int_s^t F(\tau)\,dF(\tau)-\sum_{k=1}^{m_n}(F(t_k^n)(F(t_k^n)-F(t_{k-1}^n))\Big)\to 0 \text{ при } n\to\infty. \quad (17)$$

Итак, для случая, когда M_2-полугруппа X_s^t не имеет скачков $X_{\tau-0}^{\tau+0}$ для которых $|x_{\tau-0}^{\tau+0}-E|_2\geqslant 1$, теорема доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы в общем случае. Аналогично работе [2] представим X_s^t в виде $X_s^t=\overline{X}_s^t\overrightarrow{\boxtimes}\tilde{X}_s^t$, где M_2-полугруппа $\overline{X}_s^t$ не содержит скачков в точках $\tau_i\in[0,T]$, упорядоченных по возрастанию, для которых $|x_{\tau_i-0}^{\tau_i+0}-E|\geqslant 1$, $i=\overline{1,N}$, а M_2-полугруппа $\tilde{X}_s^t$ является произведением конечного числа N этих скачков. Тогда по доказанному $\overline{X}_s^t=\lim\limits_{n\to\infty}\overrightarrow{\prod\limits_{k=1}^{m_n}}(\overline{\check{Y}}{}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+\overline{x}{}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n})$ и этот предел не зависит от измельчающейся последовательности разбиений $\{\Delta_n\,[s,t]\}$. Здесь $\overline{\check{Y}}{}_s^t=\check{D}\,(\overline{X})_s^t$, $\overline{x}_s^t=M\overline{X}_s^t$. Легко видеть, что $\overline{X}_s^t$ в точках τ_i непрерывна, т. е. $\overline{X}_{\tau_i-0}^{\tau_i+0}=\overline{X}_{\tau_i}^{\tau_i+0}=\overline{X}_{\tau_i-0}^{\tau_i}=E\,(\mathrm{mod}\,P)$, $i=\overline{1,N}$. Из результатов работы [5], оценок (16) работы [2] и (15) следует, что $\overline{Y}_s^t$ и $\overline{x}_s^t$ также непрерывны в точках τ_i, $i=\overline{1,N}$, а поскольку $N<\infty$, то $\tilde{X}_s^t=\overrightarrow{\prod\limits_{i=1}^{N}}X_{\tau_i-0}^{\tau_i+0}=\overrightarrow{\prod\limits_{i=1}^{N}}(\check{Y}_{\tau_i-0}^{\tau_i+0}+x_{\tau_i-0}^{\tau_i+0})$, где согласно работе [2] $\check{Y}_s^t=\check{D}\,(X)_s^t$, $x_s^t=MX_s^t$. Поэтому

$$X_s^t=\overline{X}_s^t\overrightarrow{\boxtimes}\tilde{X}_s^t=\lim_{n\to\infty}\overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}}\overline{X}{}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}\tilde{X}{}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}=\overline{X}_s^{\tau_1-0}\tilde{X}_{\tau_1-0}^{\tau_1+0}\overline{X}_{\tau_1+0}^{\tau_2-0}\ldots\tilde{X}_{\tau_N-0}^{\tau_N+0}\overline{X}_{\tau_N+0}^t=$$

$$=X_s^{\tau_1-0}X_{\tau_1-0}^{\tau_1+0}X_{\tau_1+0}^{\tau_2-0}\ldots X_{\tau_N-0}^{\tau_N+0}X_{\tau_N+0}^t=X_s^{\tau_1-0}(\check{Y}_{\tau_1-0}^{\tau_1+0}+x_{\tau_1-0}^{\tau_1+0})\,X_{\tau_1+0}^{\tau_2-0}\ldots$$

$$\ldots(\check{Y}_{\tau_N-0}^{\tau_N+0}+x_{\tau_N-0}^{\tau_N+0})\,X_{\tau_N+0}^t=\lim_{n\to\infty}\overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}}(\check{Y}{}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}).$$

Теорема 2. *Произвольная левая M_2-полугруппа X_s^t может быть восстановлена по своей инфинитезимальной A_2-полугруппе $Y_s^t=D\,(X)_s^t$ с помощью формулы*

$$X_s^t=\lim_{n\to\infty}\overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}}(Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+E), \quad (18)$$

где сходимость понимается в норме $\|\cdot\|$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что для двух независимых случайных величин ξ и η со значениями в $X\,(H)$, удовлетворяющих условиям $|\xi|_5<\infty$, $\|\eta\|<\infty$, справедливо неравенство

$$\|\xi\eta\|\leqslant|\xi|_5\,\|\eta\|. \quad (19)$$

Действительно, согласно работе [6, с. 50], это вытекает из соотношения $\|\xi\eta\|=M\sup\limits_{a\in H,|a|_1\leqslant 1}|\xi\eta a|_1=M\sup\limits_{a\in H,|a|_1\leqslant 1}(\xi^*\xi\eta a,\eta a)=M\sup\limits_{a\in H,|a|_1\leqslant 1}((M\xi^*\xi)\,\eta a,\eta a)=$

$= M \sup_{a \in H, |a|_1 \leqslant 1} |(M\xi^*\xi)^{1/2}\eta a|_1^2 \leqslant |(M\xi^*\xi)^{1/2}|_2^2 M|\eta|_2^2 = |\xi|_5^2 \|\eta\|^2$. Теперь, воспользовавшись оценкой (19), а также результатами рабст [5, 9], теоремой 1 и оценкой (10), запишем следующее соотношение:

$$\left\| \prod_{k=1}^{\overrightarrow{m_n}} \left(Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + E\right) - \prod_{k=1}^{\overrightarrow{m_n}} \left(\check{Y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}\right) \right\| = \left\| \prod_{k=1}^{\overrightarrow{m_n}} \left(\check{Y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + E\right) - \right.$$

$$\left. - \prod_{k=1}^{\overrightarrow{m_n}} \left(\check{Y}_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}\right) \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{m_n} \left| \prod_{i=1}^{\overrightarrow{k-1}} \left(\check{Y}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + y_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + E\right) \right|_5 \left| x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E \right|_2 \times$$

$$\times \left\| \prod_{i=k+1}^{\overrightarrow{m_n}} \left(\check{Y}_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + x_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}\right) \right\| \leqslant C_5(T)\, C_8(T) \sum_{k=1}^{m_n} \left| x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E \right|_2 =$$

$$= C_9(T) \sum_{k=1}^{m_n} \left| \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \left(x_{t_{k-1}^n}^{\tau} - E\right) dy_0^{\tau} \right|_2 = C_9(T) \sum_{k=1}^{m_n} \left| \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \int_{t_{k-1}^n}^{\tau} x_{t_{k-1}^n}^{\sigma}\, dy_0^{\sigma} dy_0^{\tau} \right|_2 \leqslant$$

$$\leqslant C_{10}(T) \sum_{k=1}^{m_n} (l) \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \left(\psi(\tau) - \psi(t_{k-1}^n)\right) d\psi(\tau) = C_{10}(T) \left((l) \int_s^t \psi(\tau)\, d\psi(\tau) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{m_n} \psi(t_{k-1}^n)\left(\psi(t_k^n) - \psi(t_{k-1}^n)\right) \right),$$

где $\psi(t) = \sup_{\Delta[0,t]} \sum \left| y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \right|_2$, а $C_8(T)$, $C_9(T)$ и $C_{10}(T)$ — некоторые константы, причем функция $\psi(t)$ неотрицательна, монотонно возрастает и непрерывна в каждой точке $\tau \in [0, T]$ в норме $|\cdot|_2$ либо слева, либо справа в зависимости от точки τ. Последнее вытекает из условий (20) и (23) в [2].

Следствие 3. *Формулы (22) работы [2] и (17) устанавливают взаимно-однозначное отображение D между множествами $\mathfrak{M}_2[0, T]$ всех M_2-полугрупп и $\mathfrak{N}_2[0, T]$ — всех A_2-полугрупп на отрезке $[0, T]$.*

Замечание 4. Если вместо M_2- и A_2-полугрупп рассматривать M_3- и A_3-полугруппы (см. [2]), то следствие 3 остается справедливым, причем сходимость в формулах (22) работы [2] и (17) можно понимать в норме $|\cdot|_4$.

Замечание 5. Теоремы 1 и 2 верны для правых M_2- и M_3-полугрупп.

1. *Буцан Г. П., Буцан С. П.* Неоднородные стохастические полугруппы // Укр. мат. журн.— 1981.— 33, № 4.— С. 437—443.
2. *Буцан Г. П.* Об инфинитезимальных полугруппах для стохастических полугрупп без условий непрерывности и мартингальности // Там же.— 1985.— 37, № 3.— С. 285—294.
3. *Буцан Г. П.* Интегральное представление мультипликативной стохастической полугруппы без условий непрерывности и мартингальности // Там же. — № 5. С. 562—568.
4. *Буцан Г. П.* Изоморфизм мультипликативных и аддитивных стохастических полугрупп без условий непрерывности и мартингальности // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1985.— № 12.— С. 3—6.
5. *Каратаева Т. В., Буцан Г. П.* Об изоморфизме мультипликативных и аддитивных параметрических полугрупп без условий непрерывности // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, № 2.— С. 168—175.
6. *Буцан Г. П.* Стохастические полугруппы.— Киев: Наук. думка, 1977.— 213 с.
7. *Каратаева Т. В.* Соотношение между левыми и правыми мультипликативными полугруппами без условий непрерывности // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1985.—№ 12.— С. 24—28.
8. *Буцан Г. П.* Необходимое и достаточное условие существования интеграла Стильтьеса для функций ограниченной вариации // Там же.— 1984.— № 12.— С. 3—6.
9. *Каратаева Т. В.* Интегральное представление мультипликативных систем без условия непрерывности // Укр. мат. журн.— 1986.— 38, № 2.— С. 238—241.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 08.02.85