УДК 517.92

И. Н. Щитов

Об одном обобщении теоремы А. Н. Тихонова

Как показал А. Н. Тихонов [1], для системы с малым параметром при старшей производной

$$dx/d\tau = X(z, x, \tau), \quad \varepsilon dz/d\tau = Z(z, x, \tau) \tag{1}$$

можно построить асимптотику решения задача Коши, если известен устойчивый корень $z = \varphi(x, \tau)$ уравнения $Z(z, x, \tau) = 0$, или, иными словами, если $z = \varphi(x, \tau)$ — асимптотически устойчивая точка покоя присоединенной системы $dz/dt = Z(z, x, \tau)$.

В настоящей работе предлагается некоторое обобщение этого результата, заключающееся в том, что вместо (1) рассматривается система более общего вида

$$dx/d\tau = X(\tau/\varepsilon, z, x, \tau), \quad \varepsilon dz/d\tau = Z(\tau/\varepsilon, z, x, \tau), \tag{2}$$

а точка покоя заменяется решением $z = \varphi(t, x, \tau)$ присоединенной системы ($x = \mathrm{const}$, $\tau = \mathrm{const}$)

$$dz/dt = Z(t, z, x, \tau). \tag{3}$$

Будем требовать, чтобы решение $z = \varphi(t, x, \tau)$ было равномерно притягивающим, поскольку, как показывают простые примеры, асимптотической устойчивости в этом случае недостаточно. (Известно [2], что для точек покоя автономной системы асимптотическая устойчивость и равномерное притяжение эквивалентны.)

Случай автономной системы с использованием вместо точки покоя периодического решения $z = \varphi(t, x)$ присоединенной системы и дальнейшим усреднением изучался при других условиях устойчивости в работе [3]. Отметим также, что системы, содержащие «быстрое время» τ/ε только в правых частях уравнений для медленных переменных, рассматривались в [4].

Пусть выполнены следующие условия:

1. Функции $X(t, z, x, \tau)$ и $Z(t, z, x, \tau)$ определены и непрерывны в области $Q \subset [0, \infty) \times R^m \times R^n \times [0, T_0]$ и удовлетворяют в этой области условию Липшица по z, x, τ, функция $X(t, z, x, \tau)$ ограничена.

2. Для любых $(x, \tau) \in \Omega$, где Ω — некоторая область в $R^n \times [0, T_0]$, присоединенная система (3) имеет определенное для всех $t \geqslant 0$ решение $z = \varphi(t, x, \tau)$ такое, что 1) $\forall t \geqslant 0$ кривая $(t, \varphi(t, x, \tau), x, \tau)$ лежит в Q вместе с некоторой ρ-окрестностью; 2) решение $\varphi(t, x, \tau)$ равномерно притягивающее [2], причем в условие равномерности входит равномерность по параметрам x, τ; 3) функция $\varphi(t, x, \tau)$ удовлетворяет условию Липшица по x.

3. Точка z_0 принадлежит области влияния решения $z = \varphi(t, x_0, 0)$ системы

$$dz/dt = Z(t, z, x_0, 0), \tag{4}$$

т. е. если $z = z^0(t)$ — решение системы (4), удовлетворяющее начальному условию $z^0(0) = z_0$, то 1) $(t, z^0(t), x_0, 0) \in Q$ и 2) $z^0(t) - \varphi(t, x_0, 0) \to 0$ при $t \to \infty$.

4. Рассмотрим наряду с системой (2) систему

$$dy/d\tau = X(\tau/\varepsilon, \varphi(\tau/\varepsilon, y, \tau), y, \tau). \tag{5}$$

Пусть для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ решение $y = y(\tau, \varepsilon)$ системы (5), удовлетворяющее начальному условию $y(0) = x_0$, определено для $\tau \in [0, T_0]$ и $(y(\tau, \varepsilon), \tau) \in \Omega^0$, где Ω^0 — внутренность Ω.

Справедлив следующий результат, являющийся непосредственным обобщением теоремы А. Н. Тихонова [1, 5] на случай систем вида (2).

Теорема. *Если выполнены условия 1—4, то для любого $\eta > 0$ найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ решение $x(\tau, \varepsilon)$, $z(\tau, \varepsilon)$ системы*

(2), *удовлетворяющее начальным условиям* $x(0, \varepsilon) = x_0$, $z(0, \varepsilon) = z_0$, *определено на* $[0, T_0]$ *и удовлетворяет на этом отрезке неравенствам*

$$\| x(\tau, \varepsilon) - y(\tau, \varepsilon) \| \leqslant \eta, \tag{6}$$

$$\| z(\tau, \varepsilon) - \varphi(\tau/\varepsilon, y(\tau, \varepsilon), \tau) - z^0(\tau/\varepsilon) + \varphi(\tau/\varepsilon, x_0, 0) \| \leqslant \eta. \tag{7}$$

В частности, существует $t_1 > 0$ *такое, что для* $\tau \in [\varepsilon t_1, T_0]$

$$\| z(\tau, \varepsilon) - \varphi(\tau/\varepsilon, y(\tau, \varepsilon), \tau) \| \leqslant \eta.$$

Доказательство этой теоремы основано на следующей лемме.

Лемма. *Для любого* $\delta > 0$ *существует* $\varepsilon_0 > 0$, *такое, что для* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *справедливо неравенство*

$$\| z(\tau, \varepsilon) - \varphi(\tau/\varepsilon, x(\tau, \varepsilon), \tau) - z^0(\tau/\varepsilon) + \varphi(\tau/\varepsilon, x_0, 0) \| \leqslant \delta \tag{8}$$

для $\tau \geqslant 0$ *до тех пор, пока* $(x(\tau, \varepsilon), \tau) \in \Omega$.

Доказательство леммы. Введем новую независимую переменную $t = \varepsilon^{-1}\tau$. При этом решение $x(\tau, \varepsilon)$, $z(\tau, \varepsilon)$ системы (2) перейдет в решение $\bar{x}(t, \varepsilon) = x(\varepsilon t, \varepsilon) = x(\tau, \varepsilon)$, $\bar{z}(t, \varepsilon) = z(\varepsilon t, \varepsilon) = z(\tau, \varepsilon)$ системы

$$dx/dt = \varepsilon X(t, z, x, \varepsilon t), \quad dz/dt = Z(t, z, x, \varepsilon t), \tag{9}$$

а отрезок $[0, T_0]$ — в отрезок $[0, T_0/\varepsilon]$.

Обозначив через $\psi(t, t_0, z, x, \tau)$ решение присоединенной системы (3), удовлетворяющее начальному условию $z(t_0) = z$ и задавшись числом $\delta > 0$, выберем, пользуясь тем, что $\varphi(t, x, \tau)$ — равномерно притягивающее решение (3), число $T > 0$ таким, чтобы из неравенства

$$\| z - \varphi(t_0, x, \tau) \| \leqslant \delta/2 \tag{10}$$

следовало неравенство

$$\| \psi(t, t_0, z, x, \tau) - \varphi(t, x, \tau) \| \leqslant \delta/4 \quad \forall t \geqslant t_0 + T. \tag{11}$$

По теореме о непрерывной зависимости решений от параметра, если ε_0 достаточно мало, то $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$ выполняются неравенства

$$\| \bar{z}(t, \varepsilon) - \psi(t, t_0, \bar{z}(t_0, \varepsilon), \bar{x}(t_0, \varepsilon), \varepsilon t_0) \| \leqslant \delta/8, \tag{12}$$

$$\| \varphi(t, \bar{x}(t, \varepsilon), \varepsilon t) - \varphi(t, \bar{x}(t_0, \varepsilon), \varepsilon t_0) \| \leqslant \delta/8. \tag{13}$$

Наконец, так как точка z_0 принадлежит области влияния решения $\varphi(t, x_0, 0)$, существует число $t_1 > 0$, для которого

$$\| z^0(t) - \varphi(t, x_0, 0) \| \leqslant \delta/4 \quad \forall t \geqslant t_1. \tag{14}$$

Разобьем отрезок $[0, T_0/\varepsilon]$ точками $t_0 = 0$, t_1, $t_{l+1} = t_l + T$, $l = 1, \ldots, N(\varepsilon)$, и докажем индукцией по l, что на каждом из отрезков $[t_l, t_{l+1}]$ справедливо неравенство

$$\| \bar{z}(t, \varepsilon) - \varphi(t, \bar{x}(t, \varepsilon), \varepsilon t) - z^0(t) + \varphi(t, x_0, 0) \| \leqslant \delta, \tag{15}$$

равносильное (8).

Пользуясь теоремой о непрерывной зависимости решений от параметра, выберем ε_0 настолько малым, чтобы $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и $\forall t \in [0, t_2]$

$$\| \bar{z}(t, \varepsilon) - z^0(t) \| \leqslant \delta/8 \tag{16}$$

и

$$\| \varphi(t, \bar{x}(t, \varepsilon), \varepsilon t) - \varphi(t, x_0, 0) \| \leqslant \delta/8. \tag{17}$$

Из этих неравенств сразу следует (15) для $t \in [0, t_2]$. Заметим теперь, что для доказательства (15) на отрезке $[t_1, T_0/\varepsilon]$ достаточно доказать, что на этом отрезке

$$\| \bar{z}(t, \varepsilon) - \varphi(t, \bar{x}(t, \varepsilon), \varepsilon t) \| \leqslant \delta/2, \tag{18}$$

так как вместе с (14) это приводит к (15). Для $t \in [t_1, t_2]$ неравенство (18) вытекает из (14), (16) и (17).

Допустим, что (15) выполняется для $t \in [t_{l-1}, t_l]$, и докажем его справедливость для $t \in [t_l, t_{l+1}]$.

Пусть t^* — произвольная точка отрезка $[t_l, t_{l+1}]$. Полагая $t_0 = t^* - T$, получаем, что $t_0 \in [t_{l-1}, t_l]$ и по индуктивному предположению $\| \bar{z}(t_0, \varepsilon) - \varphi(t_0, \bar{x}(t_0, \varepsilon), \varepsilon t_0) \| \leqslant \delta/2$. В силу выбора T отсюда следует

$$\| \psi(t^*, t_0, \bar{z}(t_0, \varepsilon), \bar{x}(t_0, \varepsilon), \varepsilon t_0) - \varphi(t^*, \bar{x}(t_0, \varepsilon), \varepsilon t_0) \| \leqslant \delta/4. \tag{19}$$

С другой стороны, используя (12) и (13), получаем

$$\| \bar{z}(t^*, \varepsilon) - \psi(t^*, t_0, \bar{z}(t_0, \varepsilon), \bar{x}(t_0, \varepsilon), \varepsilon t_0) \| \leqslant \delta/8, \tag{20}$$

$$\| \varphi(t^*, \bar{x}(t^*, \varepsilon), \varepsilon t^*) - \varphi(t^*, \bar{x}(t_0, \varepsilon), \varepsilon t_0) \| \leqslant \delta/8. \tag{21}$$

Неравенства (19) — (21) дают неравенство (18) в точке t^*. Поскольку это произвольная точка отрезка $[t_l, t_{l+1}]$, (18) доказано для $[t_l, t_{l+1}]$, что заканчивает доказательство леммы.

Доказательство теоремы. Как следует из условий теоремы для $\tau \in [0, T_0]$ кривые $(y(\tau, \varepsilon), \tau)$ и $(\tau/\varepsilon, \varphi(\tau/\varepsilon, y(\tau, \varepsilon), \tau) + z^0(\tau/\varepsilon) - \varphi(\tau/\varepsilon, x_0, 0), y(\tau, \varepsilon), \tau)$ лежат в Ω^0 и Q соответственно вместе с некоторыми ρ-окрестностями.

Обозначим через $[0, T(\varepsilon)]$ максимальный отрезок из $[0, T_0]$, на котором выполняются неравенства

$$\| x(\tau, \varepsilon) - y(\tau, \varepsilon) \| \leqslant \rho,$$

$$\| z(\tau, \varepsilon) - \varphi(\tau/\varepsilon, y(\tau, \varepsilon), \tau) - z^0(\tau/\varepsilon) + \varphi(\tau/\varepsilon, x_0, 0) \| \leqslant \rho$$

(поскольку по теореме о продолжении решений [6] решение $x(\tau, \varepsilon)$, $z(\tau, \varepsilon)$ определено вплоть до границы области Q, на отрезке $[0, T(\varepsilon)]$ оно определено).

Считая $\eta \leqslant \rho/2$, докажем, что если ε_0 достаточно мало, то для $\tau \in [0, T(\varepsilon)]$ справедливы неравенства (6) и (7), откуда сразу будет, в частности, следовать $T(\varepsilon) = T_0$.

Пусть $L \geqslant 1$ — общая для встречающихся дальше функций постоянная, входящая в условие Липшица, $\delta = \min\left(\dfrac{\eta}{2}, \dfrac{\eta}{4L^2 T_0 \exp LT_0}\right)$ и числа t_1 и ε_0 выбраны по δ, как в доказательстве леммы.

Если $\tau \in [0, \varepsilon t_1]$, то справедливость (6) и (7) для достаточно малых ε_0 очевидна.

Предполагая, что $\tau \in [\varepsilon t_1, T(\varepsilon)]$, переходя от (2) и (5) к интегральным уравнениям и используя неравенство (18) леммы, имеем

$$\| x(\tau, \varepsilon) - y(\tau, \varepsilon) \| \leqslant \left\| \int_0^{\varepsilon t_1} [X(\tau/\varepsilon, z(\tau, \varepsilon), x(\tau, \varepsilon), \tau) - X(\tau/\varepsilon, \varphi(\tau/\varepsilon, y(\tau, \varepsilon), \tau),$$

$$y(\tau, \varepsilon), \tau)] \, d\tau \right\| + \left\| \int_{\varepsilon t_1}^{\tau} [X(\tau/\varepsilon, z(\tau, \varepsilon), x(\tau, \varepsilon), \tau) - X(\tau/\varepsilon, \varphi(\tau/\varepsilon, y(\tau, \varepsilon), \tau),$$

$$y(\tau, \varepsilon), \tau)] \, d\tau \right\| \leqslant C\varepsilon + \int_{\varepsilon t_1}^{\tau} \| X(\tau/\varepsilon, z(\tau, \varepsilon), x(\tau, \varepsilon), \tau) - X(\tau/\varepsilon, \varphi(\tau/\varepsilon, x(\tau, \varepsilon), \tau),$$

$$x(\tau, \varepsilon), \tau) \| \, d\tau + \int_{\varepsilon t_1}^{\tau} \| X(\tau/\varepsilon, \varphi(\tau/\varepsilon, x(\tau, \varepsilon), \tau), x(\tau, \varepsilon), \tau) - X(\tau/\varepsilon, \varphi(\tau/\varepsilon,$$

$$y(\tau, \varepsilon), \tau), y(\tau, \varepsilon), \tau) \| \, d\tau \leqslant C\varepsilon + LT_0\delta/2 + L \int_0^{\tau} \| x(\tau, \varepsilon) - y(\tau, \varepsilon) \| \, d\tau.$$

Применяя к этому неравенству лемму Гронуолла — Беллмана, получаем

$$\| x(\tau, \varepsilon) - y(\tau, \varepsilon) \| \leqslant \left(C\varepsilon + LT_0 \frac{\delta}{2} \right) e^{LT_0} \leqslant C\varepsilon e^{LT_0} + \frac{\eta}{4L} \leqslant \frac{\eta}{2L},$$

если ε_0 достаточно мало. Это сразу дает неравенство (6), а вместе с неравенством (8) леммы и неравенство (7). Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим систему с одной степенью свободы, в которой инерционные и диссипативные силы значительно больше остальных сил:

$$\frac{d}{dt}\left(m(t)\frac{dz}{dt}\right)+\frac{d}{dt}(\lambda(t)z)+\varepsilon f\left(t, z, \frac{dz}{dt}\right)=0. \tag{22}$$

Полагая $x = m(t)\dot z + \lambda(t)z$, сведем (22) к системе двух скалярных уравнений

$$dx/dt = -\varepsilon f(t, z, m^{-1}(t)(x-\lambda(t)z)), \quad m(t)\,dz/dt+\lambda(t)z = x. \tag{23}$$

Отметим, что замена $\tau=\varepsilon t$ приводит систему (23) к виду (2). Пусть $m(t)\geqslant m_0>0$, $\lambda(t)\geqslant\lambda_0>0$, тогда присоединенное уравнение $m(t)dz/dt+\lambda(t)z=x$ имеет равномерно притягивающее решение вида $z=\varphi(t)x$. Определяя $y(t,\varepsilon)$ как решение уравнения $dy/dt=-\varepsilon f(t, \varphi(t)y, m^{-1}(t)(1-\lambda(t)\varphi(t))y)$, соответствующее начальному условию $y(0,\varepsilon)=x_0=m(0)\dot z_0+\lambda(0)z_0$, получаем, что при $\varepsilon\to 0$ для $t\in[0, T_0/\varepsilon]$

$$z(t,\varepsilon)=\varphi(t)y(t,\varepsilon)+\exp\left[-\int_0^t\frac{\lambda(t)}{m(t)}\,dt\right](z_0-\varphi(0)x_0)+o(1).$$

1. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных // Мат. сб.— 1952.— **31**, № 3.— С. 575—586.
2. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.— М.: Мир, 1980.— 302 с.
3. *Понтрягин Л. С., Родыгин Л. В.* Приближенное решение одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // Докл. АН СССР.— 1960.— **131**, № 2.— С. 255—258.
4. *Задирака К. В.* Исследование решения системы нелинейных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при некоторых производных // Укр. мат. журн.— 1958.— **10**, № 2.— С. 121—127.
5. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М.: Наука, 1973.— 272 с.
6. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1970.— 720 с.

Днепропетр. ун-т Получено 09.09.84