УДК 519.21

Л. М. Сахно

Локальные времена однородных изотропных случайных полей типа хи-квадрат

Для однородных изотропных случайных полей типа хі-квадрат с сильной зависимостью рассматривается локальное время относительно шаров $v(r) \subset R^n$. Исследуется предельное распределение локального времени при $r \to \infty$.

Для однорідних ізотропних випадкових полів типу хі-квадрат з сильною залежністю розглядається локальний час відносно куль $v(r) \subset R^n$. Досліджується граничний розподіл локального часу, коли $r \to \infty$.

С. Берман [1] при помощи ортогонального разложения локального времени получил предельные теоремы для локального времени гауссовского стационарного процесса. В статье [2] эти результаты были обобщены на случай однородного изотропного гауссовского случайного поля с сильной зависимостью. В настоящей работе, примыкающей к работам [1, 2], изучаются предельные распределения локальных времен полей типа хи-квадрат.

Пусть $X_1(t), \ldots, X_m(t)$, $t \in R^N$,— независимые копии гауссовского однородного изотропного случайного поля со средним 0, дисперсией 1 и непрерывной корреляционной функцией $r(z)$.

Рассмотрим поле

$$X(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} X_i^2(t). \tag{1}$$

Одно- и двухмерная плотности поля (1) имеют следующий вид:

$$p(x) = \begin{cases} x^{m/2-1}e^{-x}\Gamma^{-1}(m/2), & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

и

$$p_{s,t}(x, y) = \Gamma^{-1}(m/2)(xy/\gamma)^{(m-2)/4}(1-\gamma)^{-1}\times$$
$$\times\exp\{-(x+y)/(1-\gamma)\}\, I_{m/2-1}(2\sqrt{\gamma xy}/(1-\gamma)), \tag{2}$$

где $\gamma = \gamma(|t-s|) = r^2(|t-s|)$ — корреляционная функция поля (1), $I_\nu(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка ν [1].

Двухмерная плотность (2) может быть представлена также в виде

$$p_{s,t}(x, y) = p(x)\, p(y) \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{m/2-1}(x)\, L_n^{m/2-1}(y) r^{2n}(|s-t|),$$

где $L_n^\alpha(x) = \tilde{L}_n^\alpha(x)\{n!\,\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma^{-1}(n+\alpha+1)\}^{1/2}$, $\tilde{L}_n^\alpha(x) = (n!)^{-1} x^{-\alpha} e^x \times \times \frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha} e^{-x})$ — обобщенные полиномы Лагерра.

Пусть $\mathfrak{B}^N$ — σ-алгебра борелевских множеств R^N, λ_N — мера Лебега на $(R^N, \mathfrak{B}^N)$, $|\cdot|$ — евклидова норма в R^N, $v(r) = \{t \in R^N : |t| < r\}$, $|v(r)|$ — объем шара $v(r)$, $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — система полиномов Чебышева — Эрмита со старшим коэффициентом, равным единице.

Локальное время измеримого случайного поля $X(t)$, $t \in R^N$, определим как производную Радона—Никодима случайной меры

$$\nu_T(A) = \lambda_N\{t \in T : X(t) \in A\} = \int_T I\{X(t) \in A\}\, dt,$$

где $T \in \mathfrak{B}^N$, $A \in \mathfrak{B}^1$, I — индикаторная функция (при условии, что производная существует).

Аналогично случаю $N = 1$ [1] можно показать, что при выполнении условия

$$\int_{v(r)} \int_{v(r)} (1 - r(|t-s|))^{-1/2}\, dt ds < \infty \tag{3}$$

локальное время $\alpha_{v(r)}(u)$ поля (1) относительно шара $v(r)$ существует, и при $m \geqslant 3$ с вероятностью 1 имеет место разложение

$$\alpha_{v(r)}(u) = p(u) \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{m/2-1}(u) \int_{v(r)} L_n^{m/2-1}(X(t))\, dt.$$

Пусть

$$\sigma_2^2(r) = \int_{v(r)} \int_{v(r)} r^2(|t-s|)\, dt ds = c r^N \int_0^{2r} z^{N-1} r^2(z)\, I_{\varkappa(r,z)}((N+1)/2, 1/2)\, dz,$$

где $c = 4\pi^N N^{-1} \Gamma^{-2}(N/2)$, $\varkappa(r, z) = 1 - z^2/4r^2$, $I_x(p, q)$ — неполная бета-функция:

$$I_x(p, q) = B^{-1}(p, q) \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt, \; p > 0, \; q > 0, \; x \in [0, 1].$$

Опишем теперь асимптотическое поведение $\alpha_{v(r)}(u)$ при $r \to \infty$.

Теорема. *Пусть $X(t)$, $t \in R^N$, — случайное поле, определенное формулой (1), $m \geqslant 3$. Предположим, что 1) выполняется условие (3); 2) существует $\delta \in (0, 1)$ такое, что $\lim_{r\to\infty} r^{-N(1+\delta)} \sigma_2^2(r) = \infty$, причем $r(z) \downarrow 0$ при $z \to \infty$.*

Тогда случайный процесс

$$(\alpha_{v(r)}(u) - |v(r)|\, p(u))/\sigma_2(r), \; u \in [0, \infty) \setminus \{m/2\}$$

имеет те же предельные конечномерные распределения, что и процесс

$$p(u)(2u - m)\, m^{-1} \sum_{i=1}^{m} Y_i^2(r),$$

где случайные величины $Y_i^2(r)$ определяются следующим образом:

$$Y_i^2(r) = \int_{v(r)} H_2(X_i(t))\,dt/\sigma_2(r). \tag{4}$$

З а м е ч а н и е. Пусть для некоторого $\alpha \in (0, N/2)$ $r(z) = z^{-\alpha}L(z)$ при $z > 0$ и $z \to \infty$, где $L(z)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция, ограниченная в каждом конечном интервале. Тогда предельное распределение случайных величин (4) может быть представлено в виде кратного стохастического интеграла (см. п. 2.10 [3]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично случаю $N = 1$ [1] можно показать, что утверждение теоремы будет иметь место, если для $u \in [0, \infty) \setminus \{m/2\}$ выполняется соотношение

$$\limsup_{r\to\infty} \Big\{ \int_{v(r)} \int_{v(r)} (p(u, u; \gamma(|t-s|)) - p^2(u))\,dtds \Big\} \times$$
$$\times \Big[p^2(u)\,(L_1^{m/2-1}(u))^2 \int_{v(r)} \int_{v(r)} \gamma(|t-s|)\,dtds\Big]^{-1} \leqslant 1. \tag{5}$$

Используя формулу 1.4.9 из [3] для плотности распределения расстояния между двумя независимыми и равномерно распределенными внутри шара точками, выражение, стоящее под знаком предела в (5), можно привести к виду

$$\Big\{cr^N \int_0^{2r} [p(u, u; \gamma(z)) - p^2(u)]\,z^{N-1} I_{\varkappa(r,z)}((N+1)/2, 1/2)\,dz\Big\} \times$$
$$\times \{p^2(u)\,(m/2 - u)^2\,(m/2)^{-1}\,\sigma_2^2(r)\}^{-1}. \tag{6}$$

Числитель выражения (6) представим в виде суммы интегралов:

$$I_1 + I_2 + I_3 = cr^N \Big[\int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{(2r)^\delta} \int_{(2r)^\delta}^{2r}\Big] \{(p(u, u; \gamma(z) -$$
$$- p^2(u))\,z^{N-1} I_{\varkappa(r,z)}((N+1)/2, 1/2)\,dz\}.$$

Используя соотношение $I_\nu(z) = (e^z/\sqrt{2\pi z})\,(1 + O(z))$ при $z \to \infty$, получаем оценку для I_1:

$$I_1 \leqslant cr^N \int_0^{\varepsilon} [u^{(m-3)/2} \exp\{-2u/(1+\sqrt{\gamma})\} \times \gamma^{-(m-1)/4} \times$$
$$\times (2\sqrt{\pi}\,\Gamma(m/2))^{-1}\,(1-\gamma)^{-1/2} - p^2(u)] \times$$
$$\times I_{\varkappa(r,z)}((N+1)/2, 1/2)\,z^{N-1} dz \leqslant c_1 r^N$$

в силу условия 1 теоремы. Применив затем условие 2, получим $I_1/\sigma_2^2(r) \to 0$, $r \to \infty$.

При оценивании I_2 воспользуемся неравенствами $\gamma(z) \leqslant \gamma_0 < 1$ при $z \in [\varepsilon, (2r)^\delta]$ и $I_\nu(x) \leqslant (x/2)^\nu e^x \Gamma^{-1}(\nu + 1)$. Имеем

$$I_2 \leqslant cr^N e^{-2u} u^{m-2} \Gamma^{-2}(m/2)\,((1-\gamma_0)^{-m/2} - 1) \times$$
$$\times \int_{\varepsilon}^{(2r)^\delta} z^{N-1} I_{\varkappa(r,z)}((N+1)/2, 1/2)\,dz \leqslant c_2 r^{\delta(N+1)}.$$

Поэтому в силу условия 2 $I_2/\sigma_2^2(r) \to 0$, $r \to \infty$.

Используя представление функции $I_\nu(x)$ при малых значениях x: $I_\nu(x) \sim (x/2)^\nu/\Gamma(\nu+1)$, получаем оценку для I_3:

$$I_3 \leqslant cr^N \int_{(2r)^\delta}^{2r} (\exp(-2u/(1-\gamma))(1-\gamma)^{m/2} - \exp(-2u)) \times$$
$$\times u^{m-2}\Gamma^{-2}(m/2)\, z^{N-1} I_{\varkappa(r,z)}((N+1)/2,\ 1/2)\, dz.$$

Далее, разложив выражение в круглых скобках в ряд Тейлора, имеем

$$I_3/[p^2(u)(m/2-u)^2(m/2)^{-1}\sigma_2^2(r)] \leqslant$$
$$\leqslant 2m(m/2-2u)(m-2u)^{-2} \int_{(2r)^\delta}^{2r} \gamma(z)\, z^{N-1} \times$$
$$\times I_{\varkappa(r,z)}((N+1)/2,\ 1/2)\, dz \left\{\int_0^{2r} \gamma(z)\, z^{N-1} I_{\varkappa(r,z)}((N+1)/2,\ 1/2)\, dz\right\}^{-1} \leqslant 1,$$

что и завершает доказательство.

1. *Berman S. M.* Local times of stochastic processes with positive definite bivariate densities // Stoch. Proc. Appl.— 1982.— **12**.— P. 1—26.
2. *Сахно Л. М.* Предельные теоремы для локального времени однородного изотропного гауссовского случайного поля // Тез. докл. V междунар. конф. по теории вероятностей и мат. статистике (Вильнюс, 24 июня — 1 июля 1989).— Вильнюс: Ин-т математики и кибернетики АН Лит ССР, 1989.— **4**.— С. 213—214.
3. *Леоненко Н. Н., Иванов А. В.* Статистический анализ случайных полей.— Киев : Вища шк., 1986.— 216 с.

Киев. ун-т

Получено 30.10.89