УДК 517.9

А. М. Самойленко, Х. З. Мустафаев

О принципе усреднения для одного класса систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

Формулируется теорема об асимтотической устойчивости решений систем с отклоняющимся аргументом при предположениях, что усредненная система имеет квазистатические решения.

Припускаючи, що усереднена система має квазістатистичні розв'язки, формулюється теорема про асимптотичну стійкість розв'язків системи з аргументом, що відхиляються.

В настоящей работе рассматривается частный случай, первая теорема Н. Н. Боголюбова [1], обосновывающая принцип усреднения (на бесконечном интервале времени) для системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом вида

$$dx(t)/dt = \varepsilon X(t, x(t), x(\lambda t)); \tag{1}$$

правая часть определена для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $t \in R^+$, $x = x(t) \in D$, $x_\lambda = x(\lambda t) \in D$, $(D \subset E_n)$ и $0 < \lambda < 1$ — фиксированная постоянная.

Пусть выполняются условия:

1) функция $X(t, x, x_\lambda)$ непрерывна по t, x, x_λ вместе с производными по x и x_λ первого порядка и удовлетворяет неравенствам

$$\max\{\sup\{X(t, x, x_\lambda), \partial X/\partial x, \partial X/\partial x_\lambda\}\} \leqslant M,$$

$$\left\| \frac{\partial X(t, x', x'_\lambda)}{\partial x} - \frac{\partial X(t, x'', x''_\lambda)}{\partial x} \right\| \leqslant M(\|x' - x''\| + \|x'_\lambda - x''_\lambda\|),$$

$$\left\| \frac{\partial X(t, x', x'_\lambda)}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial X(t, x'', x''_\lambda)}{\partial x_\lambda} \right\| \leqslant M(\|x' - x''\| + \|x'_\lambda - x''_\tau\|)$$

для всех $t \in R^+$, $x', x'_\lambda \in D$, $x'', x''_\lambda \in D$.

2) функция $X(t, x, x_\lambda)$ и матрица ее частных производных удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T^{t+T} X(t, x, x_\lambda)\, dt = X_0(x, x_\lambda),$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T^{t+T} \frac{\partial X(t, x, x_\lambda)}{\partial x}\, dt = \frac{\partial X_0(x, x_\lambda)}{\partial x},$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T^{t+T} \frac{\partial X(t, x, x_\lambda)}{\partial x_\lambda}\, dt = \frac{\partial X_0(x, x_\lambda)}{\partial x_\lambda}$$

равномерно по (t, x, x_λ) из области $[0, +\infty) \times D \times D$.

Пусть усредненная система уравнений

$$dy(t)/dt = \varepsilon X_0(y(t), y(\lambda t)) \tag{2}$$

имеет положение равновесия $y = y_0$, принадлежащее области D вместе с некоторой ρ окрестностью. Этому положению равновесия соответствует система уравнений в вариациях

$$da(t)/dt = \varepsilon H a(t) + \varepsilon H_\lambda a(\lambda t),$$

где $H = \partial X_0(y_0, y_0)/\partial y$, $H_\lambda = \partial X_0(y_0, y_0)/\partial y_\lambda$.

Предположим, что собственные числа матрицы H имеют отрицательные вещественные части. Тогда фундаментальная матрица $\Omega_\tau^t = \Omega_\tau^t(H)$ системы уравнений $db(t)/dt = \varepsilon Hb(t)$ — удовлетворяет неравенству

$$\|\Omega_\tau^t\| \leqslant Re^{-\varepsilon\gamma(t-\tau)} \tag{3}$$

для всех $t \geqslant \tau$, произвольного $\tau \in R^+$ и любых положительных R и γ, не зависящих от τ.

Теорема. *Пусть правая часть системы уравнений* (1) *удовлетворяет приведенным выше условиям, собственные числа матрицы H имеют отрицательные вещественные части и для матриц H_λ справедливо неравенство $\|H_\lambda\| < \dfrac{\gamma}{2R}$.*

Тогда можно найти такие $\varepsilon_0 > 0$, δ и γ, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ любое решение $x = x(t, \varepsilon)$ системы уравнений (1), *у которого $x^0(0, \varepsilon) = y(0)$ и $\|y(0) - x_0\| < \delta$, а также любое решение $y = y(\varepsilon t)$ системы уравнений* (2) *определены для всех t на полуоси R^+, удовлетворяют соотношению*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|x^0(t, \varepsilon) - y(\varepsilon t)\| = 0$$

равномерно по t на R^+ и неравенству

$$\|x^0(t, \varepsilon) - x(t, \varepsilon)\| \leqslant Re^{-\varepsilon\gamma_1(t-\tau)} \|x^0(\tau, \varepsilon) - x(\tau, \varepsilon)\| \tag{4}$$

для всех $t \geqslant \tau$ и произвольного $\tau \in R^+$, где $x(t, \varepsilon)$ — решение системы уравнений (1), *$x(0, \varepsilon) = x_0$, R и γ_1 — положительные постоянные, не зависящие от ε, δ и τ.*

Доказательство. Запишем систему уравнений (1) и (2) в медленном времени $\tau = \varepsilon t$:

$$dx/d\tau = X(\tau/\varepsilon, x, x_\lambda), \tag{1'}$$

$$dy/d\tau = X_0(y, y_\lambda). \tag{2'}$$

Согласно предположению 2 имеем следующие соотношения [2]:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\| \int_0^t \left[X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x, x_\lambda\right) - X_0(x, x_\lambda)\right] d\tau \right\|_1 = 0, \tag{5}$$

где под нормой $\|\cdot\|_1$ понимается

$$\left\| f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x, x_\lambda\right)\right\|_1 = \max\left\{\sup\left\{\|f\|, \left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|, \left\|\frac{\partial f}{\partial x_\lambda}\right\|, (\tau, x, x_\lambda) \in R^+ \times D \times D\right\}\right\}.$$

Производя замену переменных в уравнении (1') $x = y_0 + z$, получаем систему уравнений

$$dz/d\tau = X(\tau/\varepsilon, y_0 + z, y_0 + z_\lambda), \tag{6}$$

правая часть которой определена в области

$$\tau \in R^+, \quad \|z\| < \rho, \quad \|z_\lambda\| < \rho, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \tag{7}$$

Обозначим

$$X_1\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, z, z_\lambda\right) = X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y_0 + z, y_0 + z_\lambda\right) - X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y_0, y_0\right) -$$

$$- \frac{\partial X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y_0, y_0\right)}{\partial x} z - \frac{\partial X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y_0, y_0\right)}{\partial x_\lambda} z_\lambda,$$

$$X_2\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) = \frac{\partial X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y_0, y_0\right)}{\partial x} - \frac{\partial X_0(y_0, y_0)}{\partial x},$$

$$X_3\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)=\frac{\partial X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y_0, y_0\right)}{\partial x_\lambda}-\frac{\partial X_0(y_0, y_0)}{\partial x_\lambda},$$

$$X_4\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)=X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y_0, y_0\right)-X_0(y_0, y_0).$$

Тогда систему уравнений (6) можно представить в виде

$$dz/d\tau=Hz+X_1(\tau/\varepsilon, z, z_\lambda)+X_2(\tau/\varepsilon)z+X_3(\tau/\varepsilon)z_\lambda+X_4(\tau/\varepsilon)+H_\lambda z_\lambda. \quad (8)$$

Правая часть системы уравнений (8) в области (7) имеет непрерывные частные производные. Поэтому система уравнений (8) в области (7) имеет решение $z=z_\tau(\varepsilon)$, $z_0(\varepsilon)=0$ для всех $\tau\in[0, T_1)$, где $T_1>0$.

Пусть $[0, T_1)$ является максимальным полуинтервалом существования решения [3] $z_\tau(\varepsilon)$ системы уравнений (8), как системы уравнений, заданной в области (7). Очевидно, что $z_\tau(\varepsilon)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$z_\tau(\varepsilon)=\int_0^\tau \Omega_\theta^\tau X_1\left(\frac{\theta}{\varepsilon}, z_\theta(\varepsilon), z_{\lambda\theta}(\varepsilon)\right)d\theta+\int_0^\tau \Omega_\theta^\tau X_2\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right)z_\theta(\varepsilon)\,d\theta+$$

$$+\int_0^\tau \Omega_\theta^\tau X_3\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right)z_{\lambda\theta}(\varepsilon)\,d\theta+\int_0^\tau \Omega_\theta^\tau X_4\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right)d\theta+\int_0^\tau \Omega_\theta^\tau H_\lambda z_{\lambda\theta}(\varepsilon)\,d\theta. \quad (9)$$

Оценим правую часть уравнения (9) для $\tau\in[0, T_1)$. Для функции $X_1(\tau/\varepsilon, z, z_\lambda)$ справедливо интегральное представление

$$X_1\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, z, z_\lambda\right)=\int_0^1\left[\frac{\partial X(\tau/\varepsilon, y_0+\nu z, y_0+\nu z_\lambda)}{\partial x}-\frac{\partial X(\tau/\varepsilon, y_0, y_0)}{\partial x}\right]d\nu\cdot z+$$

$$+\int_0^1\left[\frac{\partial X(\tau/\varepsilon, y_0+\nu z, y_0+\nu z_\lambda)}{\partial x_\lambda}-\frac{\partial X(\tau/\varepsilon, y_0, y_0)}{\partial x_\lambda}\right]d\nu\cdot z_\lambda.$$

Отсюда, учитывая предположение 1, имеем

$$\|X_1(\tau/\varepsilon, z, z_\lambda)\|\leqslant M\sqrt{n}(\|z\|+\|z_\lambda\|)^2.$$

Тогда получаем оценку

$$\left\|\int_0^\tau \Omega_\theta^\tau X_1\left(\frac{\theta}{\varepsilon}, z_\theta(\varepsilon), z_{\lambda\theta}(\varepsilon)\right)d\theta\right\|\leqslant\frac{4RM\sqrt{n}}{\gamma}\eta^2, \quad (10)$$

где

$$\eta=\max\{\sup_{\tau\in[0,T_1)}\|z_\tau(\varepsilon)\|, \quad \sup_{\tau\in[0,T_1)}\|z_{\lambda\tau}(\varepsilon)\|\}.$$

Используя тождества для матрицы Ω_θ^τ, следующие из ее определения,

$$\Omega_\theta^\theta=E, \quad \frac{d}{d\theta}\Omega_\theta^\tau(H)=\frac{d}{d\theta}[\Omega_\tau^\theta]^{-1}=-\Omega_\theta^\tau(H)\cdot H$$

и интегрируя по частям второе слагаемое уравнения (9), имеем

$$\int_0^\tau \Omega_\theta^\tau X_2\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right)z_\theta(\varepsilon)\,d\theta=\int_0^\tau \Omega_\theta^\tau X_2\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right)d\theta z_\tau(\varepsilon)-\int_0^\tau\int_0^\theta \Omega_s^\tau X_2\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)ds\,\frac{dz_\theta(\varepsilon)}{d\theta}\,d\theta. \quad (11)$$

Для первого слагаемого уравнения (11) имеем

$$\int_0^\tau \Omega_\theta^\tau X_2\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right)d\theta z_\tau(\varepsilon)=\int_0^\tau X_2\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right)d\theta z_\tau(\varepsilon)+\int_0^\tau \Omega_\theta^\tau\cdot H\cdot\int_0^\theta X_2\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right)d\theta d\theta z_\tau(\varepsilon). \quad (12)$$

Тогда согласно (3) и (5) получаем

$$\left\| \int_0^\tau \Omega_\theta^\tau X_2 \left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right) d\theta z_\tau(\varepsilon) \right\| \leqslant \delta_1(\varepsilon) \left(1 + \frac{R \| H \|}{\gamma}\right) \rho \tag{13}$$

для всех $\tau \in [0, T_1)$, где $\delta_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Используя тождество $\Omega_s^\tau = \Omega_\theta^\tau \Omega_s^\theta$, $\tau \geqslant s \geqslant \theta$, представим второе слагаемое уравнения (11) в виде

$$\int_0^\tau \int_0^\theta \Omega_s^\tau X_2 \left(\frac{s}{\varepsilon}\right) ds \frac{dz_\theta(\varepsilon)}{d\theta} d\theta = \int_0^\tau \Omega_\theta^\tau \int_0^\theta \Omega_s^\theta X_2 \left(\frac{s}{\varepsilon}\right) ds \times$$

$$\times X\left(\frac{\theta}{\varepsilon}, y_0 + z_\theta(\varepsilon), y_0 + z_{\lambda\theta}(\varepsilon)\right) d\theta.$$

Тогда

$$\left\| \int_0^\tau \int_0^\theta \Omega_s^\tau X_2 \left(\frac{s}{\varepsilon}\right) ds \frac{dz_\theta(\varepsilon)}{d\theta} d\theta \right\| \leqslant \delta_1(\varepsilon) \left(1 + \frac{R \| H \|}{\gamma}\right) \frac{MR}{\gamma}. \tag{14}$$

Объединяя (13) и (14), получаем следующую оценку для второго слагаемого уравнения (9):

$$\left\| \int_0^\tau \Omega_\theta^\tau X_2 \left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right) z_\theta(\varepsilon) d\theta \right\| \leqslant \delta_1(\varepsilon) \left(1 + \frac{R \| H \|}{\gamma}\right) \left(\rho + \frac{MR}{\gamma}\right) \tag{15}$$

для всех $\tau \in [0, T_1)$, где $\delta_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Аналогично получаем оценку для третьего слагаемого уравнения (9):

$$\left\| \int_0^\tau \Omega_\theta^\tau X_3 \left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right) z_{\lambda\theta}(\varepsilon) d\theta \right\| \leqslant \delta_2(\varepsilon) \left(1 + \frac{R \| H \|}{\gamma}\right) \left(\rho + \frac{MR\lambda}{\gamma}\right) \tag{16}$$

для всех $\tau \in [0, T_1)$, где $\delta_2(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Интегрируя по частям четвертое слагаемое уравнения (9) и учитывая (3) и (5), имеем

$$\left\| \int_0^\tau \Omega_\theta^\tau X_4 \left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right) d\theta \right\| \leqslant \delta_3(\varepsilon) \left(1 + \frac{R \| H \|}{\gamma}\right) \tag{17}$$

для всех $\tau \in [0, T_1)$, где $\delta_3(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Из (10), (13), (16) и (17) вытекает следующая оценка функции $z_\tau(\varepsilon)$ при $\tau \in [0, T_1)$:

$$\| z_\tau(\varepsilon) \| \leqslant c_1 (\eta^2 + \omega(\varepsilon)) + \frac{R}{\gamma} \| H_\lambda \| \max_{\tau \in [0, T_1)} \| z_{\lambda\tau}(\varepsilon) \|. \tag{18}$$

Здесь c_1 — постоянная, не зависящая от ε, $\omega(\varepsilon)$ — функция параметра ε, монотонно убывающая к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Переходя в неравенстве (18) от величины $\| z_\tau(\varepsilon) \|$ к величине η, получаем неравенство

$$\eta \leqslant c (\eta^2 + \omega(\varepsilon)), \tag{19}$$

где $c = \dfrac{c_1}{\left(1 - \dfrac{R}{\gamma} \| H_\lambda \|\right)}$.

Предположим, что $\rho < \dfrac{1}{c}$ и ε настолько мало, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ справедливо неравенство

$$4c^2 \omega(\varepsilon) \leqslant 1, \quad 4c\omega(\varepsilon) \leqslant \rho/2. \tag{20}$$

Тогда, решая неравенство (19), находим для η оценку

$$\eta \leqslant \frac{1}{c}[1-\sqrt{1-4c^2\omega(\varepsilon)}] \leqslant 4c\omega(\varepsilon). \tag{21}$$

По определению максимального полуинтервала существования решения $z_\tau(\varepsilon)$ точка $(T_1, \bar z)$, где $\|\bar z\| \leqslant \sup_{\tau\in[0,T_1)} \|z_\tau(\varepsilon)\|$, принадлежит границе области (7) для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Но для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ точка $\bar z$ не принадлежит границе области $\|z\| < \rho$. Поэтому для указанных значений ε точка T_1 должна принадлежать границе полуоси R^+. Следовательно, $T_1 = +\infty$. Этим доказано, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, решение $z_\tau(\varepsilon)$ определено для $\tau \in [0, +\infty)$ и удовлетворяет неравенству (21).

Переходя в неравенстве (21) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем предельное соотношение $\lim_{\varepsilon\to 0} \eta = 0$, т. е. решение $x = x_\tau(\varepsilon)$, взятое для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, определено для всех $t \in R^+$ и удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \| x_\tau(\varepsilon) - y_0 \| = 0 \tag{22}$$

равномерно относительно t на полуоси R^+.

Перейдем к установлению аналогичного утверждения для решения $x_1 = x(t, \varepsilon)$ и к получению оценки (4).

Для этого запишем систему уравнений (1′) относительно разности

$$z = x_1 - x. \tag{23}$$

В обозначениях

$$X_1(\tau/\varepsilon, x, x_\lambda, z, z_\lambda) = \int_0^1 \left[\frac{\partial X(\tau/\varepsilon, x+\nu z, x_\lambda+\nu z_\lambda)}{\partial x} - \frac{\partial X(\tau/\varepsilon, x, x_\lambda)}{\partial x} \right] d\nu \cdot z +$$

$$+ \int_0^1 \left[\frac{\partial X(\tau/\varepsilon, x+\nu z, x_\lambda+\nu z_\lambda)}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial X(\tau/\varepsilon, x, x_\lambda)}{\partial x_\lambda} \right] d\nu \cdot z_\lambda,$$

$$X_2(\tau/\varepsilon, x, x_\lambda) = \frac{\partial X(\tau/\varepsilon, x, x_\lambda)}{\partial x} - \frac{\partial X_0(y_0, y_0)}{\partial x},$$

$$X_3(\tau/\varepsilon, x, x_\lambda) = \frac{\partial X(\tau/\varepsilon, x, x_\lambda)}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial X_0(y_0, y_0)}{\partial x_\lambda}$$

система уравнений (1′) принимает относительно z вид

$$dz/d\tau = Hz + X_1(\tau/\varepsilon, x, x_\lambda, z, z_\lambda) + X_2(\tau/\varepsilon, x, x_\lambda) z + X_3(\tau/\varepsilon, x, x_\lambda) z_\lambda + H_\lambda z_\lambda, \tag{24}$$

где матрицы $X_1(\tau/\varepsilon, x, x_\lambda, z, z_\lambda)$, $X_2(\tau/\varepsilon, x, x_\lambda)$ и $X_3(\tau/\varepsilon, x, x_\lambda)$ определены в области $\tau \in R^+$, $\|z\| < d$, $\|z_\lambda\| < d$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, с достаточно малыми постоянными $d > 0$, $\varepsilon_0 > 0$. Обозначим через $z = z_\tau(\varepsilon)$ решение системы уравнений (24), принимающее при $t = 0$ значение $z_0(\varepsilon) = z_0$, у которого $\|z_0\| < \delta$ для какого либо $\delta \leqslant \delta_0$, $\delta_0 < d$.

Пусть $[0, T_2)$ — максимальный полуинтервал существования решения $z = z_\tau(\varepsilon)$ на полуоси R^+. Для любого $\tau \in [0, T_2)$ функция $z_\tau(\varepsilon)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$z_\tau(\varepsilon) = \Omega_0^\tau(H) z_0 + \int_0^\tau \Omega_s^\tau(H) X_1\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, x_\lambda, z_s(\varepsilon), z_{\lambda s}(\varepsilon)\right) ds +$$

$$+ \int_0^\tau \Omega_s^\tau(H) X_2\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, x_\lambda\right) z_s(\varepsilon)\, ds + \int_0^\tau \Omega_s^\tau(H) X_3\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, x_\lambda\right) z_{\lambda s}(\varepsilon)\, ds +$$

$$+ \int_0^\tau \Omega_s^\tau H_\lambda z_{\lambda s}(\varepsilon)\, ds. \tag{25}$$

Учитывая (22), имеем

$$\| X_2(s/\varepsilon, x, x_\lambda) \| < \mu_1(\varepsilon), \quad \| X_3(s/\varepsilon, x, x_\lambda) \| \leqslant \mu_2(\varepsilon),$$

где $\mu_1(\varepsilon) \to 0$, $\mu_2(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Поэтому функция $z_\tau(\varepsilon)$ из уравнения (25) удовлетворяет неравенству

$$\| z_\tau(\varepsilon) \| \leqslant R\delta + \frac{R}{\gamma}[4M\sqrt{n}d^2 + (\mu(\varepsilon) + \| H_\lambda \|) d]$$

для всех $\tau \in [0, T_2)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, где $\mu(\varepsilon)$ монотонно убывает к нулю при $\varepsilon \to \to 0$.

Выберем δ_0, ε_0, d настолько малыми, чтобы при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ выполнялось неравенство

$$R\delta_0 + \frac{R}{\gamma}[4M\sqrt{n}d^2 + (\mu(\varepsilon) + \| H_\lambda \|) d] \leqslant \frac{d}{2}.$$

Тогда функция $z_\tau(\varepsilon)$ удовлетворяет неравенству

$$\| z_\tau(\varepsilon) \| \leqslant d/2 \tag{26}$$

для всех $\tau \in [0, T_2)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Из неравенства (26) с учетом того, что полуинтервал $[0, T_2)$ является максимальным полуинтервалом существования решения $z_\tau(\varepsilon)$ на полуоси R^+, следует равенство $T_2 = +\infty$ для всех z_0 и ε из области

$$\| z_0 \| < \delta, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \tag{27}$$

Таким образом, доказано, что решение $z_\tau(\varepsilon)$ при z_0 и ε из области (27) определено для всех $\tau \in R^+$ и принимает значения в области

$$\| z_\tau(\varepsilon) \| < d. \tag{28}$$

Докажем для $z_\tau(\varepsilon)$ оценку вида (4). Для произвольного $\theta \in R^+$ и всех $\tau \geqslant \theta$ функция $z_\tau(\varepsilon)$, у которой z_0 и ε принадлежат области (27), определена и принимает значения в области (28) и удовлетворяет интегральному уравнению

$$z_\tau(\varepsilon) = \Omega_\theta^\tau(H) z_0(\varepsilon) + \int_\theta^\tau \Omega_s^\tau P\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, x_\lambda, z_s(\varepsilon), z_{\lambda s}(\varepsilon)\right) \cdot z_s(\varepsilon)\, ds + \\ + \int_\theta^\tau \Omega_s^\tau Q\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, x_\lambda, z_s(\varepsilon), z_{\lambda s}(\varepsilon)\right) \cdot z_{\lambda s}(\varepsilon)\, ds, \tag{29}$$

где матрицы

$$P\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, x_\lambda, z_s(\varepsilon), z_{\lambda s}(\varepsilon)\right) = \int_0^1 \left[\frac{\partial X(\tau/\varepsilon, x + \nu z_s(\varepsilon), x_\lambda + \nu z_{\lambda s}(\varepsilon))}{\partial x} - \right. \\ \left. - \frac{\partial X(\tau/\varepsilon, x, x_\lambda)}{\partial x} \right] d\nu + \frac{\partial X(\tau/\varepsilon, x, x_\lambda)}{\partial x} - \frac{\partial X(\tau/\varepsilon, y_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial X(\tau/\varepsilon, y_0, y_0)}{\partial x} - \\ - \frac{\partial X_0(y_0, y_0)}{\partial x},$$

$$Q\left(\frac{s}{\varepsilon}, x, x_\lambda, z_s(\varepsilon), z_{\lambda s}(\varepsilon)\right) = \int_0^1 \left[\frac{\partial X(\tau/\varepsilon, x + \nu z_s(\varepsilon), x_\lambda + \nu z_{\lambda s}(\varepsilon))}{\partial x_\lambda} - \right. \\ \left. - \frac{\partial X(\tau/\varepsilon, x, x_\lambda)}{\partial x_\lambda} \right] d\nu + \frac{\partial X(\tau/\varepsilon, x, x_\lambda)}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial X(\tau/\varepsilon, y_0, y_0)}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial X(\tau/\varepsilon, y_0, y_0)}{\partial x_\lambda} - \\ - \frac{\partial X_0(y_0, y_0)}{\partial x_\lambda} + H_\lambda$$

определены в области $\tau \in R^+$, $\| z_\tau \| < d$, $\| z_{\lambda\tau} \| < d$ и согласно предположениям 1, 2 и соотношению (22) удовлетворяют неравенствам

$$\| P(s/\varepsilon, x, x_\lambda, z_s(\varepsilon), z_{\lambda s}(\varepsilon)) \| \leqslant M \sqrt{n} (\| z_s(\varepsilon) \| + \| z_{\lambda s}(\varepsilon) \|) + \mu_1(\varepsilon),$$

$$\| Q(s/\varepsilon, x, x_\lambda, z_s(\varepsilon), z_{\lambda s}(\varepsilon)) \| \leqslant M \sqrt{n} (\| z_s(\varepsilon) \| + \| z_{\lambda s}(\varepsilon) \|) + \mu_2(\varepsilon) + \| H_\lambda \|,$$

где $\mu_1(\varepsilon) \to 0$, $\mu_2(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Тогда из уравнения (29) находим

$$\| \bar{z}_\tau(\varepsilon) \| \leqslant R e^{-\gamma(\tau-\theta)} \| \bar{z}_\theta(\varepsilon) \| + R [4M \sqrt{n} d + \mu(\varepsilon) + \| H_\lambda \|] \times \times \int_\theta^\tau e^{-\gamma(\tau-s)} \| \bar{z}_s(\varepsilon) \| ds. \tag{30}$$

Здесь

$$\bar{z}_\tau(\varepsilon) = \max \{ \sup_{\tau \in [0, +\infty)} \| z_\tau(\varepsilon) \| \}. \tag{31}$$

Положим $\xi(\tau, \theta) = e^{\gamma(\tau-\theta)} \| \bar{z}_\tau(\varepsilon) \|$ и представим неравенство (30) в виде

$$\xi(\tau, \theta) \leqslant R \xi(\theta, \theta) + R [4M \sqrt{n} d + \mu(\varepsilon) + \| H_\lambda \|] \int_\theta^\tau \xi(\tau, s) ds$$

для всех $\tau \geqslant \theta$. Отсюда согласно неравенству Гронуолла — Беллмана находим

$$\xi(\tau, \theta) \leqslant R e^{R[4\bar{M} \sqrt{n} d + \mu(\varepsilon) + \| H_\lambda \|](\tau-\theta)} \xi(\theta, \theta), \quad \tau \geqslant \theta,$$

откуда

$$\| \bar{z}_\tau(\varepsilon) \| \leqslant R e^{-[\gamma - R(4M\sqrt{n} d + \mu(\varepsilon) + \| H_\lambda \|](\tau-\theta)} \| \bar{z}_\theta(\varepsilon) \| \tag{32}$$

для всех $\tau \geqslant \theta$.

Считаем ε_0 и d настолько малыми, чтобы при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ выполнялось неравенство

$$4M \sqrt{n} d + \mu(\varepsilon) + \| H_\lambda \| < \frac{\gamma}{2R}.$$

Тогда из неравенства (32) имеем

$$\| \bar{z}_\tau(\varepsilon) \| \leqslant R e^{-\frac{\gamma}{2}(\tau-\theta)} \| \bar{z}_\theta(\varepsilon) \| \tag{33}$$

для всех $\tau \geqslant \theta$.

Учитывая (31), из неравенства (33) получаем

$$\| z_\tau(\varepsilon) \| \leqslant R e^{-\varepsilon\gamma_1(\tau-\theta)} \| z_\theta(\varepsilon) \|. \tag{34}$$

Отсюда, используя замену переменных (23) и учитывая, что $x_{\varepsilon t}(\varepsilon) = x(t, \varepsilon)$ для $t \in R^+$, находим оценку (4). Теорема доказана.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 503 с.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Математические проблемы нелинейной механики.— Киев : Вища шк., 1987.— 72 с.
3. *Еругин Н. П., Штокало И. З., Бондаренко П. С.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.— Киев : Вища шк., 1974.— 471 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 13.03.90