УДК 517.929.4

И. Г. Нечаева, Д. Я. Хусаинов

Экспоненциальные оценки решений линейных стохастических дифференциально-функциональных уравнений

Рассматривается линейная система стохастических дифференциально-функциональных уравнений запаздывающего типа. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости в среднеквадратическом. Вычислены коэффициенты экспоненциального затухания решений.

Розглядається лінійна система стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з запізненням. Одержані достатні умови асимптотичної стійкості у середньоквадратичному. Обчислені коефіцієнти експоненціального згасання розв'язків.

Рассмотрим линейную стохастическую систему дифференциально-функциональных уравнений

$$dx(t) = L_1x(t)\,dt + L_2x(t)\,dw(t). \tag{1}$$

Здесь $L_1x(t)$, $L_2x(t)$ — линейные дифференциальные операторы вида

$$L_1x(t) = \int_{-\tau}^{0} [d\eta_1(s)]\,x(s+t), \quad L_2x(t) = \int_{-\tau}^{0} [d\eta_2(s)]\,x(s+t).$$

Матричные функции $\eta_1(s)$, $\eta_2(s)$ таковы, что $\int_{-\tau}^{0} |d\eta_1(s)|$, $\int_{-\tau}^{0} |d\eta_2(s)|$ — ограниченные величины, $x(t)$, $-\tau \leqslant t_0 \leqslant 0$,— любая непрерывная детерминированная (для простоты) начальная функция, $w(t)$ — скалярный стандартный винеровский процесс ($|\ |$ —спектральная матричная норма) [1].

В настоящей работе получены условия экспоненциального затухания решений системы (1) для произвольного отклонения аргумента. При исследовании используется в некотором смысле близкая к (1) «модельная» система вида

$$dx(t) = \overline{L}_1 x(t)\,dt + \overline{L}_2 x(t)\,dw(t), \tag{2}$$

где

$$\overline{L}_1 x(t) = \Big[\int_{-\tau}^{0} d\eta_1(s)\Big] x(t), \qquad \overline{L}_2 x(t) = \Big[\int_{-\tau}^{0} d\eta_2(s)\Big] x(t).$$

Исследование будем проводить с помощью неавтономной функции Ляпунова вида $v(x,t) = e^{\gamma t} x^T H x$. Здесь H — решение матричного уравнения Сильвестра — Ляпунова [2]

$$\overline{L}_1^T H + H\overline{L}_1 + \overline{L}_2^T H \overline{L}_2 = -C, \tag{3}$$

$\gamma > 0$ — некоторая положительная постоянная.

Как известно, решение $x(t)$ называется экспоненциально устойчивым в среднеквадратическом, если существуют такие постоянные $N > 0$, $\gamma > 0$, что выполняется неравенство [3, 4]

$$M\{|x(t)|^2\} \leqslant N \|x(0)\|_\tau^2 e^{-\gamma(t-\tau)}.$$

Здесь под векторными нормами понимается следующее:

$$|x(t)| = \Big\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)\Big\}^{1/2}, \quad \|x(t)\|_\tau = \max_{-\tau\leqslant s\leqslant 0} \{|x(t+s)|\};$$

При выводе условий устойчивости будем использовать так называемое условие Б. С. Разумихина [5]. Предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Для произвольного решения* $x(t)$ *системы* (1) *при* $0 \leqslant t \leqslant \tau$ *справедливо неравенство*

$$M\{\|x(t)\|_\tau^2\} \leqslant (1 + \tau\|L_1\|_\tau)\|x(0)\|_\tau^2 \exp\{[\|L_1\|_\tau + \|L_2\|_\tau^2 + \tau\|L_1\|_\tau^2]\tau\}, \tag{4}$$

где $\|L_1\|_\tau$, $\|L_2\|_\tau$ — *операторные нормы*

$$\|L_1\|_\tau = \sup_{\|z(t)\|_\tau \neq 0} \left\{\frac{\Big|\int_{-\tau}^{0} [d\eta_1(s)]\, z(t+s)\Big|}{\|z(t)\|_\tau}\right\},$$

$$\|L_2\|_\tau = \sup_{\|z(t)\|_\tau \neq 0} \left\{\frac{\Big|\int_{-\tau}^{0} [d\eta_2(s)]\, z(t+s)\Big|}{\|z(t)\|_\tau}\right\}.$$

Доказательство. Представим систему (1) в виде

$$x(t) = x(0) + \int_0^t L_1 x(\xi)\,d\xi + \int_0^t L_2 x(\zeta)\,dw(\zeta),$$

где второй интеграл понимается в смысле Ито. При $0 \leqslant t \leqslant \tau$ выполняется

$$M\{|x(t)|^2\} = M\Big\{\Big|x(0) + \int_0^t L_1 x(\xi)\,d\xi\Big|^2\Big\} + M\Big\{\Big|\int_0^t L_2 x(\zeta)\,dw(\zeta)\Big|^2\Big\}.$$

Оценим первое слагаемое:

$$M\Big\{\Big|x(0) + \int_0^t L_1 x(\xi)\,d\xi\Big|^2\Big\} \leqslant \|x(0)\|_\tau^2 (1 + \tau\|L_1\|_\tau) + M\Big\{\int_0^t \|L_1\|_\tau \times$$

$$\times \| x(\xi) \|_\tau^2 d\xi + \tau \int_0^t \| L_1 \|_\tau^2 \| x(\xi) \|_\tau^2 d\xi \Big\} = (1 + \tau \| L_1 \|_\tau) \| x(0) \|_\tau^2 +$$

$$+ M \Big\{ \int_0^t [\, \| L_1 \|_\tau + \tau \| L_1 \|_\tau^2] \| x(\xi) \|_\tau^2 \, d\xi \Big\} .$$

Для второго будет справедливым следующее:

$$M \Big\{ \Big| \int_0^t L_2 x(\zeta)\, dw(\zeta) \Big|^2 \Big\} = M \Big\{ \int_0^t | L_2 x(\zeta) |^2 d\zeta \Big\} \leqslant M \Big\{ \int_0^t \| L_2 \|_\tau^2 \| x(\zeta) \|_\tau^2 d\zeta \Big\} .$$

Складывая их, получаем

$$M \{ | x(t) |^2 \} \leqslant (1 + \tau \| L_1 \|_\tau) \| x(0) \|_\tau^2 + \int_0^t [\, \| L_1 \|_\tau + \| L_2 \|_\tau^2 +$$

$$+ \tau \| L_1 \|_\tau^2] M \{ \| x(\xi) \|_\tau^2 \} \, d\xi.$$

Поскольку для произвольного t_1: $0 \leqslant t_1 < t$ будет

$$M \{ | x(t_1) |^2 \} \leqslant (1 + \tau \| L_1 \|_\tau) \| x(0) \|_\tau^2 + \int_0^{t_1} [\, \| L_1 \|_\tau + \| L_2 \|_\tau^2 +$$

$$+ \tau \| L_1 \|_\tau^2] M \{ \| x(\xi) \|_\tau^2 \} \, d\xi \leqslant (1 + \tau \| L_1 \|_\tau) \| x(0) \|_\tau^2 +$$

$$+ \int_0^t [\, \| L_1 \|_\tau + \| L_2 \|_\tau^2 + \tau \| L_1 \|_\tau^2] M \{ \| x(\xi) \|_\tau^2 \} \, d\xi,$$

то и

$$M \{ \| x(t) \|_\tau^2 \} \leqslant (1 + \tau \| L_1 \|_\tau) \| x(0) \|_\tau^2 + \int_0^t [\, \| L_1 \|_\tau + \| L_2 \|_\tau^2 +$$

$$+ \tau \| L_1 \|_\tau^2] M \{ \| x(\xi) \|_\tau^2 \} \, d\xi.$$

Используя неравенство Беллмана, получаем, что при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ справедливо соотношение (4).

Лемма 2. *Пусть для произвольного $t > \tau$ для решения $x(t)$ системы (1) при $-\tau \leqslant s < t$ выполняется $M \{ v(x(s), s) \} < M \{ v(x(t), t) \}$. Тогда справедливо неравенство*

$$M \{ x^T(t) H [L_1 x(t) - \overline{L}_1 x(t)] \} < (3 + e^{\gamma\tau} \varphi(H)) \, | H\overline{L}_1 |_\tau M \{ | x(t) |^2 \} / 2, \tag{5}$$

где $| H\overline{L}_1 |_\tau = \int_{-\tau}^0 | H d\eta_1(s) |$, $\varphi(H) = \lambda_{\max}(H) / \lambda_{\min}(H)$, $\lambda_{\max}(H)$ и $\lambda_{\min}(H)$ — *наибольшее и наименьшее собственные числа матрицы H.*

Доказательство. Из условия леммы 2 и неравенства квадратичных форм следует, что при $-\tau \leqslant s < t$ будет

$$e^{\gamma s} \lambda_{\min}(H) | x(s) |^2 \leqslant v(x(s), s) < v(x(t), t) \leqslant e^{\gamma t} \lambda_{\max}(H) | x(t) |^2. \tag{6}$$

Отсюда получим

$$M \{ | x(s) |^2 \} < e^{\gamma(t-s)} \varphi(H) \, M \{ | x(t) |^2 \}. \tag{6'}$$

Выполним следующие преобразования:

$$M \{ x^T(t) H [L_1 x(t) - \overline{L}_1 x(t)] \} = M \Big\{ \int_{-\tau}^0 x^T(t) [H d\eta_1(s)] [x(s+t) - x(t)] \Big\} \leqslant$$

$$\leqslant M \Big\{ \int_{-\tau}^0 | H d\eta_1(s) | [\, | x(t) |^2 + | x(t) | \, | x(s+t) | \,] \Big\} \leqslant$$

$$\leqslant M\left\{\int_{-\tau}^{0}|Hd\eta_1(s)|[|x(t)|^2+(|x(t)|^2+|x(s+t)|^2)/2]\right\}.$$

Используя неравенство (6′), получаем (5).

Лемма 3. *Пусть для произвольного $t>\tau$ для решения $x(t)$ системы* (1) *при $-\tau\leqslant s<t$ выполняется $M\{v(x(s),s)\}<M\{v(x(t),t)\}$. Тогда справедливо неравенство*

$$M\{[\bar{L}_2x(t)]^TH[L_2x(t)-\bar{L}_2x(t)]\}<|H\bar{L}_2|_\tau|\bar{L}_2|_\tau(3+e^{\gamma\tau}\varphi(H))M\{|x(t)|^2\}/2. \quad (7)$$

Здесь $|H\bar{L}_2|_\tau=\int_{-\tau}^{0}|Hd\eta_2(s)|,\ |\bar{L}_2|_\tau=\int_{-\tau}^{0}|d\eta_2(s)|$.

Доказательство. Проведем преобразования, аналогичные проводимым в лемме 2:

$$M\{[\bar{L}_2x(t)]^TH[L_2x(t)-\bar{L}_2x(t)]\}=M\left\{x^T(t)\left[\int_{-\tau}^{0}d\eta_2(s_1)\right]^T\times\right.$$

$$\left.\times\left[\int_{-\tau}^{0}Hd\eta_2(s_2)\right][x(s_2+t)-x(t)]\right\}\leqslant M\left\{\left|\int_{-\tau}^{0}d\eta_2(s_1)\right|\times\right.$$

$$\left.\times\int_{-\tau}^{0}|Hd\eta_2(s_2)|[|x(t)|^2+|x(t)|\cdot|x(s_2+t)|]\right\}.$$

Отсюда получаем соотношение (7).

Лемма 4. *Пусть для произвольного $t>\tau$ для решения $x(t)$ системы* (1) *при $-\tau\leqslant s<t$ выполняется $M\{v(x(s),s)\}<M\{v(x(t),t)$. Тогда справедливо неравенство*

$$M\{[L_2x(t)-\bar{L}_2x(t)]^TH[L_2x(t)-\bar{L}_2x(t)]\}<$$
$$<2|H\bar{L}_2|_\tau|\bar{L}_2|_\tau(1+e^{\gamma\tau}\varphi(H))M\{|x(t)|^2\}. \quad (8)$$

Доказательство. Выполним следующие преобразования:

$$M\{[L_2x(t)-\bar{L}_2x(t)]^TH[L_2x(t)-\bar{L}_2x(t)]\}=M\left\{\left(\int_{-\tau}^{0}d\eta_2(s_1)[x(s_1+t)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-x(t)]\right)^TH\left(\int_{-\tau}^{0}d\eta_2(s_2)[x(s_2+t)-x(t)]\right)\right\}\leqslant M\left\{\int_{-\tau}^{0}|d\eta_2(s_1)||x(s_1+t)-\right.$$

$$\left.-x(t)|\int_{-\tau}^{0}|Hd\eta_2(s_2)||x(s_2+t)-x(t)|\right\}\leqslant$$

$$\leqslant M\left\{\int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0}|d\eta_2(s_1)||Hd\eta_2(s_2)|[|x(t)|^2+|x(s_1+t)||x(t)|+\right.$$

$$\left.+|x(s_2+t)||x(t)|+|x(s_1+t)||x(s_2+t)|]\right\}.$$

Отсюда получаем соотношение (8).

Лемма 5. *Пусть при $0\leqslant t\leqslant\tau$ выполняется* (4), *а при $t>\tau$ будет $dM\{v(x(t),t)\}<-\beta e^{\gamma t}M\{|x(t)|^2\}dt$, $\beta>0$, $\gamma>0$. Тогда при $t>\tau$ справедливо неравенство*

$$M\{v(x(t),t)\}<(1+\tau\|L_1\|_\tau)\|x(0)\|_\tau^2\lambda_{\max}(H)\times$$
$$\times\exp\{[\|L_1\|_\tau+\|L_2\|_\tau^2+\tau\|L_1\|_\tau^2]\tau+\gamma\tau\}. \quad (9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя неравенства квадратичных форм (6), получаем

$$dM\{v(x(t), t)\} < [-\beta/\lambda_{\max}(H)]\, M\{v(x(t), t)\}\, dt.$$

Проинтегрируем полученное выражение:

$$M\{v(x(t), t)\} < M\{v(x(\tau), \tau)\} \exp\{-\beta(t-\tau)/\lambda_{\max}(H)\}.$$

Вновь используя неравенство (6), получаем (9).

С использованием приведенных лемм докажем следующую теорему.

Т е о р е м а. *Пусть существуют положительно определенные матрицы H и C, являющиеся решением уравнения* (3). *Если выполняется неравенство*

$$\lambda_{\min}(C) > (3+\varphi(H))\,|H\overline{L}_1|_\tau + (5+3\varphi(H))\,|H\overline{L}_2|_\tau\,|\overline{L}_2|_\tau, \tag{10}$$

то система (1) *асимптотически устойчива в среднеквадратическом при любом $\tau > 0$ и для ее решений справедлива экспоненциальная оценка*

$$M\{|x(t)|^2\} < (1+\tau\|L_1\|_\tau)\,\delta\varphi(H)\exp\{[\,\|L_1\|_\tau + \|L_2\|_\tau^2 + \tau\|L_1\|_\tau^2]\,\tau - \gamma(t-\tau)\}, \tag{11}$$

где

$$\gamma = [\lambda_{\min}(C) - (3+\varphi(H))\,|H\overline{L}_1|_\tau - (5+3\varphi(H))\,|H\overline{L}_2|_\tau\,|\overline{L}_2|_\tau]\,\gamma_1/[\lambda_{\min}(C) - (3+\varphi(H))\,|H\overline{L}_1|_\tau - (5+3\varphi(H))\,|H\overline{L}_2|_\tau\,|\overline{L}_2|_\tau + \gamma_1\lambda_{\max}(H)], \tag{12}$$

$$\gamma_1 = 1/\tau\cdot\ln\{[\lambda_{\min}(C) - 3\,|H\overline{L}_1|_\tau - 5\,|H\overline{L}_2|_\tau\,|\overline{L}_2|_\tau]/[\varphi(H)(|H\overline{L}_1|_\tau + 3\,|H\overline{L}_2|_\tau\,|\overline{L}_2|_\tau)]\},\quad \|x(0)\|_\tau^2 < \delta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\|x(0)\|_\tau^2 < \delta$. Тогда, как следует из леммы 1, при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ справедлива оценка

$$M\{\|x(t)\|_\tau^2\} < (1+\tau\|L_1\|_\tau)\,\delta\exp\{[\,\|L_1\|_\tau + \|L_2\|_\tau^2 + \tau\|L_1\|_\tau^2]\,\tau\}.$$

Соответственно для функции Ляпунова $v(x(t), t)$

$$M\{v(x(t), t)\} < (1+\tau\|L_1\|_\tau)\,\delta\exp\{[\,\|L_1\|_\tau + \|L_2\|_\tau^2 + \tau\|L_1\|_\tau^2]\,\tau + \gamma\tau\}\,\lambda_{\max}(H), \tag{13}$$

где $\gamma > 0$ — произвольная постоянная. Покажем, что найдется $\gamma > 0$, при котором это неравенство справедливо и при $t > \tau$. Пусть, от противного, существует $T > \tau$, при котором (13) переходит в равенство, т. е. при $\tau < t < T$

$$M\{v(x(t), t)\} < (1+\tau\|L_1\|_\tau)\,\delta\exp\{[\,\|L_1\|_\tau + \|L_2\|_\tau^2 + \tau\|L_1\|_\tau^2]\,\tau + \gamma\tau\}\,\lambda_{\max}(H) = M\{v(x(T), T)\}. \tag{14}$$

Тогда будут справедливыми неравенства (5), (7), (8). Рассмотрим математическое ожидание стохастического дифференциала функции $v(x(t), t) = e^{\gamma t}x^T Hx$ в силу системы (1). Используя результаты [2, 3], получаем

$$M\{dv(x(t), t)\} = M\{\gamma e^{\gamma t}x^T(t)\,Hx(t) + e^{\gamma t}([L_1x(t)]^T Hx(t) + x^T(t)\,H[L_1x(t)] + [L_2x(t)]^T H[L_2x(t)]\}\,dt.$$

Используя «модельную» систему (2), запишем

$$M\{dv(x(t), t)\} < \gamma e^{\gamma t}\lambda_{\max}(H)\,M\{|x(t)|^2\} + e^{\gamma t}(M\{[\overline{L}_1x(t)]^T Hx(t) + x^T(t)\,H[\overline{L}_1x(t)] + [\overline{L}_2x(t)]^T H[\overline{L}_2x(t)]\}\,dt + 2M\{[L_1x(t) - \overline{L}_1x(t)]^T Hx(t)\}\,dt + 2M\{[L_2x(t) - \overline{L}_2x(t)]^T H[\overline{L}_2x(t)]\}\,dt + M\{[L_2x(t) - \overline{L}_2x(t)]^T H[L_2x(t) - \overline{L}_2x(t)]\}\,dt).$$

Учитывая матричное уравнение (3) и неравенства (5), (7), (8), имеем

$$M\{dv(x(T),T)\} < -e^{\gamma T}\{[\lambda_{\min}(C) - \gamma\lambda_{\max}(H)] - (3 + e^{\gamma\tau}\varphi(H))\,|H\overline{L}_1|_\tau - $$
$$- (5 + 3e^{\gamma\tau}\varphi(H))\,|H\overline{L}_2|_\tau\,|\overline{L}_2|_\tau\}\,M\{|x(T)|^2\}\,dT.$$

При $\gamma = 0$ стохастический дифференциал отрицательно определенный. Очевидно это сохранится и при некотором достаточно малом $\gamma > 0$. Найдем γ из условия

$$\lambda_{\min}(C) - (3 + e^{\gamma\tau}\varphi(H))\,|H\overline{L}_1|_\tau - (5 + 3e^{\gamma\tau}\varphi(H))\,|H\overline{L}_2|_\tau\,|\overline{L}_2|_\tau > \gamma\lambda_{\max}(H). \quad (15)$$

Тогда, как следует из леммы 5, справедливо неравенство (9), и, следовательно, допущение (14) неверно. Перепишем (15) в виде

$$[\lambda_{\min}(C) - (3\,|H\overline{L}_1|_\tau + 5\,|H\overline{L}_2|_\tau\,|\overline{L}_2|_\tau)] - e^{\gamma\tau}[\,|H\overline{L}_1|_\tau +$$
$$+ 3\,|H\overline{L}_2|_\tau\,|\overline{L}_2|_\tau]\,\varphi(H) > \gamma\lambda_{\max}(H).$$

Левая часть неравенства по γ представляет собой монотонно убывающую вогнутую экспоненту. Заменим ее на отрезке $0 < \gamma < \gamma_1$, где γ_1 находится из условия равенства нулю левой части и определено в (12), отрезком прямой, и γ найдем из уравнения

$$[\lambda_{\min}(C) - 3\,|H\overline{L}_1|_\tau - 5\,|H\overline{L}_2|_\tau\,|\overline{L}_2|_\tau - (\,|H\overline{L}_1|_\tau +$$
$$+ 3\,|H\overline{L}_2|_\tau\,|\overline{L}_2|_\tau)\,\varphi(H)]\,(1 - \gamma/\gamma_1) = \gamma\lambda_{\max}(H).$$

Поскольку γ удовлетворяет условию (15), то, как следует из леммы 5, справедливо (9). Учитывая (6), получаем (11), что и требовалось доказать.

Замечание. В неравенство (10) входят матрицы H и C, которые, вообще говоря, определены неоднозначно. Для нахождения H и C, при которых будет гарантировано выполнение (10) (или точно будет известно, что оно не выполняется), необходимо решать оптимизационную задачу

$$H_0 = \arg\sup_{H \in W_H}\{\Psi(H)\},$$

где

$$\Psi(H) = \lambda_{\min}(-\overline{L}_1^T H - H\overline{L}_1 - \overline{L}_2^T H\overline{L}_2) - (3 + \varphi(H))\,|H\overline{L}_1|_\tau -$$
$$-(5 + 3\varphi(H))\,|H\overline{L}_2|_\tau\,|\overline{L}_2|_\tau,$$

W_H — множество положительно определенных матриц H, для которых $\overline{L}_1^T H + H\overline{L}_1 + \overline{L}_2^T H\overline{L}^2$ отрицательно определены и $|H| \leqslant 1$.

1. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием.— М. : Наука, 1981.— 448 с.
2. *Кореневский Д. Г., Мазко А. Г.* Положительно определенные решения матричных уравнений Сильвестра—Ляпунова.— Киев, 1986.— 80 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.41).
3. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.— М. : Наука, 1969.— 368 с.
4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1982.— 611 с.
5. *Разумихин Б. С.* Устойчивость эредитарных систем.— М. : Наука, 1988.— 108 с.

Киев. ун-т
Получено 20.10.89